

## Provedení jednofaktorové analýzy rozptylu pomocí modulu ANOVA

**Popis problému:** V roce 1997 dostalo ministerstvo školství za úkol připravit nové podklady pro testování dětí při zařazování do zvláštních škol. V první fázi došlo ke standardizaci testu WISC- III, což je celosvětově nejužívanější test inteligence pro děti. Má 13 subtestů:

Doplňování obrázků

Vědomosti

Kódování

Podobnosti

Řazení obrázků

Počty

Kostky

Slovník

Skládky

Porozumění

Hledání symbolů

Opakování čísel

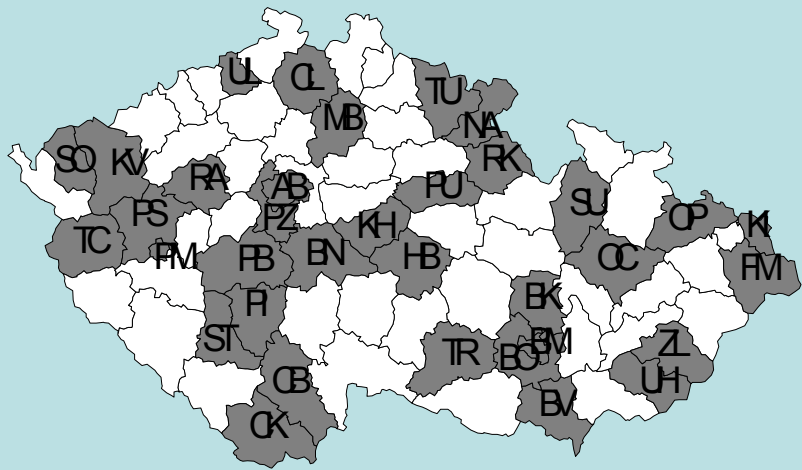
Bludiště

Počet správných odpovědí v každém subtestu (tj. hrubé skóre) se podle tabulek norem převede na vážené skóre. Ze součtu vážených skóre se v převodních tabulkách odečte vážené skóre IQ.

Zjišťuje se verbální IQ, performační IQ, celkové IQ a čtyři faktorově založené indexové skóre: slovní porozumění (IQ\_F1), percepční uspořádání (IQ\_F2), koncentrovanost (IQ\_F3) a rychlost zpracování (IQ\_F4).

Celkové IQ má průměr 100, směrodatnou odchylku 15 a řídí se normálním rozložením.

Samotné testování souboru 1455 dětí ve věku 6 – 16 let proběhlo v březnu a dubnu r. 2000 na základních školách ve 35 okresech a provedlo ho 130 pracovníků okresních pedagogicko – psychologických poraden.



## Charakteristiky výběrového souboru – pohlaví a národnost

Věk	N	Pohlaví				Národnost			
		CH		D		CZ		ROM	
		n	%	n	%	n	%	n	%
6	132	63	47,7	69	52,3	125	94,7	7	5,3
7	132	68	51,5	64	48,5	125	94,7	7	5,3
8	129	62	48,1	67	51,9	122	94,6	7	5,4
9	135	68	50,4	67	49,6	126	93,3	9	6,7
10	131	67	51,1	64	48,9	122	93,1	9	6,9
11	128	64	50,0	64	50,0	119	93,0	9	7,0
12	137	71	51,8	66	48,2	130	94,9	7	5,1
13	135	70	51,9	65	48,1	126	93,3	9	6,7
14	146	73	50,0	73	50,0	137	93,8	9	6,2
15	125	62	49,6	63	50,4	116	92,8	9	7,2
16	125	63	50,4	62	49,6	118	94,4	7	5,6
SUM	1455	731	50,2	724	49,8	1366	93,9	89	6,1

Legenda: CH ... chlapci, D ... dívky  
 CZ ... děti a dospívající z většinové populace,  
 ROM ... děti a dospívající, příslušníci romské komunity

## Charakteristiky výběrového souboru – sídlo a typ školy

Věk	N	Sídlo				Typ školy				
		M > 8 tis,		V < 8 tis,		MŠ	ZŠ	ZvŠ	SŠ	UČ
		n	%	n	%					
6	132	77	58,2	55	41,8	18,3	80,2	1,5		
7	132	73	55,6	59	44,4		96,9	3,1		
8	129	83	64,2	46	35,8		97,7	2,3		
9	135	73	53,8	62	46,2		97,0	3,0		
10	131	72	60,0	79	40,0		97,0	3,0		
11	128	65	54,2	69	45,8		90,6	2,4	7,0	
12	137	92	66,9	45	33,1		92,7	2,9	4,4	
13	135	71	52,9	64	47,1		85,6	3,0	11,3	
14	146	88	60,2	58	39,8		93,0	2,8	4,2	
15	125	71	56,9	54	43,1		71,0	3,2	25,8	
16	125	98	78,6	27	21,4		8,9	2,4	52,8	35,8
SUM	1455	874	60,1	581	39,9	1,7	83,2	2,7	9,4	3,0

Legenda:

*M > 8tis - probandi ze sídel větších než 8.000 obyvatel*

*V < 8tis - probandi ze sídel menších než 8.000 obyvatel*

*MŠ - děti navštěvující mateřskou školu, ZŠ - základní školu, ZvŠ - zvláštní školu*

*SŠ - studenti gymnázií a středních odborných škol*

*UČ - studenti integrovaných střech škol, středních odborných učilišť a odborných učilišť*

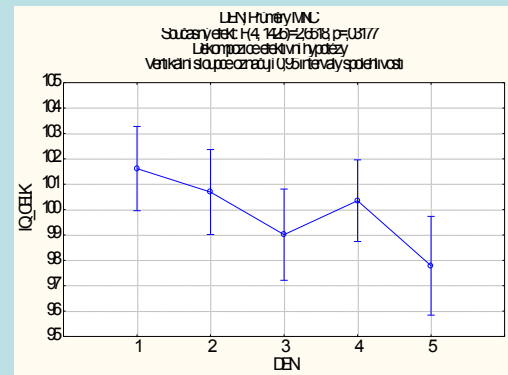
## Kolísání intelektové výkonnosti v průběhu pracovního týdne

Stejně jako jiné fyziologické a psychologické charakteristiky vykazuje intelektová výkonnost kolísání v čase. Zde se zaměříme na kolísání v průběhu pracovního týdne. Údaj o tom, ve kterém dnu týdne bylo vyšetření provedeno, byl zaznamenán u 1431 dětí. Data, kterými se budeme zabývat, jsou uložena v souboru kolisani\_IQ\_v\_tydnu.sta. Nejprve zjistíme průměry IQ\_celk v jednotlivých dnech týdne: Statistika – ANOVA – Jednofaktorová ANOVA – OK – Proměnné – Seznam závislých proměnných IQ\_celk, Kategor. Nezávislá proměnná DEN – OK – Záložka Průměry – Pozorované, nevážené.

