Korelační analýza (jednoduchá, mnohonásobná a parciální korelace

Jednoduchá korelace - opakování

Pearsonův koeficient korelace

Nechť X, Y jsou náhodné veličiny se středními hodnotami E(X), E(Y) a rozptyly D(X), D(Y).
Číslo

$$R(X,Y) = \begin{cases} E\left\{\left(\frac{X - E(X)}{\sqrt{D(X)}}\right)\cdot\left(\frac{Y - E(Y)}{\sqrt{D(Y)}}\right)\right\} = \frac{C(X,Y)}{\sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)}} & \text{pro } \sqrt{D(X)}\sqrt{D(Y)} > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

se nazývá Pearsonův koeficient korelace.

Vlastnosti Pearsonova koeficientu korelace

a) $R(a_1, Y) = R(X, a_2) = R(a_1, a_2) = 0$

b) $R(a_1 + b_1X, a_2 + b_2Y) = \text{sgn}(b_1b_2)\, R(X, Y) = \begin{cases} R(X,Y) & \text{pro } b_1b_2 > 0 \\ -R(X,Y) & \text{pro } b_1b_2 < 0 \end{cases}$

c) $R(X, X) = 1$ pro $D(X) \neq 0$, $R(X, X) = 0$ jinak

d) $R(X, Y) = R(Y, X)$

e) $|R(X,Y)| \leq 1$ a rovnost nastane tehdy a jen tehdy, když mezi veličinami X, Y existuje s pravděpodobností 1 úplná lineární závislost, tj. existují konstanty a, b tak, že pravděpodobnost $P(Y = a + bX) = 1$. Přitom $R(X, Y) = 1$, když $b > 0$ a $R(X, Y) = -1$, když $b < 0$. (Uvedená nerovnost se nazývá Cauchyova – Schwarzova – Buňakovského nerovnost.)

Z vlastností Pearsonova koeficientu korelace vyplývá, že se hodí pouze k měření těsnosti lineárního vztahu veličin X a Y. Při složitějších závislostech může dojít k paradoxní situaci, že Pearsonův koeficient korelace je nulový.

Definice nekorelovanosti

Je-li $R(X, Y) = 0$, pak řekneme, že náhodné veličiny jsou nekorelované. (Znamená to, že mezi X a Y neexistuje žádná lineární závislost. Jsou-li náhodné veličiny X,Y stochasticky nezávislé, pak jsou samozřejmě i nekorelované.)
Je-li $R(X, Y) > 0$, pak řekneme, že náhodné veličiny jsou kladně korelované. (Znamená to, že s růstem hodnot veličiny X rostou hodnoty veličiny Y a s poklesem hodnot veličiny X klesají hodnoty veličiny Y.)
Je-li $R(X, Y) < 0$, pak řekneme, že náhodné veličiny jsou záporně korelované. (Znamená to, že s růstem hodnot veličiny X klesají hodnoty veličiny Y a s poklesem hodnot veličiny X rostou hodnoty veličiny Y.)

Výběrový koeficient korelace

Nechť $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ náhodný výběr rozsahu n z dvourozměrného rozložení daného distribuční funkcí $\Phi(x,y)$.
Z tohoto dvourozměrného náhodného výběru můžeme stanovit:

výběrové průměry $M_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$, $M_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$,

výběrové rozptyly $S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - M_1)^2$, $S_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (Y_i - M_2)^2$,

výběrovou kovarianci $S_{12} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (X_i - M_1)(Y_i - M_2)$ a s jejich pomocí zavedeme

výběrový koeficient korelace $R_{12} = \begin{cases} \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \frac{X - M_1}{S_1} \cdot \frac{Y - M_2}{S_2} = \frac{S_{12}}{S_1 S_2} & \text{pro } S_1 S_2 > 0 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$.

Vlastnosti Pearsonova koeficientu korelace se přenášejí i na výběrový koeficient korelace. (Výběrový koeficient korelace není nestranným odhadem skutečného koeficientu korelace, je odhadem vychýleným. Vychýlení je zanedbatekně malé pro rozsahy výběrů nad 30.)

Pearsonův koeficient korelace dvourozměrného normálního rozložení

Nechť náhodný vektor (X, Y) má dvourozměrné normální rozložení s hustotou

$$\varphi(x,y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{1}{2(1-\rho^2)}\left[\left(\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\right)^2 - 2\rho\frac{x-\mu_1}{\sigma_1}\frac{y-\mu_2}{\sigma_2} + \left(\frac{y-\mu_2}{\sigma_2}\right)^2\right]},$$

přičemž $\mu_1 = E(X)$, $\mu_2 = E(Y)$, $\sigma_1^2 = D(X)$, $\sigma_2^2 = D(Y)$, $\rho = R(X,Y)$.

Marginální hustoty jsou:

$$\varphi_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)\,dy = \ldots = \frac{1}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_1)^2}{2\sigma_1^2}},$$

$$\varphi_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x,y)\,dx = \ldots = \frac{1}{\sigma_2\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(y-\mu_2)^2}{2\sigma_2^2}}.$$

Je-li $\rho = 0$, pak pro $\forall [x,y] \in \mathbb{R}^2 : \varphi(x,y) = \varphi_1(x)\varphi_2(y)$, tedy náhodné veličiny X, Y jsou stochasticky nezávislé. Jinými slovy: stochastická nezávislost složek X, Y normálně rozloženého náhodného vektoru je ekvivalentní jejich nekorelovanosti. Pro jiná dvourozměrná rozložení to neplatí!

Upozornění: nadále budeme předpokládat, že (X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n) je náhodný výběr rozsahu n z dvourozměrného normálního rozložení $N_2\left(\begin{pmatrix}\mu_1\\ \mu_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2\\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2\end{pmatrix}\right)$.

