

# Drsná matematika II – 2. přednáška

## Topologie množin reálných čísel, limity a spojitost

Jan Slovák

Masarykova univerzita

27. 2. 2012

# Obsah přednášky

- 1 Literatura
- 2 Vlastnosti reálných čísel
- 3 Topologie reálné přímky
- 4 Limity posloupností a funkcí

## Kde je dobré číst?

- vlastní poznámky, texty současného nebo předcházejícího přednášejícího, GOOGLE, atd.
- Zuzana Došlá, Jaromír Kuben, Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, MU Brno, 2003, 215 s., ISBN 80-210-3121-2.
- Riley, K.F., Hobson, M.P., Bence, S.J. Mathematical Methods for Physics and Engineering, second edition, Cambridge University Press, Cambridge 2004, ISBN 0 521 89067 5, xxiii + 1232 pp.

Reálná čísla a racionální čísla jsou pole. Už jsme ale na nich používali i relaci uspořádání, kterou značíme „ $\leq$ “.

Připomněme si nyní vlastnosti (axiomy) reálných čísel včetně souvislosti uspořádání a ostatních relací. Dělicí čáry v tabulce naznačují, jak axiomy postupně zaručují, že jsou reálná čísla komutativní grupou vůči sčítání, že  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$  je komutativní grupa vůči násobení,  $\mathbb{R}$  je pole, množina  $\mathbb{R}$  spolu s operacemi  $+$ ,  $\cdot$  a s relací uspořádání je tzv. **uspořádané pole** a konečně posledního axiomu můžeme rozumět tak, že  $\mathbb{R}$  je „dostatečně husté“, tj. nechybí nám tam body, jako např. druhá odmocnina ze dvou v číslech racionálních. Formálně poslední axiom vysvětlíme za chvíli. Zároveň si uvědomujme, které z axiomů platí pro  $\mathbb{Q}$  a  $\mathbb{C}$ .

- |       |   |
|-------|---|
| (R1)  | $(a + b) + c = a + (b + c)$ , pro všechny $a, b, c \in \mathbb{R}$  |
| (R2)  | $a + b = b + a$ , pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$   |
| (R3)  | existuje $0 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a \in \mathbb{R}$ platí $a + 0 = a$   |
| (R4)  | pro všechny $a \in \mathbb{R}$ existuje opačný prvek $(-a) \in \mathbb{R}$ takový, že platí $a + (-a) = 0$                      |
| (R5)  | $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ , pro všechny $a, b, c \in \mathbb{R}$  |
| (R6)  | $a \cdot b = b \cdot a$ pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$   |
| (R7)  | existuje $1 \in \mathbb{R}$ takový, že pro všechny $a \in \mathbb{R}$ platí $1 \cdot a = a$                                     |
| (R8)  | pro každý $a \in \mathbb{R}$ , $a \neq 0$ existuje inverzní prvek $a^{-1} \in \mathbb{R}$ takový, že platí $a \cdot a^{-1} = 1$ |
| (R9)  | $a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c$ , pro všechny $a, b, c \in \mathbb{R}$  |
| (R10) | relace $\leq$ je úplné uspořádání, tj. reflexivní, antisymetrická, tranzitivní a úplná relace na $\mathbb{R}$                   |
| (R11) | pro $a, b, c \in \mathbb{R}$ platí, že z $a \leq b$ vyplývá $a + c \leq b + c$  |
| (R12) | pro všechny $a, b \in \mathbb{R}$ , $a > 0$ , $b > 0$ , platí také $a \cdot b > 0$  |
| (R13) | každá neprázdná ohraničená množina $A \subset \mathbb{R}$ má supremum.  |

# Horní a dolní závory, suprema a infima

Pojem suprema má smysl pro každou uspořádanou množinu.

Uvažme podmnožinu  $A \subset B$  v uspořádané množině  $B$ . **Horní závorou** množiny  $A$  je každý prvek  $b \in B$ , pro který platí, že  $b \geq a$  pro všechny  $a \in A$ . Obdobně definujeme **dolní závory** množiny  $A$  jako prvky  $b \in A$  takové, že  $b \leq a$  pro všechny  $a \in A$ .