Č. bu	DEN: Nevážené průměry (kolísání)					N
	Prům	Sm.C	-95,0	+95,0		
1	101,6	0,846	99,95	103,2	30	
2	100,6	0,853	99,01	102,3	30	
3	99,0	0,915	97,21	100,8	26	
4	100,3	0,820	98,74	101,9	32	
5	97,7	0,991	95,84	99,7	22	

Vidíme, že nejlepší výsledky jsou dosahovány v pondělí, nejhorší v pátek.

Grafické znázornění: Na záložce Průměry, Pozorované nevážené zvolíme Graf.



Nyní ověříme předpoklady pro provedení analýzy rozptylu: Vrátime se do ANOVA Výsledky, zvolíme Více výsledků, záložka Předpoklady.

Ověříme normalitu proměnné IQ\_celk pro jednotlivé dny v týdnu:

Rozdělení prom. Uvnitř skupin – Norm. p-graf – Vyberte skupiny 1 až 5. Dostaneme 5 N-P grafů, které nesignalizují výraznější porušení normality. Pokud bychom chtěli testovat normalitu pomocí S-W testu, klikneme na pozadí N-P grafu a v okně, které se otevře, zvolíme Statistika a zaškrtneme Shapiro – Wilkův test. Zjistíme, že na hladině významnosti 0,05 je porušena normalita proměnné IQ\_celk pouze v pondělí, ve všech ostatních případech je p-hodnota S-W testu větší než 0,05.

Dále ověříme homogenitu rozptylů:

Na záložce Předpoklady vybereme Levenův test.

Levenův test homogenity rozptylu (I)					
Efekt: DEN					
Stupně volnosti pro všechna F: 4, 14					
	PC	PC	F	p	
	Efek	Chyb			
IQ	CE	36,24	80,22	0,451	0,771

Na hladině významnosti 0,05 nelze zamítnout hypotézu o shodě rozptylů v daných pěti skupinách.

Dále provedeme test hypotézy o shodě středních hodnot:  
 Vrátime se do ANOVA, Výsledky – na záložce Details zvolíme Test všech efektů.

Jednorozměrné testy významnosti pro IQ_ Sigma-omezená parametrizace Dekompozice efektivní hypotézy					
Efekt	SC	Stup volnc	PC	F	p
Abs. c	14016	1	14016	6330	0,000
DEN	23	4	58	2,6	0,031
Chyba	315	14	22		

Testová statistika  $F_A$  nabývá hodnoty 2,65, počet stupňů volnosti čitatele je 4, jmenovatele 1426, odpovídající p-hodnota je 0,0318, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o shodě středních hodnot proměnné IQ\_celk. S rizikem omylu nejvýše 5 % jsme tedy prokázali, že aspoň jedna dvojice dnů v týdnu se liší z hlediska intelektové výkonnosti.

Pomocí poměru determinace posoudíme, jak velký vliv na IQ\_celk má den v týdnu.

$$R^2 = \frac{S}{S + 34} = \frac{2348}{157 + 34} = 0,07$$

Poměr determinace získáme v ANOVA Výsledky na záložce Details – Celkové R.

Závislá proměnná	Test SC celého modelu vs. SC rezidui (kolísání IQ v týdnu.sta)										
	Vícen R	Vícen R2	Upravi R2	SC Model	SV Moc	PC Model	SC Rezi	SV Rezi	PC Rezi	F	p
IQ CE	0,085	0,007	0,004	2348,	4	587,1	3157	14	221,3	2,651	0,031

Poměr determinace najdeme ve sloupci Vícenás. R2.

Mnohonásobné porovnávání provedeme na záložce Post – hoc. Vybereme HSD nestejně N.

Č. bu	DEN	HSD při nestejných N: proměnná IQ, CI Přibližné pravděpodobnosti pro post hoc Chyba: meziskup. PC = 221,40, sv = 14				
		{1}	{2}	{3}	{4}	{5}
		101,1	100,1	99,0	100,3	97,78
1	poně		0,940	0,260	0,828	0,049
2	úte	0,940		0,693	0,998	0,233
3	stre	0,260	0,693		0,839	0,906
4	ctvr	0,828	0,998	0,839		0,357
5	pat	0,049	0,233	0,906	0,357	

Vidíme, že na hladině významnosti 0,05 se liší pondělí a pátek.

Dále můžeme stanovit homogenní skupiny dnů podle Tukeyovy HSD metody. Homogenní skupiny nás informují o tom, které výběry by mohly být považovány za výběry z téhož rozložení (jsou tedy rovnocenné z hlediska vlivu sledovaného faktoru).

V ANOVA Výsledky na záložce Pos - hoc vybereme Zobrazit Homogenní skupiny - HSD nestejně N.

Č. bu	DEN	IQ	CE	1	2
			Prům.		
5	pat	97,78	***	***	
3	stre	99,0	***	***	***
4	ctvr	100,3	***	***	***
2	úte	100,6	***	***	***
1	poně	101,6			***

První skupina – dny s horšími výkony.

Druhá skupina – dny s lepšími výkony.

Pátek – den s nejhorším výkonem.

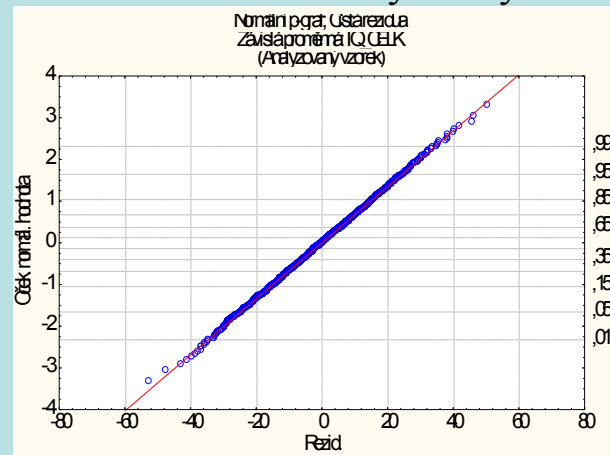
Pondělí – den s nejlepším výkonem.

Úterý, středa, čtvrtek – dny s neutrálními výkony.



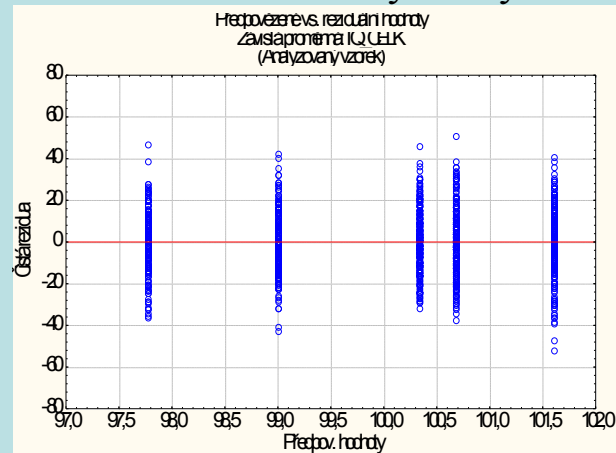
Prozkoumáme chování reziduí:

Návrat do ANOVA Výsledky – Rezidua – Pravdě. graf reziduí



Normální pravděpodobnostní graf reziduí svědčí o tom, že rezidua se řídí normálním rozložením.