Předpoklad dvourozměrné normality lze orientačně ověřit pomocí dvourozměrného tečkového diagramu: tečky by měly zhruba rovnoměrně vyplnit vnitřek elipsovitého obrazce. Vrstevnice hustoty dvourozměrného normálního rozložení jsou totiž elipsy.

Do dvourozměrného tečkového diagramu můžeme ještě zakreslit 100(1-α)% elipsu konstantní hustoty pravděpodobnosti. Bude-li více než 100α% teček ležet vně této elipsy, svědčí to o porušení dvourozměrné normality. Bude-li mít hlavní osa elipsy kladnou resp. zápornou směrnici, znamená to, že mezi veličinami X a Y existuje určitý stupeň přímé resp. nepřímé lineární závislosti.

Testování hypotézy o nezávislosti

Na hladině významnosti α testujeme H_0: X, Y jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny (tj. $\rho = 0$) proti

- oboustranné alternativě H_1: X, Y nejsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny (tj. $\rho \neq 0$)
- levostranné alternativě H_1: X, Y jsou záporně korelované náhodné veličiny (tj. $\rho < 0$)
- pravostranné alternativě H_1: X, Y jsou kladně korelované náhodné veličiny (tj. $\rho > 0$).

Testová statistika má tvar: $T_0 = \frac{R_{12}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-R_{12}^2}}$.

Platí-li nulová hypotéza, pak $T_0 \sim t(n-2)$.

Kritický obor pro test H_0 proti

- oboustranné alternativě: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha/2}(n-2)) \cup (t_{1-\alpha/2}(n-2), \infty)$,
- levostranné alternativě: $W = (-\infty, -t_{1-\alpha}(n-2))$,
- pravostranné alternativě: $W = (t_{1-\alpha}(n-2), \infty)$.

H_0 zamítáme na hladině významnosti α, když $t_0 \in W$.

Příklad: Testování hypotézy o nezávislosti

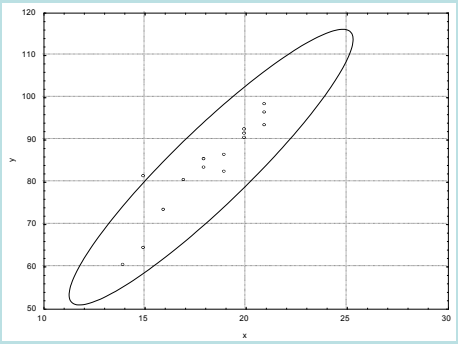
V dílně pracuje 15 dělníků. Byl u nich zjištěn počet směn odpracovaných za měsíc (náhodná veličina X) a počet zhotovených výrobků (náhodná veličina Y):

X 20 21 18 17 20 18 19 21 20 14 16 19 21 15 15

Y 92 93 83 80 91 85 82 98 90 60 73 86 96 64 81.

Orientačně ověřte dvourozměrnou normalitu dat, vypočtěte výběrový koeficient korelace mezi X a Y a na hladině 0,01 testujte hypotézu o nezávislosti X a Y.

Řešení: Dvourozměrnou normalitu dat ověříme pomocí dvourozměrného tečkového diagramu.



Vidíme, že předpoklad dvourozměrné normality je oprávněný.

Vypočteme realizace

výběrových průměrů: $m_1 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i = 18{,}267$, $m_2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i = 83{,}6$,

výběrových rozptylů: $s_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_1)^2 = 5{,}6381$, $s_2^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (y_i - m_2)^2 = 121{,}4$,

výběrové kovariance: $s_{12} = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (x_i - m_1)(y_i - m_2) = 24{,}2571$,

výběrového koeficientu korelace: $r_{12} = \frac{s_{12}}{s_1 s_2} = 0{,}927$.

Realizace testové statistiky: $t_0 = \frac{r_{12}\sqrt{n-2}}{\sqrt{1-r_{12}^2}} = 8{,}912,$

kritický obor $W = (-\infty, -t_{0{,}995}(13)) \cup (t_{0{,}995}(13), \infty) = (-\infty, -3{,}012) \cup (3{,}012, \infty)$.

Protože $t_0 \in W$, hypotézu o nezávislosti veličin X a Y zamítáme na hladině významnosti 0,01. S rizikem omylu nejvýše 1% jsme tedy prokázali, že mezi počtem směn odpracovaných za měsíc a počtem zhotovených výrobků existuje závislost.

Výpočet pomocí systému STATISTICA

Vytvoříme datový soubor o dvou proměnných X, Y a 15 případech. Dvourozměrnou normalitu dat ověříme pomocí dvourozměrného tečkového diagramu – viz výše.
Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Korelační matice – OK – 1 seznam proměn. – X, Y – OK – na záložce Možnosti vybereme Zobrazit detailní tabulku výsledků – Výpočet.

	Korelace (smeny a vyrobky.sta) Označ. korelace jsou významné na hlad. p < ,05000 (Celé případy vynechány u ChD)										
Prom. X & prom. Y	Průměr	Sm.Odch.	r(X,Y)	r2	t	p	N	Konst. záv.: Y	Směr. záv: Y	Konst. záv.: X	Směrnic záv.: X
X	18,26667	2,37447									
X	18,26667	2,37447	1,000000	1,000000			15	0,000000	1,000000	0,000000	1,000000
X	18,26667	2,37447									
Y	83,60000	11,01817	0,927180	0,859663	8,923795	0,000001	15	5,010135	4,302365	1,562407	0,199812
Y	83,60000	11,01817									
X	18,26667	2,37447	0,927180	0,859663	8,923795	0,000001	15	1,562407	0,199812	5,010135	4,302365
Y	83,60000	11,01817									
Y	83,60000	11,01817	1,000000	1,000000			15	0,000000	1,000000	0,000000	1,000000

Výběrový koeficient korelace se realizoval hodnotou 0,92718, testová statistika nabyla hodnoty 8,924, odpovídající p-hodnota je 0,000001, tedy na hladině významnosti 0,01 zamítáme hypotézu o nezávislosti veličin X, Y.

