

## Spojité modely

„hodno  
– co to

*jak úspěšně zachytit nelineární změny?  
– pořádně si je lineárně přiblížme...*

V této kapitole se budeme snažit podat stručné náznaky, jak lze relativně jednoduše používat nástroje diferenciálního a integrálního počtu. V jistém smyslu půjde o postupy a nástroje podobné, jako jsme již viděli v kapitole třetí. Jen místo konečně rozměrných vektorů budou naše objekty nebo jejich stavy často prezentovány pomocí funkcí.

V první části budeme aproximovat funkce pomocí předem pevně zvolených sad generátorů. V zásadě budeme ideově pokračovat v postupech, které známe z konce třetí části druhé kapitoly. Poté se budeme zabývat integrálními operacemi, tj. lineárními operátory definovanými na funkcích pomocí integrování.

## 4. Aproximace pomocí Fourierových řad

7.1

**7.1. Vzdálenosti funkcí.** Zvolme si pevně nějaký interval  $I = [a, b]$ , konečný nebo nekonečný. Koncept integrování můžeme velice intuitivním způsobem využít pro vyjádření vzdálenosti funkcí definované na  $I$ : Pro každé dvě (reálné nebo komplexní) funkce  $f, g$  na  $I$  zkusíme definovat jejich vzdálenost  $\|f - g\|$  jako plochu oblasti vymezené mezi jejich grafy, tj.

$$\|f - g\|^2 = \int_a^b |f(x) - g(x)|^2 dx.$$

Samozřejmě je třeba předpokládat, že tento Riemannův integrál existuje. Velikost  $\|f\|$  funkce  $f$  je pak její vzdálenost od funkce nulové, tj.

$$\|f\|^2 = \int_a^b |f(x)|^2 dx.$$

Pro jednoduchost budeme pracovat s množinou  $\mathcal{S} = \mathcal{S}[a, b]$  omezených a po částech spojitých reálných funkcí na  $I$ , ale úvahy lze rozšiřovat podle potřeby (často ale za cenu značné technické námahy).

Z námi již dokázaných vlastností integrování je okamžitě vidět, že  $\mathcal{S}$  je vektorový prostor a že námi právě uvažovaná

velikost je odvozena z dobře definovaného symetrického bilineárního zobrazení

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x)g(x) dx,$$

kteřé má všechny vlastnosti skalárního součinu. V konečněrozměrném případě jsme takto definovali velikost vektorů v odstavci 2.40. Nyní je to naprosto stejné a pokud zůžeme naši definici na vektorový prostor generovaný nad reálnými čísly jen konečně mnoha funkcemi  $f_1, \dots, f_k$ , dostaneme opět dobře definovaný skalární součin na tomto konečněrozměrném vektorovém podprostoru.

Jako příklad uvažme funkce  $f_i = x^i, i = 0, \dots, k$ . Jimi je v  $\mathcal{S}$  generován  $(k + 1)$ -rozměrný vektorový podprostor  $\mathbb{R}_k[x]$  všech polynomů stupně nejvýše  $k$ . Skalární součin dvou takových polynomů je dán integrálem. Každý polynom stupně nejvýše  $k$  je vyjádřen jednoznačným způsobem jako lineární kombinace generátorů  $f_0, \dots, f_k$ . Pokud by navíc naše generátory měly tu vlastnost, že

$$\boxed{7.1} \quad (7.1) \quad \langle f_i, f_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{pro } i \neq j \\ 1 & \text{pro } i = j \end{cases}$$

jde o tzv. *ortonormální bázi*. Připomeňme si v této souvislosti proceduru Grammovy–Schmidtovy ortogonalizace, viz 2.42, která z libovolného systému generátorů  $f_i$  vytvoří nové ortogonální generátory  $g_i$  téhož prostoru, tj.  $\langle g_i, g_j \rangle = 0$  pro všechny  $i \neq j$ . Spočteme je přitom postupně jako  $g_1 = f_1$  a formulemi

$$g_{\ell+1} = f_{\ell+1} + a_1 g_1 + \dots + a_\ell g_\ell, \quad a_i = -\frac{\langle f_{\ell+1}, g_i \rangle}{\|g_i\|^2}$$

pro  $\ell > 1$ .

Aplikujme tuto proceduru na první tři polynomy  $1, x, x^2$  na intervalu  $[-1, 1]$ . Dostaneme  $g_1 = 1$ ,

$$\begin{aligned} g_2 &= x - \frac{1}{\|g_1\|^2} \int_{-1}^1 x \cdot 1 dx \cdot 1 = x - 0 = x \\ g_3 &= x^2 - \frac{1}{\|g_1\|^2} \int_{-1}^1 x^2 \cdot 1 dx \cdot 1 - \frac{1}{\|g_2\|^2} \int_{-1}^1 x^2 \cdot x dx \cdot x \\ &= x^2 - \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Příslušná ortogonální báze prostoru  $\mathbb{R}_2[x]$  na intervalu  $[-1, 1]$  je tedy  $1, x, x^2 - \frac{1}{3}$ . Normalizací, tj. vhodným násobením skalárem tak, aby prvky v bázi měly velikost jedna dostaneme ortonormální bázi

$$h_1 = \sqrt{\frac{1}{2}}, \quad h_2 = \sqrt{\frac{3}{2}}x, \quad h_3 = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}(3x^2 - 1).$$

Takovým ortonormálním generátorům  $\mathbb{R}_k[x]$  se říká *Legendreovy polynomy*.