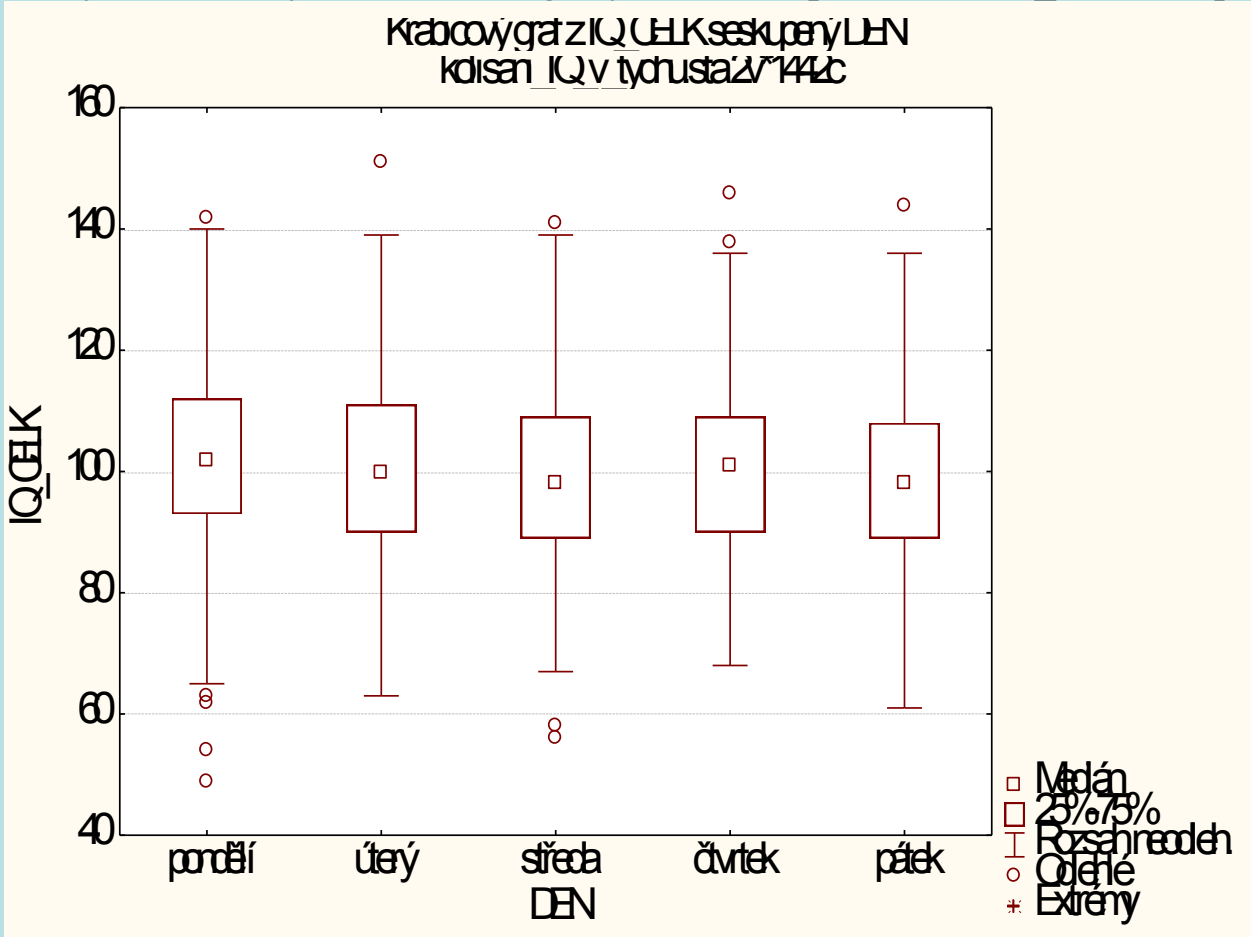
Návrat do ANOVA Výsledky – Rezidua – Před. & rezidua



V grafu není patrný žádný trend.

Na závěr znázorníme data pomocí krabicových diagramů.

Grafy – 2D Grafy – Krabicové grafy – Závisle proměnné IQ\_celk, Grupovací prom. DEN – OK – OK.



## Analýza rozptylu dvojného třídění

Zkoumáme vliv dvou faktorů A a B na závisle proměnnou veličinu X.

Např. zjišťujeme, zda výnosy určité plodiny (náhodná veličina X) jsou ovlivněny typem půdy (faktor A) a způsobem hnojení (faktor B). Předpokládáme, že faktor A má a úrovně (tj. počet typů půdy) a faktor B má b úrovně (tj. počet způsobů hnojení). Přitom máme  $n_{ij}$  pokusů takových, že na i-tém typu půdy byl použit j-tý způsob hnojení. Výsledky (tzn. výnosy dané plodiny) těchto  $n_{ij}$  pokusů označíme  $X_{ij1}, X_{ij2}, \dots, X_{ijn_j}$ .

Omezíme se na případy, kdy počet pozorování  $n_{ij} = c \geq 1$  (jde o tzv. **vyvážené třídění**).

Výsledky lze zapsat do tabulky:

		faktor B			
		1	2	...	b
faktor A	1	$X_{111}, \dots, X_{11c}$	$X_{121}, \dots, X_{12c}$	...	$X_{1b1}, \dots, X_{1bc}$
	2	$X_{211}, \dots, X_{21c}$	$X_{221}, \dots, X_{22c}$	...	$X_{2b1}, \dots, X_{2bc}$
	⋮	⋮	⋮	...	⋮
	a	$X_{a11}, \dots, X_{a1c}$	$X_{a21}, \dots, X_{a2c}$	...	$X_{ab1}, \dots, X_{abc}$

Analogicky jako u analýzy rozptylu jednoduchého třídění předpokládáme, že data se řídí normálním rozložením, tj.

$$X_{ij1}, X_{ij2}, \dots, X_{ijc} \sim N(\mu_{ij}, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, a, \quad j = 1, \dots, b$$

a jednotlivé náhodné výběry jsou stochasticky nezávislé, tedy

$$X_{ijk} = \mu_{ij} + \varepsilon_{ijk},$$

kde  $\varepsilon_{ijk}$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením  $N(0, \sigma^2)$ .

Zajímá nás, zda všechny střední hodnoty jsou stejné.