Interval spolehlivosti pro korelační koeficient

Náhodná veličina $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + R_{12}}{1 - R_{12}}$ má přibližně normální rozložení se střední hodnotou

$E(Z) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho} + \frac{\rho}{2(n-1)}$ (2. sčítanec lze při větším n zanedbat)

a rozptylem $D(Z) = \frac{1}{n-3}$.

Standardizací veličiny Z dostaneme veličinu $U = \frac{Z - E(Z)}{\sqrt{D(Z)}}$, která má asymptoticky rozložení N(0,1).

Tudíž 100(1-α)% asymptotický interval spolehlivosti pro $\frac{1}{2} \ln \frac{1+\rho}{1-\rho}$ bude mít meze $Z \pm \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}}$.

Interval spolehlivosti pro ρ pak dostaneme zpětnou transformací.

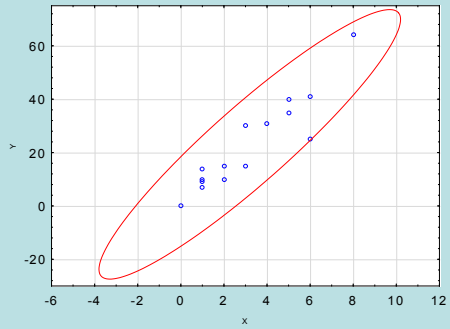
Poznámka: Jelikož Z = arctgh R_{12}, dostáváme R_{12} = tgh Z a meze intervalu spolehlivosti pro ρ můžeme psát ve tvaru $\operatorname{tgh}\left(Z \pm \frac{u_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}} \right)$, přičemž $\operatorname{tgh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

Příklad: Učitel tělocviku zjišťoval, zda existuje vztah mezi počtem shybů (veličina X) a počtem kliků (veličina Y) u 15 náhodně vybraných chlapců:

Číslo chlapce	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Počet shybů	1	3	2	0	5	6	1	4	3	5	6	2	1	1	8
Počet kliků	10	15	15	0	40	25	7	31	30	35	41	10	14	9	64

Za předpokladu, že uvedené údaje tvoří číselné realizace náhodného výběru rozsahu 15 z dvourozměrného normálního rozložení, vypočtěte výběrový korelační koeficient a na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že X a Y jsou nezávislé náhodné veličiny. Sestrojte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro skutečný korelační koeficient ρ.

Řešení: Předpoklad o dvourozměrné normalitě dat ověříme orientačně pomocí dvourozměrného tečkového diagramu.



Vzhled diagramu svědčí o tom, že předpoklad je oprávněný.

Testujeme H_0: $\rho = 0$ proti H_1: $\rho \neq 0$. Vypočítáme $R_{12} = 0{,}9276$, tedy mezi počtem shybů a počtem kliků existuje silná přímá lineární závislost. Testová statistika: $T = 8{,}9511$, kvantil $t_{0{,}975}(13) = 2{,}1604$, kritický obor $W = \langle -\infty, -2{,}1604 \rangle \cup \langle 2{,}1604, \infty \rangle$. Jelikož $T \in W$, zamítáme na hladině významnosti 0,05 hypotézu o nezávislosti veličin X a Y.

Vypočítáme $Z = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + R_{12}}{1 - R_{12}} = \frac{1}{2} \ln \frac{1 + 0{,}9276}{1 - 0{,}9276} = 1{,}6409$. Meze 95% asymptotického intervalu spolehlivosti pro ρ jsou

$\operatorname{tgh}\left(1{,}6409 \pm \frac{1{,}96}{\sqrt{12}}\right)$, tedy $0{,}7914 < \rho < 0{,}9761$ s pravděpodobností přibližně 0,95.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Ve STATISTICE vypočteme meze 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti pro koeficient korelace ρ tak, že otevřeme nový datový soubor se dvěma proměnnými (pojmenujeme je DM a HM) a jedním případem.

Do Dlouhého jména proměnné DM zapíšeme příkaz

= TanH(0,5*log((1+0,9276)/(1-0,9276))-VNormal(0,975;0;1)/sqrt(12))

a do Dlouhého jména proměnné HM zapíšeme příkaz

= TanH(0,5*log((1+0,9276)/(1-0,9276))+VNormal(0,975;0;1)/sqrt(12))

	1 DM	2 HM
1	0,791382	0,976062

95% asymptotický interval spolehlivosti pro koeficient korelace ρ má tedy meze 07914 a 0,9761. (Protože nepokrývá hodnotu 0, zamítáme hypotézu o nezávislosti veličin X, Y na asymptotické hladině významnosti 0,05.) S rizkem nejvýše 5 %jsme tedy prokázali, že mezi počtem shybů a počtem kliků existuje lineární závislost.

Využití modulu „Analýza síly testu“ v systému STATISTICA

Testujeme-li na hladině významnosti α nulovou hypotézu (v našem případě H_0: $\rho = 0$) proti alternativní hypotéze (v našem případě H_1: $\rho \neq 0$), můžeme se dopustit jedné ze dvou chyb: chyba 1. druhu spočívá v tom, že H_0 zamítneme, ač ve skutečnosti platí a chyba 2. druhu spočívá v tom, že H_0 nezamítneme, ač ve skutečnosti neplatí.