Nejmenší horní závora podmnožiny  $A$ , pokud existuje, se nazývá **supremum** této podmnožiny a značíme ji  $\sup A$ . Přesněji:

$\sup A = b$ , jestliže z  $c \geq a$  pro všechny  $a \in A$  vyplývá také  $c \geq b$ .

Obdobně, největší dolní závora se nazývá **infimum**, píšeme  $\inf A$ , tzn.

$\inf A = b$ , jestliže z  $c \leq a$  pro všechny  $a \in A$  vyplývá také  $c \leq b$ .

Pro výstavbu teorie potřebujeme vědět, zda uvedené vlastnosti reálných čísel lze realizovat, tj. zda existuje taková množina  $\mathbb{R}$  s operacemi a relací uspořádání, které (R1)–(R13) splňují. Skutečně lze reálná čísla nejen zkonstruovat, ale jde to, až na izomorfismus, jediným způsobem. Zde nebudeme diskutovat, v textech je jen naznačena existence.

Pole racionálních čísel splňuje (R1)–(R12), neexistují v nich ale obecně suprema ohraničených podmnožin.

Pole komplexních čísel splňuje axiomy (R1)–(R9), není na nich ale žádným rozumným způsobem definováno uspořádání, které by naplnilo axiomy (R10)–(R13). Protože jsou komplexní čísla  $z = \operatorname{re} z + i \operatorname{im} z$  dána jako dvojice reálných čísel, je dobrou představou rovina komplexních čísel.

U komplexních čísel je navíc tzv. **konjugace**. Je to zrcadlení podle přímky reálných čísel, tj. obrácení znaménka u imaginární složky. Značíme ji  $\bar{z} = \operatorname{re} z - i \operatorname{im} z$ . Protože je  $z \cdot \bar{z} = (x + iy)(x - iy) = x^2 + y^2$ , zadává nám tento výraz kvadrát vzdálenosti  $z$  od nuly. Píšeme  $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ , hovoříme o **absolutní hodnotě**.

# Hromadné body a konvergence

Uvažme posloupnost  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , čísel v  $\mathbb{R}$  nebo  $\mathbb{Q}$  nebo  $\mathbb{C}$  a pevně zvolenou hodnotu  $a$  v témže oboru.

## Konvergentní posloupnost

Jestliže pro libovolné pevně zvolené kladné číslo  $\epsilon \in \mathbb{R}$  platí pro všechny  $i \in \mathbb{N}$ , až na konečně mnoho výjimek,

$$|a_i - a| < \epsilon,$$

říkáme, že posloupnost  $a_i$ ,  $i = 0, 1, \dots$  **konverguje** k hodnotě  $a$ .

## Cauchyovská posloupnost

Posloupnost prvků  $a_0, a_1, \dots$  takovou, že pro libovolné pevně zvolené kladné reálné číslo  $\epsilon > 0$  platí pro všechny prvky  $a_k$  až na konečně mnoho výjimek

$$|a_i - a_j| < \epsilon,$$

nazýváme **Cauchyovská**.



Jinak řečeno, u Cauchyovské posloupnosti pro každé pevné  $\epsilon > 0$  existuje index  $N$  takový, že nerovnost  $|a_i - a_j| < \epsilon$  platí pro všechna  $i, j > N$ .

Intuitivně jistě cítíme, že buď jsou v takové posloupnosti všechny prvky stejné až na konečně mnoho z nich (pak bude od určitého indexu  $N$  počínaje vždy  $|a_i - a_j| = 0$ ) nebo se taková posloupnost „hromadí“ k nějaké hodnotě.

Jestliže posloupnost  $a_i \in \mathbb{K}$  konverguje k  $a \in \mathbb{K}$ , pak pro zvolené  $\epsilon$  víme, že  $|a_i - a| < \epsilon$  pro vhodné  $N \in \mathbb{N}$  a všechny  $i \geq N$ . Pak pro  $i, j \geq N$  dostaneme  $|a_i - a_j| < |a_i - a| + |a - a_j| < 2\epsilon$ . Odtud:

Každá konvergující posloupnost je Cauchyovská.