Přístup k problému se liší podle toho, zda faktory A, B jsou nezávislé (pak se jedná o **analýzu rozptylu dvojného třídění bez interakcí**) nebo se mohou nějakým způsobem ovlivňovat (jde o **analýzu rozptylu dvojného třídění s interakcemi**).

**Označení**

$$n = \dots, c$$

$$X_{ij} = \dots$$

$$M_{ij} = \dots X_{ij},$$

$$X_{i..} = \dots$$

$$M_{i..} = \dots X_{i..},$$

$$X_{...} = \dots$$

$$M_{...} = \dots X_{...}$$

Analogické označení zavedeme i pro jiné kombinace indexů.

### Dvojné třídění bez interakcí

Předpokládáme, že řádkový faktor A a sloupcový faktor B se neovlivňují (např. to znamená, že každý ze čtyř způsobů hnojení působí stejně na každém ze tří druhů půdy).

Náhodné veličiny  $X_{ijk}$  se řídí modelem

$$M0: X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk} \text{ pro } i = 1, \dots, a, j = 1, \dots, b, k = 1, \dots, c, \text{ přičemž}$$

$\varepsilon_{ijk}$  jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny s rozložením  $N(0, \sigma^2)$ ,

$\mu$  je společná část střední hodnoty závisle proměnné veličiny,

$\alpha_i$  je efekt faktoru A na úrovni  $i$ ,

$\beta_j$  je efekt faktoru B na úrovni  $j$ .

Parametry  $\mu, \alpha_i, \beta_j$  neznáme. Požadujeme, aby platily tzv. **reparametrizační rovnice**:

$$\sum_{i=1}^a \alpha_i = 0, \quad \sum_{j=1}^b \beta_j = 0.$$

Podobně jako v analýze rozptylu jednoduchého třídění se počítají součty čtverců.

$$S_T = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c X_{ijk} - M_{...}^2 \dots \text{celkový součet čtverců,}$$

počet stupňů volnosti  $f_T = n - 1$ ,

$$S_A = b \sum_{i=1}^a M_{i..} - M_{...}^2 \dots \text{součet čtverců pro řádkový faktor A,}$$

počet stupňů volnosti  $f_A = a - 1$ ,

$$S_B = a \sum_{j=1}^b M_{.j.} - M_{...}^2 \dots \text{součet čtverců pro sloupcový faktor B,}$$

počet stupňů volnosti  $f_B = b - 1$ ,

$$S_E = \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c X_{ijk} - M_{ij.}^2 \dots \text{reziduální součet čtverců,}$$

počet stupňů volnosti  $f_E = n - a - b + 1$ .

Lze dokázat, že  $S_T = S_A + S_B + S_E$ .

Celkový průměr  $M_{...}$  je bodovým odhadem střední hodnoty  $\mu$ , sčítanci  $M_{i..}$  a  $M_{.j.}$  představují bodové odhady efektů  $\alpha_i$  a  $\beta_j$ .

Odhad  $X_{ijk}$  pozorování  $X_{ijk}$  má tedy tvar:

$$X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \epsilon_{ijk}$$

Pokud by nezáleželo na sloupcovém faktoru B, platila by hypotéza  $\beta_1 = \dots = \beta_b = 0$  a dostali bychom model

$$M1: X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$$

Platnost uvedené hypotézy ověřujeme pomocí testové statistiky

$$F_B = \frac{S_B / f_B}{S_E / f_E}, \text{ která se řídí rozložením } F(b-1, n-a-b+1), \text{ je-li model M1 správný.}$$

Hypotézu o nevýznamnosti sloupcového faktoru tedy zamítneme na hladině významnosti  $\alpha$ , když platí:

$$F_B \geq F_{1-\alpha}(b-1, n-a-b+1).$$

Kdyby nezáleželo ani na řádkovém faktoru, platila by hypotéza  $\alpha_1 = \dots = \alpha_a = 0$  a dostali bychom model

$$M2: X_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk}$$

Rozdíl mezi modely M1 a M2 ověřujeme pomocí testové statistiky

$$F_A = \frac{S_A / f_A}{S_E / f_E}, \text{ která se řídí rozložením } F(a-1, n-a-b+1), \text{ je-li model M2 správný. Hypotézu o nevýznamnosti řádkového faktoru}$$

tedy zamítneme na hladině významnosti  $\alpha$ , když platí:

$$F_A \geq F_{1-\alpha}(a-1, n-a-b+1).$$

Při uvedeném postupu tedy zjišťujeme, zda záleží na sloupcovém efektu B. Pokud ne, platí model M1 a ptáme se, zda záleží na řádkovém efektu A, tj. zda platí model M2.

Postup lze samozřejmě provést i v jiném pořadí – nejdřív zkoumáme řádkový efekt A (tj. ověřujeme platnost modelu M1':

$$X_{ijk} = \mu + \beta_j + \varepsilon_{ijk}) \text{ a poté sloupcový efekt B. Lze ukázat, že oba řetězce } M0 \rightarrow M1 \rightarrow M2 \text{ a } M0 \rightarrow M1' \rightarrow M2' \text{ dají stejné}$$

výsledky. (To platí pouze za předpokladu, že  $n_{ij} = c$  pro všechna  $i, j$ .)

Výsledky výpočtů zapisujeme do **tabulky analýzy rozptylu dvojného třídění bez interakcí**.

Zdroj variability	součet čtverců	st. vol.	podíl S/f	$F = \frac{S/f}{f_E}$
řádkový efekt A	$S_A$	$f_A = a-1$	$S_A/f_A$	$F_A = \frac{S_A/f_A}{f_E}$
sloupcový efekt B	$S_B$	$f_B = b-1$	$S_B/f_B$	$F_B = \frac{S_B/f_B}{f_E}$
reziduální	$S_E$	$f_E = n-a-b+1$	$S_E/f_E$	-
celkem	$S_T$	$f_T = n-1$	-	-



## Scheffého a Tukeyova metoda mnohonásobného porovnávání

Zjistíme-li, že existují významné rozdíly mezi řádky, můžeme pomocí Scheffého nebo Tukeyovy metody zjistit, které dvojice řádků se významně liší. Určíme tedy, které rozdíly  $\alpha_i - \alpha_t$  jsou nenulové (na dané hladině významnosti).

Podle **Scheffého metody** zamítneme rovnost  $\alpha_i = \alpha_t$ , když

$$|M_{i-t}| > \sqrt{2} \frac{S_E}{\sqrt{a}} \sqrt{1 - \frac{1}{a}}$$

a podle **Tukeyovy metody**, když

$$|M_{i-t}| > \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{S_E}{\sqrt{a}} q_{1-\alpha}(a, n-a-b+1), \text{ kde } q_{1-\alpha}(a, n-a-b+1) \text{ najdeme v tabulkách kvantilů studentizovaného rozptylu.}$$

Jestliže zjistíme významný rozdíl mezi sloupci, určíme podobně, které dvojice sloupců se mezi sebou liší, tj. které rozdíly  $\beta_j - \beta_t$  jsou nenulové.