Pravděpodobnost chyby 1. druhu se značí α a nazývá se hladina významnosti testu.

Pravděpodobnost chyby 2. druhu se značí β.

Číslo $1 - \beta$ se nazývá síla testu a vyjadřuje pravděpodobnost, s jakou test vypoví, že H_0 neplatí.

Modul „Analýza síly testu“ nám umožní vyřešit tři úkoly:

a) pro daný korelační koeficient ρ a danou hladinu významnosti α stanovit, jaký musí být rozsah výběru n, aby síla testu byla aspoň rovna danému číslu $1 - \beta$

b) pro dané ρ, α, n vypočítat sílu testu $1 - \beta$

c) pro daný výběrový koeficient korelace r a dané α určit meze $100(1- \alpha)\%$ intervalu spolehlivosti pro ρ.

Ad a) Stanovení rozsahu výběru

Předpokládáme, že náhodný výběr $(X_1, Y_1), ..., (X_n, Y_n)$ pochází z dvourozměrného normálního rozložení rozložení s koeficientem korelace $\rho = 0{,}3$. Jak velký musí být rozsah tohoto výběru, aby test H_0: $\rho = 0$ proti H_1: $\rho \neq 0$ měl sílu 0,8, je-li hladina významnosti $\alpha = 0{,}05$?

Statistiky – Analýza síly testu – Výpočet velikosti vzorku – Jedna korelace, t-test – OK – Ró: 0,3, Alfa: 0,05, Požadovaná síla: 0,8 – OK – Vypočítat N.
Zjistíme, že minimální velikost výběru je 29.

Ad b) Výpočet síly testu

Předpokládáme, že náhodný výběr $(X_1, Y_1), ..., (X_{25}, Y_{25})$ pochází z dvourozměrného normálního rozložení s koeficientem korelace ρ, který je neznámý. Výběrový koeficient korelace nabyl hodnoty -0,56. Na hladině významnosti $\alpha = 0{,}05$ testujeme H_0: $\rho = 0$ proti H_1: $\rho \neq 0$. Jaká je síla testu?

Statistiky – Analýza síly testu – Výpočet síly testu - Jedna korelace, t-test – OK – Ró: -0,56, N: 25, Alfa: 0,05 – OK – Výpočetní algoritmus: zaškrtneme t-statistika – Vypočítat sílu.
Zjistíme, že síla testu je 0,5282.

Ad c) Nalezení intervalu spolehlivosti

Předpokládáme, že náhodný výběr $(X_1, Y_1), ..., (X_{25}, Y_{25})$ pochází z dvourozměrného normálního rozložení s koeficientem korelace ρ, který je neznámý. Výběrový koeficient korelace nabyl hodnoty -0,56. Najděte 95% interval spolehlivosti pro ρ.

Statistiky – Analýza síly testu – Odhad intervalu - Jedna korelace, t-test – OK – Pozorované R: -0,56, N: 25, Spolehlivost: 0,95 – Výpočetní algoritmus: zaškrtneme Fisherova Z (původní) – Vypočítat.
Zjistíme, že Dolní mez = -0,7821, Horní mez = -0,2117.

Mnohonásobná a parciální korelace

Varianční, kovarianční a korelační matice

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$ je náhodný vektor. Označme

$\mu_i = E(X_i)$ střední hodnotu náhodné veličiny X_i,

$\sigma_i^2 = D(X_i)$ rozptyl náhodné veličiny X_i,

$\sigma_{ij} = C(X_i, X_j)$ kovarianci náhodných veličin X_i, X_j (přitom $\sigma_{ij} = \sigma_i^2$)

$\rho_{ij} = R(X_i, X_j)$ koeficient korelace náhodných veličin X_i, X_j

Vektor $E(\mathbf{X}) = (\mu_1, \ldots, \mu_p)'$ se nazývá vektor středních hodnot náhodného vektoru **X**.

Čtvercová matice řádu p $var(\mathbf{X}) = (\sigma_{ij})_{i,j=1, \ldots, p}$ se nazývá varianční matice náhodného vektoru **X**.

Čtvercová matice řádu p $cor(\mathbf{X}) = (\rho_{ij})_{i,j=1, \ldots, p}$ se nazývá korelační matice náhodného vektoru **X**.

Je zřejmé, že varianční matice a korelační matice jsou symetrické.

Nechť $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$ a $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_q)'$ jsou náhodné vektory.

Matice typu pxq $cov(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = (C(X_i, Y_j))$ se nazývá kovarianční matice vektorů **X**, **Y**.

Matice typu pxq $cor(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = (\rho(X_i, Y_j))$ se nazývá korelační matice vektorů **X**,**Y**.

Odhady vektoru středních hodnot, varianční a korelační matice jednoho náhodného vektoru X

Nechť **X** je náhodný vektor, který má p-rozměrné rozložení s vektorem středních hodnot **μ**, varianční maticí var(**X**) a korelační maticí cor(**X**). Nechť je dán náhodný výběr $\mathbf{X}_1 = (X_{11}, \ldots, X_{1p})', \ldots, \mathbf{X}_n = (X_{n1}, \ldots, X_{np})'$ rozsahu n z tohoto rozložení.

Nestranný odhad vektoru **μ** je vektor výběrových průměrů $\mathbf{M} = (M_1, \ldots, M_p)'$, kde $M_j = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_{ij}$ je výběrový průměr j-tého výběru, j = 1, …, p.

Nestranný odhad matice var(**X**) je výběrová varianční matice $\mathbf{S} = (S_{ij}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} (\mathbf{X}_i - \mathbf{M})(\mathbf{X}_i - \mathbf{M})'$ řádu p.