$\boxed{7.2}$

**7.2. Ortogonální systémy funkcí.** Připomeňme si výhody, které ortonormální báze podprostorů měly pro konečněrozměrné vektorové prostory. Můžeme pokračovat v předchozím příkladu polynomů a uvažovat třeba  $V = \mathbb{R}_k[x]$

pro libovolné  $k > 2$ . Pro libovolnou funkci  $h \in V$  bude funkce

$$H = \langle h, h_1 \rangle h_1 + \langle h, h_2 \rangle h_2 + \langle h, h_3 \rangle h_3$$

jednoznačně určenou funkcí, která minimalizuje vzdálenost  $\|h - H\|$  mezi všemi funkcemi v  $\mathbb{R}_2[x]$ . Koeficienty pro nejlepší aproximaci zadané funkce pomocí funkce z vybraného podprostoru je možné tedy získat prostě integrací.

Uvedený příklad podbízí následující zobecnění: Když provedeme proceduru Grammovy–Schmidtovy ortogonalizace pro všechny monomy  $1, x, x^2, \dots$ , tj. pro spočetný systém generátorů, co z toho vznikne? Nebo ještě obecněji – co se stane, když zvolíme úplně libovolný spočetný systém lineárně nezávislých funkcí v  $\mathcal{S}$  takový, že každé dvě různé z nich mají nulový skalární součin? Takovému systému funkcí na intervalu  $I$  říkáme *ortogonální systém funkcí*. Jestliže jsou všechny funkce  $f_n$  v posloupnosti po dvou ortogonální a zároveň je pro všechna  $n$  velikost  $\|f_n\| = 1$  normovaná, hovoříme o *ortonormálním systému funkcí*.

Nechť tedy tvoří posloupnost funkcí  $f_n$  ortogonální systém po částech spojitých funkcí na intervalu  $I = [a, b]$  a předpokládejme, že pro konstanty  $c_n$  konverguje řada

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$$

stejněměrně na  $I$ . Pak snadno vyjádříme skalární součin  $\langle F, f_n \rangle$  po jednotlivých sčítancích (viz Důsledek 6.43) a dostaneme

$$\langle F, f_n \rangle = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b f_m(x) f_n(x) dx = c_n \|f_n\|^2.$$

Máme tedy tušení, v jakou přibližně odpověď je možné doufat, a docela přehledně nám ji skutečně dává následující věta:

**7.3. Věta.** *Nechť  $f_n, n = 1, 2, \dots$ , je ortogonální posloupnost funkcí Riemannovsky integrovatelných na  $I = [a, b]$  a nechť  $g$  je libovolná funkce Riemannovsky integrovatelná na  $I$ . Označme*

$$c_n = \|f_n\|^{-2} \int_a^b f_n(x) g(x) dx.$$

(1) *Pro libovolné pevné  $n \in \mathbb{N}$  má ze všech lineárních kombinací funkcí  $f_1, \dots, f_n$  nejmenší vzdálenost od  $g$  výraz*

$$h_n = \sum_{i=1}^n c_i f_i(x).$$

(2) *Řada čísel  $\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2$  vždy konverguje a platí*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 \leq \|g\|^2.$$

(3) *Vzdálenost  $g$  od částečných součtů  $s_k = \sum_{n=1}^k c_n f_n$  jde v limitě k nule, tj.*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|g - s_k\|^2 = 0,$$

tehdy a jen tehdy, když

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n^2 \|f_n\|^2 = \|g\|^2.$$

Ještě než se pustíme do důkazu, zkusíme lépe porozumět významu jednotlivých tvrzení této věty. Protože pracujeme s úplně libovolně zvoleným ortogonálním systémem funkcí, nemůžeme očekávat, že lze dobře aproximovat jakoukoliv funkci pomocí lineárních kombinací funkcí  $f_i$ . Např. když se omezíme u ortogonálních polynomů pouze na sudé stupně, určitě budeme dobře aproximovat pouze sudé funkce. Nicméně hned první tvrzení nám říká, že vždycky budeme dosahovat nejlepší možné aproximace částečnými součty. Druhé a třetí tvrzení pak můžeme vnímat jako analogii ke komým průmětům do podprostorů vyjádřených pomocí souřadnic. Skutečně, že pokud k dané funkci  $g$  bodově konverguje řada  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ , pak je funkce  $F(x)$  kolmým průmětem  $g$  do vektorového podprostoru všech takovýchto řad.