Podle **Scheffého metody** zamítneme rovnost  $\beta_j = \beta_t$ , když

$$|M_{j-t}| > \sqrt{2} \frac{S_E}{\sqrt{b}} \sqrt{1 - \frac{1}{b}}$$

a podle **Tukeyovy metody**, když

$$|M_{j-t}| > \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{S_E}{\sqrt{b}} q_{1-\alpha}(b, n-a-b+1).$$

### Příklad:

Byl zaznamenán prodej určitého zboží (v kusech) během tří stejně dlouhých časových období. Přitom byl sledován jednak vliv balení zboží (řádkový faktor A, úroveň 1 – balení v sáčku, úroveň 2 – balení v krabičce) a jednak vliv druhu reklamy (sloupcový faktor B, úroveň 1 – bez reklamy, úroveň 2 – reklama v novinách, úroveň 3 – reklama v TV a novinách). Výsledky prodeje jsou zaznamenány v tabulce:

		B		
		1	2	3
A	1	1	1	6
	2	3	4	9

Na hladině významnosti 0,05 je třeba posoudit vliv reklamy a i vliv balení zboží na jeho prodej.

### Řešení:

Data zpracujeme pomocí analýzy rozptylu dvojnásobného třídění bez interakcí. Přitom  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 1$ ,  $n = 6$ . Nejprve provedeme pomocné výpočty:

$X_{1..} = 8$ ,  $X_{2..} = 16$ ,  $M_{1..} = 8/3$ ,  $M_{2..} = 16/3$ ,  $X_{...} = 24$ ,  $M_{...} = 24/6 = 4$ ,  $X_{.1.} = 4$ ,  $X_{.2.} = 5$ ,  $X_{.3.} = 15$ ,  $M_{.1.} = 4/2 = 2$ ,  $M_{.2.} = 5/2$ ,  $M_{.3.} = 15/2$

$$S_A = \left[ \frac{8^2}{3} + \frac{16^2}{3} - \frac{24^2}{6} \right] : 3 = 6,$$

$$S_B = \left[ \frac{4^2}{2} + \frac{5^2}{2} + \frac{15^2}{2} - \frac{24^2}{6} \right] : 3 = 15,$$

$$S_E = \left[ \frac{1^2}{1} + \frac{1^2}{1} + \frac{6^2}{1} + \frac{3^2}{1} + \frac{4^2}{1} + \frac{9^2}{1} - \frac{24^2}{6} \right] : 3 = 3.$$

Výsledky zapíšeme do tabulky analýzy rozptylu dvojného třídění bez interakcí.

Zdroj variability	součet čtverců	st. vol.	podíl S/f	$F = \frac{S/f}{f_E}$
způsob balení	106	1	106	63,99
druh reklamy	37	2	18,5	110,98
reziduální	03	2	016	-
celkem	48	5	-	-

Odpovídající kvantily:

pro řádkový efekt  $F_{0,95}(1,2) = 18,1$ ,

pro sloupcový efekt  $F_{0,95}(2,2) = 19$ .

Protože  $F_A = 63,99 \geq 18,1$ , zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že způsob balení nemá vliv na prodej zboží.

Podobně  $F_B = 110,98 \geq 19$ , tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že druh reklamy nemá vliv na prodej zboží. V tomto druhém případě lze pomocí Scheffého nebo Tukeyovy metody zjistit, které druhy reklamy se od sebe liší na hladině významnosti 0,05.

Nejprve vypočítáme absolutní hodnoty rozdílů sloupcových průměrů:

$$|M_{11} - M_{12}| = 5, \quad |M_{11} - M_{13}| = 15, \quad |M_{21} - M_{23}| = 5, \quad |M_{22} - M_{23}| = 15$$

Pravá strana Scheffého vzorce je  $\sqrt{2 \cdot 016 \cdot 9} = 54$ .

Vidíme, že podle Scheffého metody se na hladině významnosti 0,05 liší sloupce 1, 3 (tj. bez reklamy a s reklamou v TV a novinách) a sloupce 2, 3 (tj. s reklamou jen v novinách a reklamou v TV a novinách).

Pravá strana Tukeyova vzorce je  $\sqrt{\frac{016}{2} \cdot 19} = 32$  a  $\sqrt{\frac{016}{2} \cdot 33} = 4$ .

Podle Tukeyovy metody se na hladině významnosti 0,05 také liší sloupce 1, 3 a sloupce 2, 3. Výhodnější je hodnota získaná Tukeyovou metodou, protože je menší.

## Výpočet pomocí systému STATISTICA:

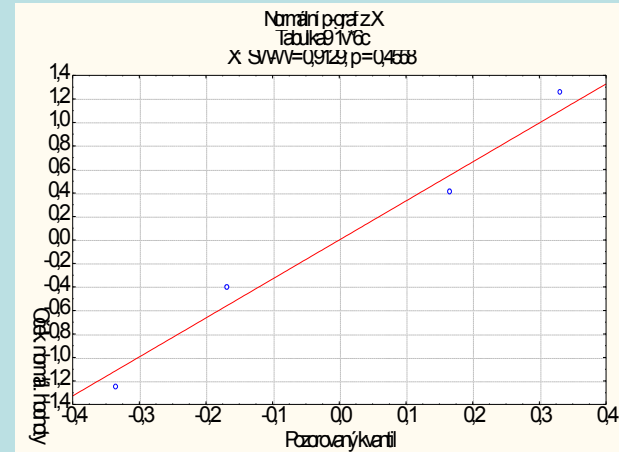
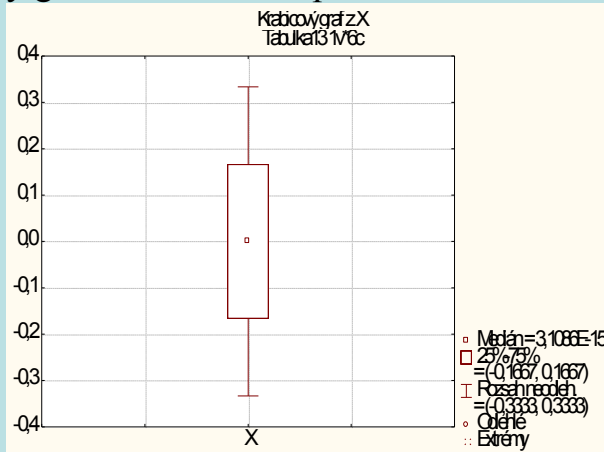
Načteme datový soubor baleni\_a\_reklama.sta o třech proměnných X, A, B a 6 případech, kde X – prodej, A – typ balení (1 – sáček, 2 – krabička), B – druh reklamy (1 – bez reklamy, 2 – reklama v novinách, 3 – reklama v TV a novinách).