Vychýlený odhad matice cor(**X**) je výběrová korelační matice $\mathbf{R} = (R_{ij})$, kde R_{ij} je výběrový korelační koeficient i-té a j-té složky vektoru **X**, tedy

$R_{ij} = \frac{S_{ij}}{\sqrt{S_{ii}}\sqrt{S_{jj}}}$, i, j = 1, …, p. (Je zřejmé, že diagonální prvky matice **R** jsou jedničky a matice **R** je symetrická.)

Příklad: U 28 náhodně vybraných osob byly zjišťovány tyto údaje:

Sex … 1 – muž, 2 – žena (mužů i žen bylo po 14)

výška (v cm), proměnná X_1

hmotnost (v kg), proměnná X_2

boty (číslo bot), proměnná X_3

Vypočtěte realizaci výběrové varianční matice a výběrové korelační matice. (Soubor udaje_o_lidech_1.sta)

Řešení:

Statistiky – Vícenásobná regrese - Proměnné Závislá X_3, nezávislé X_1, X_2 – OK – OK – Residua/předpoklady/předpovědi – Popisné statistiky – Další statistiky – Kovariance resp. Korelace.

Výběrová kovarianční matice

Proměnná	vyska	hmotnost	boty
vyska	112,8611	161,0926	41,45370
hmotnost	161,0926	248,4709	61,99206
boty	41,4537	61,9921	16,40608

Výběrová korelační matice

Proměnná	vyska	hmotnost	boty
vyska	1,000000	0,961979	0,963360
hmotnost	0,961979	1,000000	0,970948
boty	0,963360	0,970948	1,000000

Z výběrové varianční matice plyne, že největší variabilitu má hmotnost, pak výška a nakonec číslo bot. Z výběrové korelační matice plyne, že mezi všemi třemi dvojicemi proměnných existuje velmi silná přímá lineární závislost, nejsilnější je mezi hmotností a velikostí bot.

Test hypotézy o shodě dvou a více variančních matic

Je dáno r ≥ 2 nezávislých náhodných výběrů z p-rozměrných normálních rozložení, jejichž varianční matice jsou $\Sigma_1, \ldots, \Sigma_r$. Rozsahy těchto výběrů jsou $n_1, \ldots, n_r$ a celkový rozsah je n. Na hladině významnosti α testujeme hypotézu H_0: $\Sigma_1 = \ldots = \Sigma_r$ proti alternativě H_1: aspoň jedna dvojice variančních matic se liší.

Označme $\mathbf{S}_1, \ldots, \mathbf{S}_r$ výběrové varianční matice a $\mathbf{S}_*$ vážený průměr výběrových variančních matic.

Uvedenou hypotézu budeme testovat pomocí Boxova testu, který je zobecněním Bartlettova testu.

Testová statistika: $B = \frac{1}{C}\left[(n-r)\ln|\mathbf{S}_*| - \sum_{i=1}^{r} (n_i - 1)\ln|\mathbf{S}_i| \right]$, kde $C = 1 + \frac{2p^2 + 3p - 1}{6(p+1)(r-1)}\left(\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{n_i - 1} - \frac{1}{n-r} \right)$.

Platí-li nulová hypotéza a rozsahy všech výběrů jsou aspoň 6, pak testová statistika $B \approx \chi^2(r-1)$.

Kritický obor: $W = \left\langle \chi^2_{1-\alpha}\left(\frac{(r-1)p(p+1)}{2} \right), \infty \right)$.

Nulovou hypotézu zamítáme na asymptotické hladině významnosti α, když $B \in W$.

(Boxův test je implementován v systému STATISTICA v modulu ANOVA.)

Příklad: Na 45 vzorcích ropy pocházejících ze tří ložisek, byly zjištěny hodnoty těchto proměnných:

X1 … podíl vanadia

X2 … podíl železa

X3 … podíl nasycených uhlovodíků

X4 … podíl aromatických uhlovodíků.

Proměnné X1 a X2 vyjadřují obsah vanadia resp železa v popelu (v promile), proměnné X3 a X4 jsou určené chromatograficky a vyjádřeny v setinách procenta.

Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že varianční matice normálních rozložení, z nichž pocházejí náhodných vektorů $(X_{11}, X_{12}, X_{13}, X_{14})$, $(X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24})$, $(X_{31}, X_{32}, X_{33}, X_{34})$ jsou shodné.

Výpočet pomocí systému STATISTICA

Otevřeme datový soubor ropa.sta

Statistiky – ANOVA – Jednofaktorová ANOVA – OK – Proměnné – Seznam závislých proměnných X1-X4, Kategor. nezáv. Prom. ID – OK – OK – Více výsledků – Předpoklady – Boxův M test.

	Boxovo M	Chí-kv.	SV	p
Boxovo M	35,40891	27,28347	20	0,127476

Protože p-hodnota je rovna 0,1275, nelze na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu o shodě variančních matic.

Odhady kovarianční a korelační matice dvou náhodných vektorů X, Y

Nechť náhodný vektor **X** má p-rozměrné rozložení a nechť $\mathbf{X}_1, \ldots, \mathbf{X}_n$ je náhodný výběr z tohoto rozložení. Nechť náhodný vektor **Y** má q-rozměrné rozložení a nechť $\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n$ je náhodný výběr z tohoto rozložení. Předpokládejme, že obě rozložení mají konečné druhé momenty. Nechť cov(**X**, **Y**) je kovarianční matice těchto vektorů a cor(**X**, **Y**) je korelační matice těchto vektorů. Označme $M_{Xj} = \frac{1}{n}\sum_{i=} \; _{ij}, j = 1,\ldots, p, M_{Yj} = \frac{1}{n}\sum_{i=} \; _{ij}, j = 1,\ldots, q$,

$\mathbf{M_X} = (M_{X1}, \ldots, M_{Xp})'$, $\mathbf{M_Y} = (M_{Y1}, \ldots, M_{Yq})'$.