Na druhé straně ale naše věta neříká, že by částečné součty uvažované řady musely bodově konvergovat k nějaké funkci. Tj. řada  $F(x)$  nemusí být obecně konvergentní ani v případě, kdy nastane rovnost v (3). Pokud ale např. existuje konečná hodnota  $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$  a všechny funkce  $f_n$  jsou stejnoměrně omezené na  $I$ , pak zřejmě řada  $F(x)$  konverguje v každém  $x$ .

DŮKAZ. Zvolme libovolnou lineární kombinaci  $f = \sum_{n=1}^k a_n f_n$  a spočtěme její vzdálenost od  $g$ . Dostáváme

$$\begin{aligned} \|g - \sum_{n=1}^k a_n f_n\|^2 &= \int_a^b \left( g - \sum_{n=1}^k a_n f_n \right)^2 dx \\ &= \int_a^b g^2 dx - 2 \int_a^b \sum_{n=1}^k a_n f_n g dx + \int_a^b \left( \sum_{n=1}^k a_n f_n \right)^2 dx \\ &= \|g\|^2 - 2 \sum_{n=1}^k a_n c_n + \sum_{n=1}^k a_n^2 \|f_n\|^2 \\ &= \|g\|^2 + \sum_{n=1}^k \|f_n\|^2 ((c_n - a_n)^2 - c_n^2). \end{aligned}$$

Evidentně lze poslední výraz minimalizovat právě volbou  $a_n = c_n$  a tím je první tvrzení dokázáno.

Dosažením této volby dostáváme tzv. *Besselovu identitu*

$$\|g - \sum_{n=1}^k c_n f_n\|^2 = \|g\|^2 - \sum_{n=1}^k c_n^2 \|f_n\|^2,$$

ze které okamžitě díky nezápornosti levé strany vyplývá tzv. *Besselova nerovnost*

$$\sum_{n=1}^k c_n^2 \|f_n\|^2 \leq \|g\|^2.$$

Tím je dokázáno druhé tvrzení, protože každá neklesající a shora omezená posloupnost reálných čísel má limitu (a je jí supremum celé množiny hodnot prvků posloupnosti).

Jestliže v Besselově nerovnosti nastane rovnost, hovoříme o tzv. *Parsevalově rovnosti*. Přímo z definic vyplývá nyní tvrzení (3).  $\square$

Ortonogonální systém funkcí nazveme *úplný ortogonální systém* na intervalu  $I = [a, b]$ , jetliže platí Parsevalova rovnost pro každou funkci  $g$  s konečnou velikostí  $\|g\|$  na tomto intervalu.

7.4

**7.4. Fourierovy řady.** Předchozí věta naznačuje, že umíme se spočetnými ortogonálními systémy  $f_n$  funkcí pracovat velice podobně jako s konečnými ortogonálními bazemi vektorových prostorů, jsou tu ale zásadní rozdíly:

- Není snadné říci, jak vypadá celý prostor konvergentních nebo stejnoměrně konvergentních řad  $F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n f_n$ .
- Pro danou integrovatelnou funkci umíme najít jen nejlepší možné přiblížení takovou řadou  $F(x)$ .

V případě, že místo ortogonálního systému  $f_n$  máme systém ortonormální, jsou formulky ve větě o něco jednodušší, žádné další zlepšení ale nenastane.

Jako pěkný příklad na integrování lze elementárními metodami ověřit, že systém funkcí

$$1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \cos 2x, \dots, \sin nx, \cos nx, \dots$$

je ortogonální systém na intervalu  $[-\pi, \pi]$  (a také na kterémkoliv jiném intervalu o délce  $2\pi$ ). Řady z předchozí věty odpovídající tomuto systému nazýváme *Fourierovy řady*. I v obecném případě diskutovaném výše se někdy hovoří o obecných Fourierových řadách vzhledem k ortogonálnímu systému funkcí  $f_n$ . Koeficienty  $c_n$  se pak nazývají *Fourierovy koeficienty funkce  $f$* .

Na intervalu  $[-\pi, \pi]$  jsou velikosti všech funkcí kromě první vždy  $\sqrt{\pi}$ , první má velikost  $\sqrt{2\pi}$ . Lze dokázat, že náš systém funkcí je úplným ortogonálním systémem, nebudeme to zde ale dokazovat. Ve smyslu vzdálenosti funkcí definované pomocí našeho skalárního součinu proto budou částečné součty Fourierovy řady  $F(x)$  pro libovolnou funkci  $g(x)$  s konečným integrálem  $\int_a^b g(x)^2 dx$ , tj.

$$F(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx))$$

s koeficienty

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \cos(nx) dx, \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx,$$

vždy konvergovat k funkci  $g(x)$ .

Z obecnějších úvah lze dovést, že z konvergence v tomto smyslu vždy vyplývá bodová konvergence částečných součtů ve skoro všech bodech  $x \in I$ . Nebudeme zde ale ani vysvětlovat, co znamená „skoro všechny“, ani nebudeme takový výsledek dokazovat.