Statistiky – ANOVA – ANOVA hlavních efektů – Rychlé nastavení – OK – Závisle proměnná X, Kategor. nezáv. prom. A, B – OK – Možnosti – Parametrizace – odškrtneme Sigma-omezená, zaškrtneme Bez abs. členu – OK. Dostaneme tabulku analýzy rozptylu dvojného třídění bez interakcí.

Efek	SC	Stupí volnc	PC	F	p
A	10,66	1	10,66	64,00	0,015
B	37,00	2	18,50	111,0	0,008
Chyt	0,333	2	0,166		

Vidíme, že p-hodnota pro testovou statistiku  $F_A$  je 0,015268, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že typ balení nemá vliv na prodej zboží. Podobně p-hodnota pro testovou statistiku  $F_B$  je 0,008929, což znamená, že na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že druh reklamy nemá vliv na prodej zboží.

Podívejme se ještě na rezidua: Návrat do ANOVA Výsledky – Předpovědi a rezidua – Rezidua 1 – Předpovědi a rezidua. Vykreslíme krabicový graf reziduí a N-P plot reziduí.



Nejsou patrné žádné zvláštnosti.

Abychom zjistili, které dvojice druhů reklamy se liší na hladině významnosti 0,05, použijeme Scheffého (resp. Tukeyovu) metodu mnohonásobného porovnávání.

Návrat do ANOVA Výsledky – Více výsledků – Post-hoc – Efekt B –Tukeyův HSD.

Tukeyův HSD test; proměnná X (b)				
Přibližné pravděpodobnosti pro post-hoc				
Chyba: meziskup. PC = ,16667, sv				
Č. buň	B	{1}	{2}	{3}
		2,000	2,500	7,500
1	bez rekl		0,548	0,010
2	reklama v n	0,548		0,012
3	reklama v I V a	0,010	0,012	

Vidíme, že na hladině významnosti 0,05 se liší dvojice (1,3) a (2,3).

## Dvojné třídění s interakcemi

Nyní předpokládáme, že faktory A a B se mohou ovlivňovat (např. některý způsob hnojení má zcela specifický vliv na určitý typ půdy). Náhodné veličiny  $X_{ijk}$  se řídí modelem

M0:  $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij} + \varepsilon_{ijk}$  pro  $i = 1, \dots, a, j = 1, \dots, b, k = 1, \dots, c$ , přičemž

$\gamma_{ij}$  je **interakce** mezi faktorem A na úrovni  $i$  a faktorem B na úrovni  $j$ . V této situaci předpokládáme, že  $c \geq 2$ . Parametry  $\mu, \alpha_i, \beta_j$  neznáme. Požadujeme, aby platily tzv. reparametrizační rovnice:

$$\sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \varepsilon_{ijk} = 0, \quad \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \alpha_i \varepsilon_{ijk} = 0, \quad \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \beta_j \varepsilon_{ijk} = 0, \quad \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b \sum_{k=1}^c \gamma_{ij} \varepsilon_{ijk} = 0.$$

Nyní můžeme vytvořit modely

M1:  $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \varepsilon_{ijk}$

M2:  $X_{ijk} = \mu + \alpha_i + \varepsilon_{ijk}$

M3:  $X_{ijk} = \mu + \varepsilon_{ijk}$

(Lze samozřejmě použít i jiný řetězec modelů, kdy postupně klademe rovny nule parametry  $\alpha_i, \beta_j, \gamma_{ij}$  v jiném pořadí.)

Vypočítáme součty čtverců  $S_T, S_A, S_B, S_{AB}, S_E$ , přičemž

$S_{AB} = c \sum_{i=1}^a \sum_{j=1}^b (M_{ij} - M_{i.} - M_{.j} - M_{..})^2$  je **součet čtverců pro interakce**,

počet stupňů volnosti  $f_{AB} = (a-1)(b-1)$ .

Vliv interakcí je prokázán na hladině významnosti  $\alpha$ , když

$$F_{AE} = \frac{S_{AB}/f_{AB}}{S_E/f_E} \geq F_{\alpha}(f_{AB}, f_E).$$

Výsledky zapisujeme do **tabulky analýzy rozptylu dvojného třídění s interakcemi**:

Zdroj variability	součet čtverců	st. vol.	podíl S/f	$F = \frac{S/f}{f_E}$
řádkový faktor A	$S_A$	$f_A = a-1$	$S_A/f_A$	$F_A = \frac{S_A/f_A}{f_E}$
sloupcový faktor B	$S_B$	$f_B = b-1$	$S_B/f_B$	$F_B = \frac{S_B/f_B}{f_E}$
interakce A,B	$S_{AB}$	$f_{AB} = (a-1)(b-1)$	$S_{AB}/f_{AB}$	$F_{AE} = \frac{S_{AB}/f_{AB}}{f_E}$
reziduální	$S_E$	$f_E = n-ab$	$S_E/f_E$	-
celkem	$S_T$	$f_T = n-1$	-	-

Je třeba si povšimnout, že součet  $S_{AB} + S_E$  resp.  $f_{AB} + f_E$  dá hodnotu  $S_E$  resp.  $f_E$  v tabulce bez interakcí.

### Možné problémy v analýze rozptylu dvojného třídění s interakcemi

- Ukáže-li se vliv interakcí nevýznamný, vzniká otázka, zda testovat vliv řádků resp. sloupců pomocí tabulky s interakcemi nebo provést novou analýzu rozptylu, ale tentokrát bez interakcí. Převládá názor, že je zapotřebí dokončit analýzu rozptylu s interakcemi.
- Pokud interakce vyjdou významné a řádky a sloupce rovněž, zpravidla se nedoporučuje provádět mnohonásobné porovnávání, protože by se mohlo stát, že některá interakce by byla mnohem výraznější než příslušný řádkový resp. sloupcový efekt.
- Nejsou-li interakce významné a řádky resp. sloupce ano, pak lze provést mnohonásobné porovnávání zcela analogicky jako v případě třídění bez interakcí, avšak je jiný počet stupňů volnosti  $f_E$ .

## Tabulka odhadů různých parametrů a rozptylů těchto odhadů

parametr	odhad	rozptyl odhadu
$\mu$	$\bar{M}$	$\sigma^2/n$
$\mu + \alpha_i$	$M_{i..}$	$\sigma^2/bc$
$\mu + \beta_j$	$M_{.j}$	$\sigma^2/ac$
$\mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_{ij}$	$M_{ij}$	$\sigma^2/c$
$\alpha_i$	$M_{i..} - M$	$\sigma^2(a-1)/n$
$\beta_j$	$M_{.j} - M$	$\sigma^2(b-1)/n$
$\gamma_{ij}$	$(M_{ij} - M_{i..}) - (M_{.j} - M)$	$\sigma^2(a-1)(b-1)/n$

Neznámý rozptyl  $\sigma^2$  nahradíme jeho odhadem  $S^2 = \frac{S_e}{n}$ .