Nestranným odhadem kovarianční matice cov(**X**, **Y**) vektorů **X**, **Y** je výběrová kovarianční matice vektorů **X**, **Y** definovaná vzorcem $\mathbf{S_{XY}} = (S_{ij}) = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n} \mathbf{X}_i - \mathbf{M}_X \; \mathbf{Y}_i - \mathbf{M}_Y$, i = 1, …, p, j = 1, …, q.

Vychýleným odhadem korelační matice cor(**X**, **Y**) vektorů **X**, **Y** je výběrová korelační matice vektorů **X**, **Y** definovaná vzorcem $\mathbf{R_{XY}} = (R_{ij})$, kde R_{ij} je výběrový korelační koeficient i-té a j-té složky vektorů **X**, **Y,** i = 1, …, p, j = 1, …, q.

Příklad: Nechť vektor $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)'$ obsahuje údaje o výšce, hmotnosti a číslu bot mužů, vektor $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2)'$ obsahuje údaje výšce a hmotnosti žen. Vypočtěte realizace výběrové kovarianční a výběrové korelační matice vektorů **X**, **Y**. (Soubor udaje_o_lidech_2.sta)

Řešení:

Statistiky – Pokročilé lineární/nelineární modely – Obecné lineární modely – OK – Závislé proměnné: Vyska_z, Hmotnost_z – Spojité nezávislé proměnné: Vyska_m, Hmotnost_m, Boty_m – OK – na záložce Možnosti zaškrtneme Bez abs. členu – OK – na záložce Matice vybereme Kovariance resp. Korelace. Ve vzniklých tabulkách ponecháme pouze poslední dvě proměnné a první tři případy.

Výběrová kovarianční matice

Efekt	Sloup.4 Vyska_z	Sloup.5 Hmotnost_z
Vyska_m	10,81319	17,39560
Hmotnost_m	15,70879	15,22527
Boty_m	4,43407	5,13736

Výběrová korelační matice

Efekt	Sloup.4 Vyska_z	Sloup.5 Hmotnost_z
Vyska_m	0,467318	0,767160
Hmotnost_m	0,514047	0,508409
Boty_m	0,560289	0,662427

Koeficient mnohonásobné korelace a výběrový koeficient mnohonásobné korelace

Intenzitu lineární závislosti mezi náhodnou veličinou Y a náhodným vektorem $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$ měříme pomocí koeficientu mnohonásobné korelace $\rho_{Y.\mathbf{X}}$. Jeho druhá mocnina je dána vzorcem

$$\rho_{Y.\mathbf{X}}^2 = \mathrm{cor}(Y, \mathbf{X})\, \mathrm{cor}(\mathbf{X})^{-1}\, \mathrm{cor}(\mathbf{X}, Y).$$

Má tyto vlastnosti:

a) $\rho_{Y.\mathbf{X}} \geq 0$

b) $\rho_{Y.\mathbf{X}} \geq |\rho(Y, X_i)|$ pro $\forall i = 1, \ldots, p$

c) $\rho_{Y.X_1 \ldots X_p} \geq \ldots \geq \rho_{Y.X_1X_2} \geq \rho(Y, X_1)$

d) $\rho_{Y.\mathbf{X}} = 1 \Leftrightarrow$ existují konstanty $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_p$ tak, že $Y = \beta_0 + \beta_1 X_1 + \ldots + \beta_p X_p$.

Nechť náhodný vektor $(Y, X_1, \ldots, X_p)'$ má $(p+1)$-rozměrné rozložení s koeficientem mnohonásobné korelace $\rho_{Y.\mathbf{X}}$. Nechť je dán náhodný výběr $(Y_1, X_{11}, \ldots, X_{1p})', \ldots, (Y_n, X_{n1}, \ldots, X_{np})'$ rozsahu n z tohoto rozložení. Pak jako odhad $\rho_{Y.\mathbf{X}}$ slouží výběrový koeficient mnohonásobné korelace $r_{Y.\mathbf{X}}$, jehož druhá mocnina je dána vzorcem

$$r_{Y.\mathbf{X}}^2 = \mathbf{R}_{Y\mathbf{X}}\, \mathbf{R}^{-1}\, \mathbf{R}_{\mathbf{X}Y},$$

kde $\mathbf{R}_{Y\mathbf{X}}$ je výběrová korelační matice veličiny Y a vektoru $\mathbf{X}$ (v tomto případě se redukuje na vektor $(r_{YX_1}, \ldots, r_{YX_p})$) a $\mathbf{R}$ je výběrová korelační matice vektoru $\mathbf{X}$.

Vlastnosti koeficientu mnohonásobné korelace se přenášejí i na výběrový koeficient mnohonásobné korelace.

Příklad: Při zkoumání závislosti hodinové výkonnosti dělníka (veličina Y – v kusech) na jeho věku (veličina X_1 – v letech) a době zapracovanosti (veličina X_2 – v letech) byly u 10 náhodně vybraných dělníků zjištěny tyto údaje:

Y	67	65	75	66	77	84	69	60	70	66
X_1	43	40	49	46	41	41	48	34	32	42
X_2	6	8	14	14	8	12	16	1	5	7

Vypočtěte výběrový koeficient mnohonásobné korelace $r_{Y,(X_1,X_2)}$ popisující závislost hodinové výkonnosti dělníka na na jeho věku a době zapracovanosti.

Řešení:

Statistiky – Vícenásobná regrese – Proměnné – Závislá proměnná Y, seznam nezáv. proměnných X1, X2 – OK – OK.