Jako příklad Fourierovy řady si uvedeme Fourierovu řadu pro periodickou funkci vzniklou z Heavisideovy funkce zúžením na jednu periodu. Tj. naše funkce  $g$  bude na intervalu

$[-\pi, 0]$  rovna  $-1$  a na intervalu  $[0, \pi]$  bude rovna  $1$ . Protože jde o funkci lichou, jistě budou všechny koeficienty u funkcí  $\cos(nx)$  nulové, a pro koeficienty u funkcí  $\sin(nx)$  spočteme

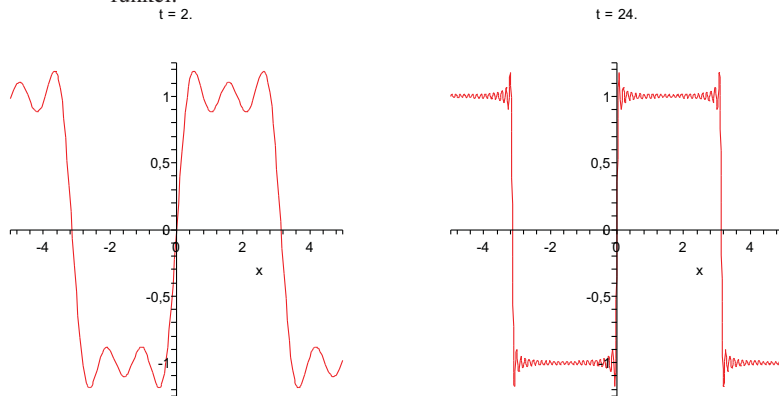
$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin(nx) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(nx) dx = \frac{2}{n\pi} (1 - (-1)^n).$$

Výsledná Fourierova řada je tedy tvaru

$$g(x) = \frac{4}{\pi} \left( \sin(x) + \frac{1}{3} \sin(3x) + \frac{1}{5} \sin(5x) + \dots \right)$$

a součet jejích prvních pěti a prvních padesáti členů je na následujících dvou obrázcích.

Všimněme si, že se zvyšujícím se počtem členů řady se výrazně spřesňuje aproximace s výjimkou stále se zmenšujícího okolí bodu nespojitosti, na němž je ale maximum odchylky stále zhruba stejné. Je to obecná vlastnost Fourierových řad, které se říká Gibbsův jev. Povšimněme si také, že v samotném bodě nespojitosti je hodnota aproximující funkce právě v polovině mezi limitami zprava a zleva pro Heavisideovu funkci.



Samozřejmě nelze očekávat, že by konvergence Fourierových řad pro funkce  $g$  s body nespojitosti mohla být stejnoměrná (to by totiž  $g$  musela být coby stejnoměrná limita spojitých funkcí sama spojitá!).

Bez podrobného důkazu si uvedeme následující větu podávající ucelený obrázek o bodové konvergenci Fourierových řad. Nejde o nutné podmínky konvergence a v literatuře lze najít řadu jiných formulací. Tato je ale jednoduchá a postihuje velké množství užitečných případů.

**Věta.** *Nechť  $g$  je po částech spojitá a po částech monotónní funkce na intervalu  $[-\pi, \pi]$ . Pak její Fourierova řada  $F(x)$  konverguje na  $[-\pi, \pi]$  a její součet je*

- roven hodnotě  $g(x_0)$  v každém bodě  $x_0 \in [-\pi, \pi]$ , ve kterém je funkce  $g(x)$  spojitá,
- v každém bodě nespojitosti  $x_0$  funkce  $g(x)$  roven

$$\frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow x_0^+} g(x) + \lim_{x \rightarrow x_0^-} g(x) \right),$$

- v krajních bodech intervalu  $[-\pi, \pi]$  je roven

$$\frac{1}{2} \left( \lim_{x \rightarrow -\pi^+} g(x) + \lim_{x \rightarrow \pi^-} g(x) \right).$$

Pokud navíc je funkce  $g(x)$  spojitá, periodická s periodou  $2\pi$  a všude existuje její po částech spojitá derivace, pak konverguje její Fourierova řada stejnoměrně.