### Příklad:

Byly zkoumány výnosy sena (v q/ha) v závislosti na typu půdy (řádkový faktor A, úroveň 1 – normální půda, úroveň 2 – kyselá půda) a na způsobu hnojení (sloupcový faktor B, úroveň 1 – bez hnojení, úroveň 2 – hnojení chlévskou mrvou, úroveň 3 – hnojení vápenatým hnojivem). Každá kombinace faktorů A a B byla realizována čtyřikrát nezávisle na sobě. Výnosy sena jsou uvedeny v tabulce:

		B											
		1		2		3							
A	1	28	32	30	30	37	36	39	36	34	38	37	36
	2	31	27	30	29	34	34	30	38	42	40	41	39

Na hladině významnosti 0,05 máme posoudit vliv typu půdy a způsobu hnojení (včetně případných interakcí) na výnosy sena.



### Řešení:

Data zpracujeme pomocí analýzy rozptylu dvojného třídění s interakcemi. Přitom  $a = 2$ ,  $b = 3$ ,  $c = 4$ ,  $n = abc = 24$ . Nebudeme provádět pomocné výpočty, ale rovnou uvedeme tabulku výsledků.

Zdroj variability	součet čtverců	st. vol.	podíl S/f	$F = \frac{Sf}{f_E}$
typ půdy	0,166	1	0,166	0,04
způsob hnojení	318,25	2	159,125	41,81
interakce	55,084	2	27,542	7,24
reziduální	68,5	18	3,8056	-
celkem	442	23	-	-

Odpovídající kvantily:

pro řádkový efekt  $F_{0,95}(1,18) = 4,41$ , pro sloupcový efekt  $F_{0,95}(2,18) = 3,55$ , pro interakce  $F_{0,95}(1,18) = 4,41$ .

Protože  $F_A = 0,04 < 4,41$ , nezamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že typ půdy neovlivňuje výnos sena.

Dále  $F_B = 41,81 \geq 3,55$ , tedy na hladině významnosti 0,05 se prokázal rozdíl mezi použitými způsoby hnojení.

Jelikož  $F_{AB} = 7,24 \geq 4,41$ , zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu o nevýznamnosti interakcí (tj. aspoň jeden způsob hnojení působí jinak na půdu normální než kyselou).

## Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Načteme datový soubor seno.sta se třemi proměnnými A, B, X a 24 případy, kde X – výnos sena, A – typ půdy, B – způsob hnojení. Jednotlivé varianty proměnných A a B mají tento význam: u proměnné A je 1 – normální půda, 2 – kyselá půda, u proměnné B je 1 – bez hnojení, 2 – chlévská mrva, 3 – vápenaté hnojivo.

Nejprve spočítáme průměry ve všech 6 skupinách:

Statistiky – ANOVA – Typ analýzy Vícefaktorová ANOVA. Metoda specifikace: Rychlé nastavení – OK, Proměnné – Seznam závislých proměnných X, Kategor. nezáv. prom. (faktory) A, B – OK – Možnosti – Parametrizace – zaškrtneme Bez absolutního členu – OK – Průměry – Pozorované, nevážené.

A*B: Nevážené průměry (seno.sta)							
Současný efekt: $F(2, 18)=7,2372$ , $p=,00494$							
Dekompozice typu III							
Č. buň	A	B	X	X	X	X	N
			Prům.	Sm.Cl	-95,00	+95,00	
1	norm.	bez hno	30,00	0,975	27,95	32,04	4
2	norm.	chlévska	37,00	0,975	34,95	39,04	4
3	norm.	vápenaté	36,25	0,975	34,20	38,29	4
4	kyse	bez hno	29,25	0,975	27,20	31,29	4
5	kyse	chlévska	34,00	0,975	31,95	36,04	4
6	kyse	vápenaté	40,50	0,975	38,45	42,54	4

Nyní provedeme testování hypotéz o vlivu faktorů:

Statistiky – ANOVA – Typ analýzy Vícefaktorová ANOVA. Metoda specifikace: Rychlé nastavení – OK, Proměnné – Seznam závislých proměnných X, Kategor. nezáv. prom. (faktory) A, B – OK – Možnosti – Parametrizace – zaškrtneme Bez absolutního členu – OK – Všechny efekty.

Dostaneme tabulku analýzy rozptylu dvojného třídění s interakcemi.

Jednorozměrné testy významnosti Preparametrizovaný model Dekompozice typu III					
Efek	SC	Stupně volno	PC	F	p
A	0,16	1	0,16	0,043	0,836
B	318,2	2	159,1	41,81	0,000
A*B	55,08	2	27,54	7,231	0,004
Chyb	68,50	18	3,80		

Vidíme, že p-hodnota pro testovou statistiku  $F_B$  je velmi blízká 0, tedy na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že způsob hnojení nemá vliv na výnosy sena. Podobně p-hodnota pro testovou statistiku  $F_{AB}$  je 0,004938, což znamená, že na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu, že způsob hnojení působí na oba typy půd stejně.

Vzhledem k tomu, že rozsahy výběrů v daných šesti skupinách jsou větší než 1 ( $c = 4$ ), lze ověřit předpoklad o homogenitě rozptylů. Vráťme se do ANOVA Výsledky a zvolíme Více výsledků – Předpoklady – Levenův test.

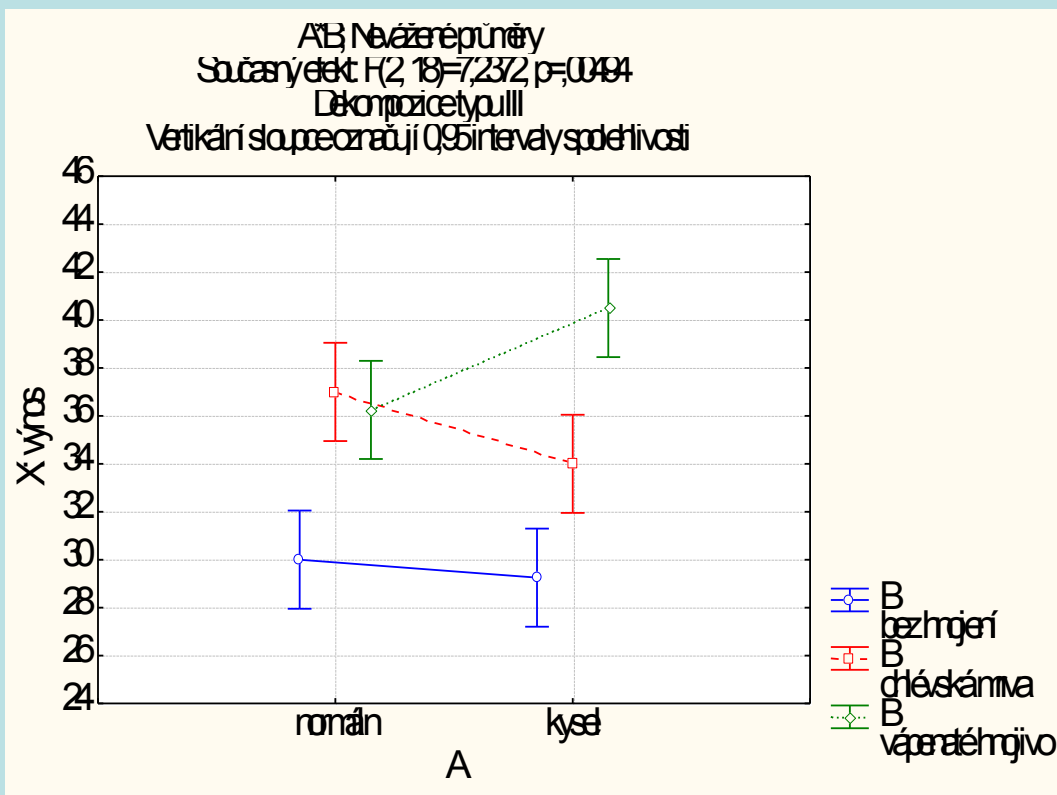
Levenův test homogenity rozptylů				
Efekt: A*B				
Stupně volnosti pro všechny				
	PC	PC	F	p
Efek	Chyb			
X	0,600	1,555	0,385	0,852