Koeficient $r_{Y,(X_1,X_2)}$ najdeme v záhlaví výstupní tabulky pod označením R = 0,54

Výsledky regrese se závislou proměnnou : Y (vykony delniku.sta)
R= ,54005243 R2= ,29165662 Upravené R2= ,08927280
F(2,7)=1,4411 p<,29913 Směrod. chyba odhadu : 6,6491

N=10	b*	Sm.chyba z b*	b	Sm.chyba z b	t(7)	p-hodn.
Abs.člen			86,74217	25,32397	3,425299	0,011056
X1	-0,550937	0,598452	-0,70031	0,76071	-0,920604	0,387883
X2	0,920415	0,598452	1,35062	0,87817	1,537994	0,167937

Jeho druhá mocnina (ozn. R2) nám říká, že variabilita výkonů dělníků je z 29% vysvětlena jejich věkem a dobou zapracovanosti.

Testování hypotézy o nezávislosti veličiny Y a vektoru X

Popis testu

Nechť náhodný výběr $(Y_1, X_{11}, \ldots, X_{1p})', \ldots, (Y_n, X_{n1}, \ldots, X_{np})'$ pochází z (p+1)-rozměrného normálního rozložení, které má koeficient mnohonásobné korelace $\rho_{Y.\mathbf{X}}$. Musí platit $n > p+1$.

Testujeme hypotézu H_0: $\rho_{Y.\mathbf{X}} = 0$ proti H_1: $\rho_{Y.\mathbf{X}} \neq 0$. Vzhledem k tomu, že se jedná o výběr z (p+1)-rozměrného normálního rozložení, testujeme, zda existuje závislost mezi veličinou Y a vektorem **X**. (Je-li $\rho_{Y.\mathbf{X}} = 0$, pak z vlastnosti (b) plyne, že $\rho(Y,X_i) = 0$ pro všechna i = 1, …, p, tudíž náhodné veličiny Y a X_i jsou stochasticky nezávislé pro všechna i = 1, …, p.)

Testová statistika $F = \frac{n-p-1}{p} \cdot \frac{r_{Y.X}^2}{1-r_{Y.X}^2}$ se řídí rozložením F(p, n-p-1), pokud H_0 platí. Kritický obor: $W = \langle F_{1-\alpha}(p, n-p-1), \infty)$.

Jestliže $F \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α.

Příklad

Předpokládáme, že údaje o výkonnosti 10 náhodně vybraných dělníků, jejich věku a době zapracovanosti představují číselné realizace náhodného výběru rozsahu 10 ze třírozměrného normálního rozložení. Na hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu, že výkon dělníka nezávisí na jeho věku a době zapracovanosti.

Řešení:

Statistiky – Vícenásobná regrese – Proměnné – Závislá proměnná Y, seznam nezáv. proměnných X1, X2 – OK – OK.

Výsledky regrese se závislou proměnnou : Y (vykony delniku.sta)
R= ,54005243 R2= ,29165662 Upravené R2= ,08927280
F(2,7)=1,4411 p<,29913 Směrod. chyba odhadu : 6,6491

N=10	b*	Sm.chyba z b*	b	Sm.chyba z b	t(7)	p-hodn.
Abs.člen			86,74217	25,32397	3,425299	0,011056
X1	-0,550937	0,598452	-0,70031	0,76071	-0,920604	0,387883
X2	0,920415	0,598452	1,35062	0,87817	1,537994	0,167937

Hodnota testové statistiky pro test nevýznamnosti koeficientu mnohonásobné korelace $\rho_{Y,(X_1,X_2)}$ je 1,4411, počet stupňů volnosti čitatele je 2, jmenovatele 7, odpovídající p-hodnota je 0,2991, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu, že výkon dělníka není závislý na jeho věku a době zapracovanosti.

Koeficient parciální korelace

Nechť Y, Z jsou náhodné veličiny a $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_p)'$ je náhodný vektor. Korelační koeficient $\rho(Y,Z)$ udává míru těsnosti lineárního vztahu mezi veličinami Y a Z. Ta však může být ovlivněna i tím, že mezi veličinami $X_1, \ldots, X_p$ existují veličiny, které silně korelují jak s Y, tak se Z. Zajímá nás proto, jaká je „čistá“ korelace mezi Y a Z, když se eliminuje vliv náhodného vektoru **X**.

Pokud se omezíme na lineární vztahy, můžeme vliv vektoru **X** na veličinu Y popsat lineární regresní funkcí

$\hat{Y} = \alpha + \boldsymbol{\beta}'\mathbf{X}$, kde $\boldsymbol{\beta} = \mathrm{var}(\mathbf{X})^{-1}\,\mathrm{cov}(\mathbf{X},Y)$, $\alpha = E(Y) - \boldsymbol{\beta}'E(\mathbf{X})$.

Tu část veličiny Y, kterou vektor **X** nevysvětlí, si můžeme představit jako reziduum $Y - \hat{Y}$. Analogicky pro veličinu Z dostáváme

$\hat{Z} = \gamma + \boldsymbol{\delta}'\mathbf{X}$, kde $\boldsymbol{\delta} = \mathrm{var}(\mathbf{X})^{-1}\,\mathrm{cov}(\mathbf{X},Z)$, $\gamma = E(Z) - \boldsymbol{\delta}'E(\mathbf{X})$,

tudíž reziduum $Z - \hat{Z}$ chápeme jako tu část veličiny Z, kterou vektor **X** nevysvětlí.