7.5

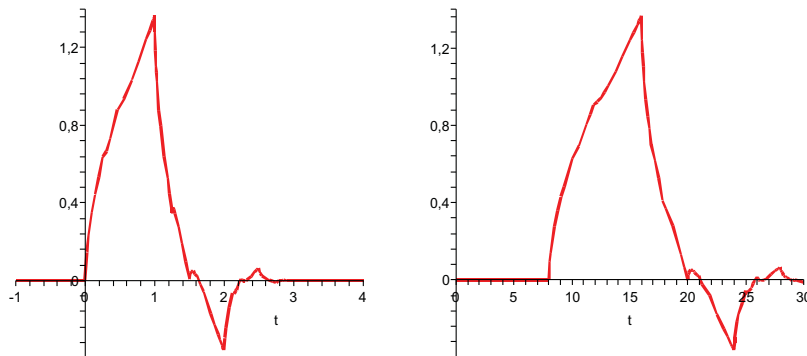
**7.5. Wavelety.** Fourierovy řady a další z nich vycházející nástroje jsou využívány ke zpracování různých signálů, obrázků apod. Povahou použitých periodických goniometrických funkcí a jejich prosté škálování pomocí zvětšujících se frekvence zároveň omezují jejich použitelnost. V mnoha oborech proto vyvstala přirozená potřeba nalézt šikovnější úplné ortogonální systémy funkcí, které budou vycházet z předpokládané povahy dat a které bude možné efektivněji zpracovávat.

Takový systém se lze například vytvořit volbou vhodné spojitě funkce  $\psi$  s kompaktním nosičem, ze které sestrojíme spočetně mnoho funkcí  $\psi_{jk}$ ,  $j, k \in \mathbb{Z}$ , pomocí dyadických translací a dilatací:

$$\psi_{jk}(x) = 2^{j/2} \psi(2^j x - k).$$

Pokud tvar mateřské funkce  $\psi$  dobře vystihuje možné chování dat, a zároveň její potomci  $\psi_{jk}$  tvoří úplný ortogonální systém, pak se zpravidla dobře daří konkrétní zpracovávaný signál aproximovat pomocí jen několika málo funkcí.

Nebudeme zde zacházet do podrobností, jde o mimořádně živý směr výzkumu i základ komerčních aplikací. Zájemce snadno najde spoustu literatury. Na obrázku je ilustrována tzv. Daubechies mateřská wavelet  $D4(x)$  a její dcera  $D4(2^{-3}x - 1)$ .



## 5. Integrální operátory

7.6

**7.6. Integrální operátory.** V případě konečněrozměrných vektorových prostorů jsme mohli vnímat vektory jako zobrazení z konečné množiny pevně zvolených generátorů do prostoru souřadnic. Nejjednodušší lineární zobrazení zobrazovala vektory do skalárů (tzv. lineární formy) a byla definována pomocí jednořádkových matic jako součet součinů

těchto souřadnic s pevně zvolenými hodnotami na generátorech. Složitější zobrazení s hodnotami opět v tom samém prostoru pak byla obdobně zadána maticemi. Velice podobně umíme přistoupit k lineárním operacím na prostorech funkcí.

V případě vektorového prostoru  $\mathcal{S}$  všech po částech spojitých funkcí na intervalu  $I = [a, b]$  se lineární zobrazení  $\mathcal{S} \rightarrow \mathbb{R}$  nazývají (reálné) *lineární funkcionály*. Jednoduše je můžeme zadat dvěma způsoby – pomocí vyčíslení funkce (případně jejích derivací) v jednotlivých bodech nebo pomocí integrování. Příkladem funkcionálu  $L$  tedy může být vyčíslení v jediném pevném bodě  $x_0 \in I$

$$L(f) = f(x_0)$$

integrální funkcionál pak je zadán pomocí pevně zvolené funkce  $g(x)$

$$L(f) = \int_a^b f(x)g(x) dx.$$

Funkce  $g(x)$  zde hraje roli váhy, se kterou při definici Riemannova integrálu bereme jednotlivé hodnoty reprezentující funkci  $f(x)$ . Nejjednodušším příkladem takového funkcionálu je samozřejmě Riemannův integrál samotný, tj. případ s  $g(x) = 1$  pro všechny body  $x$ . Dobrou představu dává také volba

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } |x| \geq a \\ e^{\frac{1}{x^2-a^2} + \frac{1}{a^2}} & \text{je-li } |x| < a. \end{cases}$$

To je funkce hladká na celém  $\mathbb{R}$  s kompaktním nosičem v intervalu  $(-a, a)$ , viz 6.6. V bodě  $x = 0$  má přitom hodnotu jedna. Integrální funkcionál

$$L_y(f) = \int_a^b f(x)g(y-x) dx$$

je možné vnímat jako „rozmlžené zprůměrování“ hodnot funkce  $f$  kolem bodu  $x = y$  (obrázek funkce  $g$  je v 6.6 – ve svém středu má hodnotu jedna a hladkým monotonním způsobem se plynule přimkne k nule ve vzdálenosti  $a$  na obě strany). Ještě lepší volbou je z tohoto pohledu libovolná funkce  $g$  jejíž integrál přes celou reálnou osu je jednička.