Zjistíme, že p-hodnota je 0,852058, tudíž tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o homogenitě rozptylů.

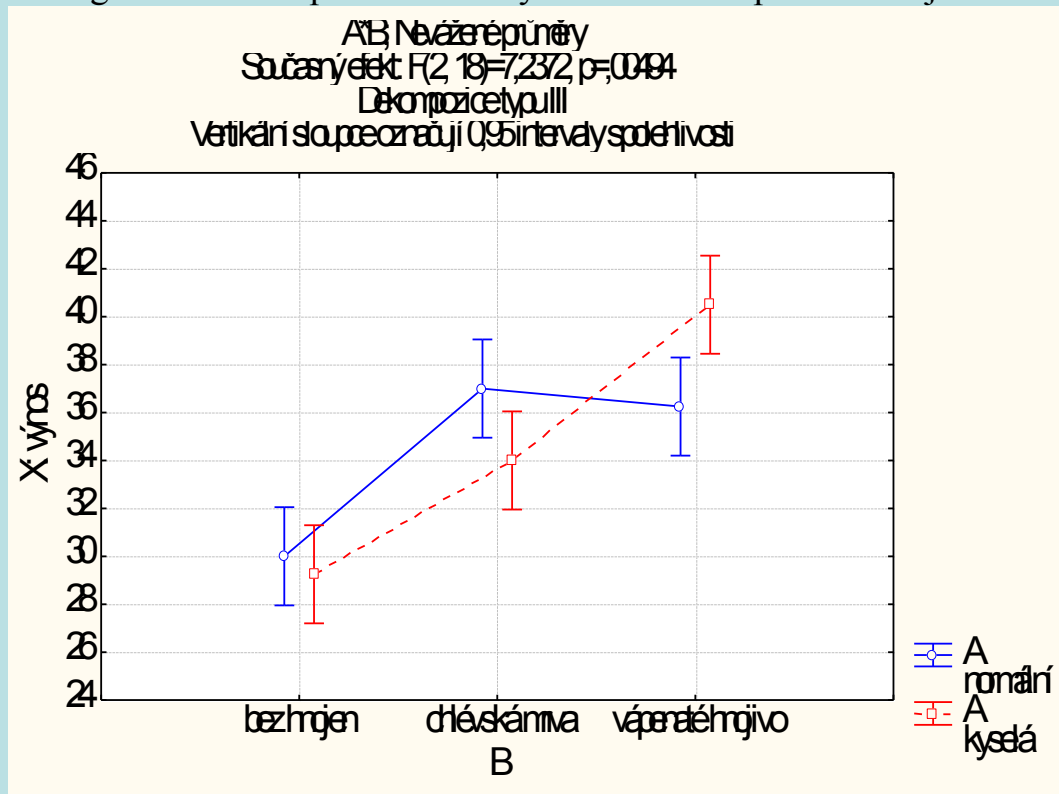
Normalitu všech šesti výběrů můžeme orientačně posoudit rovněž v Předpokladech pomocí N-P plotu.

Ve všech šesti případech lze konstatovat vcelku dobrou shodu s normálním rozložením.

Průměrné výnosy sena (spolu s 95% intervaly spolehlivosti) na normální a kyselé půdě při daných třech způsobech hnojení lze znázornit graficky. V ANOVA Výsledky zvolíme Průměry – Pozorované, nevážené – Graf. Lze vykreslit graf závislosti průměrného výnosu sena na typu půdy:



nebo graf závislosti průměrného výnosu sena na způsobu hnojení:



V grafu se objevuje křížení, které je typické pro případ, kdy působí interakce mezi faktory A, B.

Analýza reziduí neodhalí žádné zvláštnosti.

Nyní pomocí Tukeyovy metody mnohonásobného porovnávání zjistíme, které dvojice výběrů se liší na hladině významnosti 0,05. Vrátime se do Anova: Výsledky – klikneme na Více výsledků – Post hoc – Efekt B - Tukeyův HSD.

Tukeyův HSD test (post hoc)				
Přibližné pravděpodobnosti pro				
Chyba: meziskup. PC = 3,805				
Č. skupin	B	{1}	{2}	{3}
		29,62	35,50	38,37
1	bez hněd.		0,000	0,000
2	chleviská	0,000		0,022
3	vápenatá	0,000	0,022	

Vidíme, že na hladině významnosti 0,05 se liší všechny tři dvojice skupin:

**Upozornění:** Systém STATISTICA umí provádět analýzu rozptylu dvojného třídění i v případě, že třídění není vyvážené. Ukážeme to na následujícím příkladě.

**Příklad:** V rámci psychologického výzkumu bylo vyšetřeno 856 žáků základních škol. Kromě jiného se zjišťoval jejich inteligenční kvocient (proměnná IQ), vzdělání matky a vzdělání otce (proměnná VZDEL\_M, VZDEL\_O, mají varianty Z ... základní, S ... středoškolské, V ... vysokoškolské) a místo trvalého bydliště (proměnná SIDLO, má varianty 1 ... město, 2 ... venkov). Data jsou uložena v souboru IQ\_zaku.sta. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že proměnné VZDEL\_M a SIDLO neovlivňují variabilitu hodnot proměnné IQ. Použijte analýzu rozptylu dvojného třídění s interakcemi.

**Výsledek:** Na hladině významnosti 0,05 zamítáme hypotézu o nevýznamnosti obou faktorů i jejich interakcí.