Korelační koeficient mezi rezidui $Y - \hat{Y}$ a $Z - \hat{Z}$ se nazývá parciální korelační koeficient mezi náhodnými veličinami Y a Z při pevně daném vektoru **X** a značí se $\rho_{Y,Z.X}$. Tedy $\rho_{Y,Z.X} = \rho(Y - \hat{Y}, Z - \hat{Z})$. Počítá se podle vzorce

$$\rho_{Y,Z.X} = \frac{\rho(Y,Z) - \mathrm{cov}(Y,\mathbf{X})\,\mathrm{cor}(\mathbf{X})\,\mathrm{cov}(\mathbf{X},Z)}{\sqrt{\left(1 - \mathrm{cov}(Y,\mathbf{X})\,\mathrm{cor}(\mathbf{X})\,\mathrm{cov}(\mathbf{X},Y)\right)\left(1 - \mathrm{cov}(Z,\mathbf{X})\,\mathrm{cor}(\mathbf{X})\,\mathrm{cov}(\mathbf{X},Z)\right)}}.$$

Nechť náhodný vektor $(Y, Z, X_1, \ldots, X_p)'$ pochází z (p+2)-rozměrného rozložení, které má parciální korelační koeficient $\rho_{Y,Z.X}$. Nechť je dán náhodný výběr $(Y_1, Z_1, X_{11}, \ldots, X_{1p})', \ldots, (Y_n, Z_n, X_{n1}, \ldots, X_{np})'$ rozsahu n z tohoto rozložení. Musí platit $n > p+2$. Jako odhad $\rho_{Y,Z.X}$ slouží výběrový parciální korelační koeficient $r_{Y,Z.X}$:

$$r_{Y,Z.X} = \frac{r_{YZ} - \mathbf{S}_{YX}\mathbf{R}_{XX}^{-}\mathbf{S}_{XZ}}{\sqrt{\left(1 - \mathbf{S}_{YX}\mathbf{R}_{XX}^{-}\mathbf{S}_{XY}\right)\left(1 - \mathbf{S}_{ZX}\mathbf{R}_{XX}^{-}\mathbf{S}_{XZ}\right)}}$$

Testování hypotézy o nezávislosti veličin Y a Z při eliminaci vlivu vektoru X

Popis testu

Budeme předpokládat, že uvedený náhodný výběr pochází z (p+2)-rozměrného normálního rozložení.

Testujeme hypotézu H_0: $\rho_{y,z.\mathbf{x}} = 0$ proti H_1: $\rho_{y,z.\mathbf{x}} \neq 0$.

Vzhledem k tomu, že se jedná o výběr z normálního rozložení, testujeme, zda existuje závislost mezi Y a Z při eliminaci vlivu **X**.

Testová statistika $T_0 = \frac{r_{Y,Z.X}\sqrt{n-p-2}}{\sqrt{1-r_{Y,Z.X}^2}}$ se řídí rozložením t(n-p-2), pokud H_0 platí.

Kritický obor: $W = (-\infty, t_{1-\alpha/2}(n-p-2)) \cup (t_{1-\alpha/2}(n-p-2), \infty)$.

Jestliže $T_0 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti α

Příklad

Pro data z příkladu o výkonnosti dělníků vypočtěte výběrové parciální korelační koeficienty $r_{Y,X_1.X_2}, r_{Y,X_2.X_1}$, interpretujte je, porovnejte je s obyčejnými výběrovými korelačními koeficienty r_{YX_1}, r_{YX_2} a pro $\alpha = 0{,}05$ otestujte významnost uvedených parciálních korelačních koeficientů.

Výpočet pomocí systému STATISTICA

Nejprve vypočteme koeficient korelace mezi výkonem a věkem.
Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Korelační matice – OK – 2 seznamy – 1. seznam Y, 2. seznam X_1, X_2 – Výpočet.

Proměnná	X1
Y	0,2287

Dále vypočteme parciální korelační koeficient mezi výkonem a věkem při vyloučení vlivu doby zapracovanosti a otestujeme jeho významnost.
Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Korelační matice – OK – na záložce Možnosti zaškrtneme Zobrazit r, úrovně p, počty N, na záložce Detaily zvolíme Parciální korelace – 1. seznam proměnných Y, X1, druhý seznam proměnných X2 – OK

Proměnná	Y	X1
Y	1,0000	-,3286
	p= ---	p=,388
X1	-,3286	1,0000
	p=,388	p= ---

Korelační koeficient mezi výkonem a věkem vyšel 0,2287, tedy s rostoucím věkem roste výkon. Parciální korelační koeficient mezi výkonem a věkem při vyloučení vlivu doby zapracovanosti vyšel -0,3286, tedy u dělníků se stejnou dobou zapracovanosti klesá s rostoucím věkem výkon.
Odpovídající p-hodnota je 0,388, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o nevýznamnosti $\rho_{Y,X_1.X_2}$.

Nyní vypočteme koeficient korelace mezi výkonem a dobou zapracovanosti:

Proměnná	X2
Y	0,4538

Dále vypočteme parciální korelační koeficient mezi výkonem a dobou zapracovanosti při vyloučení vlivu věku pracovníka a otestujeme jeho významnost.

Proměnná	Y	X2
Y	1,0000	,5026
	p= ---	p=,168
X2	,5026	1,0000
	p=,168	p= ---

Korelační koeficient mezi výkonem a dobou zapracovanosti vyšel 0,4538, tedy čím delší doba zapracovanosti, tím lepší výkon dělník podává. Parciální korelační koeficient mezi výkonem a dobou zapracovanosti při vyloučení vlivu věku vyšel 0,5026, tedy u stejně starých dělníků je poněkud silnější přímá lineární vazba mezi výkonem a dobou zapracovanosti.

Odpovídající p-hodnota je 0,168, tedy na hladině významnosti 0,05 nezamítáme hypotézu o nevýznamnosti $\rho_{Y,X_2.X_1}$.