7.7

**7.7. Konvoluce funkcí.** Pohled na integrální funkcionál  $L_y$  jako na zprůměrované chování funkce  $f$  v okolí daného bodu je názornější pro případ nevlastních mezí integrálu  $a = -\infty$ ,  $b = \infty$ . Místo prostoru  $\mathcal{S}$  všech po částech spojitých funkcí na  $\mathbb{R}$  budeme uvažovat po částech spojitě a v absolutní hodnotě integrovatelné funkce  $f$  v roli argumentu pro náš funkcionál. Volný parametr  $y$  může být vnímán jako nová nezávislá proměnná a naše operace tedy ve skutečnosti zobrazuje funkce opět na funkce  $f \mapsto \tilde{f}$ :

$$\tilde{f}(y) = L_y(f) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y-x) dx.$$

Této operaci se říká *konvoluce funkcí*  $f$  a  $g$ , značíme ji  $f * g$ . Většinou se konvoluce definuje pro reálné nebo komplexní



funkce s kompaktním nosičem na celém  $\mathbb{R}$ . Pomocí transformace  $t = z - x$  se snadno spočte

$$(f * g)(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(z-x) dx = - \int_{\infty}^{-\infty} f(z-t)g(t) dt = (g * f)(z),$$

je tedy konvoluce coby binární operace na dvojicích funkcí s kompaktními nosiči komutativní.

Konvoluce je mimořádně užitečný nástroj pro modelování způsobu, jak můžeme pozorovat experiment nebo jak se projevuje prostředí při přenosu informací (např. analogový audio nebo video signál ovlivňovaný šumy apod.). Argument  $f$  je přenášenou informací, funkce  $g$  je volena tak, aby co nejlépe vystihovala vlivy prostředí či zvoleného technického postupu.

Konvoluce jsou jedním z mnoha případů obecných integrálních operátorů na prostorech funkcí

$$K(f)(y) = \int_a^b f(x)k(y, x) dx$$

s jádrem daným funkcí dvou proměnných  $k : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Definiční obor takových funkcionálů je nutné vždy volit s ohledem na vlastnosti jádra tak, aby vždy existoval použitý integrál.

7.8

**7.8. Fourierova transformace.** Teorie integrálních operátorů s jádrem a rovnic, které je obsahují je velice užitečná a zajímavá zároveň, bohužel pro ni zde teď ale nemáme dost prostoru. Zaměříme teď alespoň na jeden mimořádně důležitý případ, tzv. *Fourierovu transformaci*  $\mathcal{F}$ , která úzce souvisí s Fourierovými řadami. Připomeňme si základní formuli pro parametrizaci jednotkové kružnice v komplexní rovině s rychlostí obíhání  $\omega = 2\pi/T$ , kde  $T$  je čas jednoho oběhu:

$$e^{i\omega t} = \cos \omega t + i \sin \omega t.$$

Pro (reálnou nebo komplexní) funkci  $f(t)$  můžeme spočítat její tzv. komplexní Fourierovy koeficienty jako komplexní čísla

$$c_n = \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} f(t) e^{-i\omega_n t} dt.$$

Přitom platí vztahy mezi koeficienty  $a_n$  a  $b_n$  Fourierových řad (po přepočtu formulí pro tyto koeficienty pro funkce s obecnou periodou délky  $T$ ) a těmito čísly  $c_n$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n), \quad c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n)$$

a při reálném  $f$  jsou samozřejmě  $c_n$  a  $c_{-n}$  komplexně konjugované. Označíme-li  $\omega_n = \omega n$ , bude tedy původní funkce  $f(t)$  s konvergující Fourierovou řadou rovna

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i\omega_n t}.$$

Při pevně zvoleném  $T$  vyjadřuje výraz  $\Delta\omega = 2\pi/T$  právě změnu ve frekvenci způsobenou nárůstem  $n$  o jedničku. Je to tedy právě diskrétní krok, se kterým při výpočtu koeficientů Fourierovy řady měníme frekvence. Koeficient  $1/T$  u formule

pro  $c_n$  je pak roven  $\Delta\omega/2\pi$ , takže můžeme řadu pro  $f(t)$  přepsat jako

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left( \Delta\omega \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega_n x} dx e^{i\omega_n t} \right).$$

Představme si nyní hodnoty  $\omega_n$  pro všechna  $n \in \mathbb{Z}$  jako vybrané reprezentanty pro malé intervaly  $[\omega_n, \omega_{n+1}]$  o délce  $\Delta\omega$ . Pak náš výraz ve vnitřní velké závorce v poslední formuli pro  $f(t)$  ve skutečnosti vyjadřuje sčítance Riemannových součtů pro nevlastní integrál

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

kde  $g(\omega)$  je funkce nabývající v bodech  $\omega_n$  hodnoty

$$g(\omega_n) = \int_{-T/2}^{T/2} f(x) e^{-i\omega_n x} dx.$$

Předpokládejme, že naše funkce  $f$  je integrovatelná v absolutní hodnotě přes celé  $\mathbb{R}$ . Pak můžeme limitně přejít  $T \rightarrow \infty$  a dojde ke zjemňování normy  $\Delta\omega$  našich intervalů. Zároveň se dostaneme v posledním výrazu k integrálu

$$g(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx.$$

Můžeme tedy položit pro (každou v absolutní hodnotě Riemannovsky integrovatelnou) funkci  $f$  na  $\mathbb{R}$

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt.$$

Této funkci  $\tilde{f}$  říkáme Fourierova transformace funkce  $f$ . Přechozí úvahy pak ukazují, že pro „rozumné“ funkce  $f(t)$  bude také platit

$$f(t) = \mathcal{F}^{-1}(\tilde{f})(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Tím říkáme, že existuje k právě definované *Fourierově transformaci*  $\mathcal{F}$  inverzní operace  $\mathcal{F}^{-1}$ , které říkáme *inverzní Fourierova transformace*.

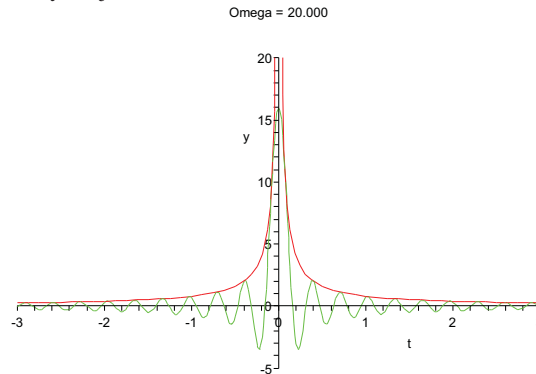
Všimněme si, že Fourierova transformace a její inverze jsou integrální operátory se skoro shodným jádrem  $k(\omega, t) = e^{\pm i\omega t}$ .

7.9

**7.9. Vlastnosti Fourierovy transformace.** Fourierova transformace zajímavým způsobem převrací lokální a globální chování funkcí. Začněme jednoduchým příkladem, ve kterém najdeme funkci  $f(t)$ , která se ztransformuje na charakteristickou funkci intervalu  $[-\Omega, \Omega]$ , tj.  $\tilde{f}(\omega) = 0$  pro  $|\omega| > \Omega$  a  $\tilde{f} = 1$  pro  $|\omega| \leq \Omega$ . Inverzní transformace  $\mathcal{F}^{-1}$  nám dává

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\Omega}^{\Omega} e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[ \frac{1}{it} e^{i\omega t} \right]_{-\Omega}^{\Omega} = \frac{2}{\sqrt{2\pi} t} \frac{1}{2i} (e^{i\Omega t} - e^{-i\Omega t}) \\ &= \frac{2}{\sqrt{2\pi} t} \sin(\Omega t). \end{aligned}$$

Přímým výpočtem limity v nule (L'Hospitalovo pravidlo) spočteme, že  $f(0) = 2\Omega(2\pi)^{-1/2}$ , nejbližší nulové body jsou v  $t = \pm\pi/\Omega$  a funkce poměrně rychle klesá k nule mimo počátek  $x = 0$ . Na obrázku je tato funkce znázorněná zelenou křivkou pro  $\Omega = 20$ . Zároveň je vynesena červenou křivkou oblast, ve které se s rostoucím  $\Omega$  naše funkce  $f(t)$  stále rychleji „vlní“.



V dalším příkladu spočteme Fourierovu transformaci derivace  $f'(t)$  pro nějakou funkci  $f$ . Pro jednoduchost předpokládejme, že  $f$  má kompaktní nosič, tj. zejména  $\mathcal{F}(f')$  i  $\mathcal{F}(f)$  skutečně existují a počítejme metodou per partes:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(f')(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} [e^{-i\omega t} f(t)]_{-\infty}^{\infty} + \frac{i\omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt \\ &= i\omega \mathcal{F}(f)(\omega) \end{aligned}$$

Vidíme tedy, že Fourierova transformace převádí (infinitesimální) operaci derivování na (algebraickou) operaci prostého násobení proměnnou. Samozřejmě můžeme tento vzorec iterovat, tj.

$$\mathcal{F}(f'')(\omega) = -\omega^2 \mathcal{F}(f), \dots, \mathcal{F}(f^{(n)}) = i^n \omega^n \mathcal{F}(f).$$

Další mimořádně důležitou vlastností je vztah mezi konvolucemi a Fourierovou transformací. Spočteme, jak dopadne transformace konvoluce  $h = f * g$ , kde opět pro jednoduchost předpokládáme, že funkce mají kompaktní nosiče. Při výpočtu prohodíme pořadí integrování, což je krok, který ověříme teprve v diferenciálním a integrálním počtu později, viz 8.25. V dalším krůčku pak zavedeme substituci  $t - x = u$ .

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(h)(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) g(t-x) dx \right) e^{-i\omega t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(t-x) e^{-i\omega t} dt \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega(u+x)} du \right) dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\omega x} dx \right) \cdot \left( \int_{-\infty}^{\infty} g(u) e^{-i\omega u} du \right) \end{aligned}$$

$$= \sqrt{2\pi} \mathcal{F}(f) \cdot \mathcal{F}(g)$$

Podobný výpočet ukazuje i obrácené tvrzení, že Fourierova transformace součinu je, až na konstantu, konvoluce transformací.

$$\mathcal{F}(f \cdot g) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}(f) * \mathcal{F}(g).$$

Jak jsme si uváděli výše, konvoluce  $f * g$  velice často modeluje proces našeho pozorování nějaké sledované veličiny  $f$ . Pomocí Fourierovy transformace a její inverze nyní můžeme snadno rozpoznat původní hodnoty této veličiny, pokud známe konvoluční jádro  $g$ . Prostě spočteme  $\mathcal{F}(f * g)$  a podělíme obrazem  $\mathcal{F}(g)$ . Hovoříme o *dekonvoluci*.

Vraťme se nyní ještě k prvnímu příkladu s inverzní transformací k charakteristické funkci  $f_\Omega$  intervalu  $[-\Omega, \Omega]$ . Zkusme provést limitní přechod pro  $\Omega$  jdoucí k nekonečnu a označme  $\sqrt{2\pi} \delta(t)$  kýženou limitní „funkci“ pro  $\mathcal{F}^{-1}(f_\Omega)(t)$ . Pro součin s libovolným obrazem  $\mathcal{F}(g)$  platí

$$\mathcal{F}^{-1}(f_\Omega \cdot \mathcal{F}(g))(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \mathcal{F}^{-1}(f_\Omega)(z - t) dt.$$

Při  $\Omega \rightarrow \infty$  přejde výraz nalevo k  $\mathcal{F}^{-1}(\mathcal{F}(g))(z) = g(z)$ , zatímco napravo dostáváme

$$g(z) = \int_{-\infty}^{\infty} g(t) \delta(z - t) dt.$$

Naše hledaná  $\delta(t)$  tedy vypadá na „funkci“, která je všude nulová, kromě jediného bodu  $t = 0$ , kde je tak „nekonečná“, že integrováním jejího součinu s libovolnou integrovatelnou funkcí  $g$  dostaneme právě hodnotu  $g$  v bodě  $t = 0$ . Není to samozřejmě funkce v našem smyslu, nicméně jde o objekt často používaný. Říká se jí *Diracova funkce*  $\delta$  a korektně ji lze popsat jako tzv. distribuci. Z nedostatku času nebudeme distribuce podrobněji rozebírat a omezíme se na konstatování, že si lze dobře Diracovo  $\delta$  představit jako jednotkový impulz v jediném bodě. Fourierova transformace jej pak přetransformuje na konstantní funkci  $\mathcal{F}(\delta)(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ . Naopak mnohé funkce, které nejsou integrovatelné v absolutní hodnotě na  $\mathbb{R}$  transformuje Fourierova transformace na výrazy s Diracovým  $\delta$ . Např.

$$\mathcal{F}(\cos(nt))(\omega) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(n - \omega) + \delta(n + \omega)).$$

7.10

**7.10. Poznámky o dalších transformacích.** Pokud použijeme Fourierovu transformaci na lichou funkci  $f(t)$ , tj.  $f(-t) = -f(t)$ , příspěvek integrace součinu  $f(t)$  a funkce  $\cos t$  se pro kladná a záporná  $t$  vyruší. Dostaneme proto přímým výpočtem

$$\mathcal{F}(f)(\omega) = \frac{-2i}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t dt.$$

Výsledná funkce je opět lichá, proto ze stejného důvodu i inverzní transformaci lze spočítat obdobně. Vynecháním imaginární jednotky  $i$  dostáváme vzájemně inverzní transformace,

kterým se říká *Fourierova sinusová transformace* pro liché funkce:

$$\tilde{f}_s(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(t) \sin \omega t \, dt, \quad f(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \tilde{f}_s(\omega) \sin \omega t \, d\omega.$$

Obdobně se definuje *Fourierova cosinová transformace* pro sudé funkce.

Fourierovu transformaci nelze dobře využít pro funkce, které nejsou integrovatelné v absolutní hodnotě přes celé  $\mathbb{R}$  (minimálně nedostáváme opravdové funkce). *Laplaceova transformace* se chová docela podobně jako Fourierova a tuto vadu nemá:

$$\mathcal{L}(f)(s) = \bar{f}(s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt.$$

Integrální operátor  $\mathcal{L}$  má velice rychle se zmenšující jádro, proto bude existovat  $\mathcal{L}(p(t))$  například pro každý polynom  $p$  a všechna kladná  $s$ . Obdobně jako pro Fourierovu transformaci dostaneme prostým výpočtem per partes vztah pro Laplaceovu transformaci derivované funkce při  $s > 0$ :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(f'(t))(s) &= \int_0^{\infty} f'(t) e^{-st} \, dt = [f(t) e^{-st}]_0^{\infty} + s \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} \, dt \\ &= -f(0) + s \mathcal{L}(f)(s). \end{aligned}$$

Vlastnosti Laplaceovy transformace a řadu dalších zejména v technické praxi používaných transformací je možné snadno dohledat v literatuře.