Použili jsme tzv. **trojúhelníkovou nerovnost**: Pro každá dvě čísla  $a, b$  platí (v  $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ )

$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

# Hromadné body množin

Cauchyovská posloupnost by se (intuitivně viděno) měla k něčemu „hromadit“, tedy mít svoji limitu. V poli racionálních čísel se může snadno stát, že pro takovéto posloupnosti příslušná hodnota  $a$  neexistuje. Např. číslo  $\sqrt{2}$  můžeme libovolně přesně přiblížit racionálními čísly  $a_i$ , ale samotná odmocnina racionální není. Uspořádaná pole skalárů, ve kterém všechny Cauchyovské posloupnosti konvergují, se nazývají **úplná**. Následující tvrzení říká, že axiom (R13) takové chování zaručuje:

## Lemma

*Každá Cauchyovská posloupnost reálných čísel  $a_i$  konverguje k reálné hodnotě  $a \in \mathbb{R}$ .*

Uvažme nyní jakoukoliv množinu  $A \subset \mathbb{K}$  a posloupnost  $\{a_i\}$  vybranou z prvků  $A$ . Pokud konverguje k hodnotě  $a$  a navíc je nekonečně mnoho bodů  $a_i \in A$  různých od  $a$ , hovoříme o **hromadném bodu** množiny  $A$ .

# Konstrukce reálných čísel

Tento výsledek dává jednu z možností, jak vybudovat reálná čísla. Postupujeme podobně jako při zúplňování přirozených čísel na celá (abychom přidali opačné hodnoty) a celých na racionální (abychom přidali podíly nenulových čísel). Vhodným formálním způsobem zavedeme ekvivalenci na množině všech Cauchyovských posloupností racionálních čísel a tak „přidáme všechny chybějící hromadné body pro podmnožiny racionálních čísel“. Pak se lze již snadno přesvědčit, že všechny požadované axiomy skutečně dojdou naplnění.

# Otevřené a uzavřené množiny

**Uzavřená podmnožina** v  $\mathbb{R}$  je taková, která obsahuje i všechny své hromadné body. Typickou uzavřenou množinou je tzv. **uzavřený interval**

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R}, a \leq x \leq b\}.$$

Zde  $a$  je reálné číslo nebo hraniční hodnota chybí a píšeme  $a = -\infty$  (mínus nekonečno) a podobně  $b > a$  je reálné číslo nebo  $+\infty$ . Uzavřenou množinu bude tvořit i posloupnost reálných čísel bez hromadného bodu nebo posloupnost s konečným počtem hromadných bodů spolu s těmito body. Zjevně je konečné sjednocení uzavřených množin opět uzavřená množina.

**Otevřená množina** v  $\mathbb{R}$  je taková množina, jejíž doplněk je uzavřenou množinou. Typickou otevřenou množinou je **otevřený interval**

$$(a, b) = \{x \in \mathbb{R}, a < x < b\},$$

kde pro hraniční hodnoty máme stejné možnosti jako výše.

# Okolí bodu

**Okolím bodu**  $a \in \mathbb{R}$  nazýváme libovolný otevřený interval  $\mathcal{O}$ , který  $a$  obsahuje.

Je-li okolí definované jako interval

$$\mathcal{O}_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$$

pro kladné číslo  $\delta$ , hovoříme o  $\delta$ -**okolí** bodu  $a$ .

Všimněme si, že pro libovolnou množinu  $A$  je  $a \in \mathbb{R}$  hromadným bodem  $A$ , právě když v libovolném okolí  $a$  leží také alespoň jeden bod  $b \in A$ ,  $b \neq a$ .

## Lemma

*Množina reálných čísel  $A$  je otevřená, právě když každý její bod  $a \in A$  do ní patří i s nějakým svým okolím.*

## Důkaz.

Nechť je  $A$  otevřená a  $a \in A$ . Kdyby neexistovalo žádné okolí bodu  $a$  uvnitř  $A$ , musela by existovat posloupnost  $a_n \notin A$ ,  $|a - a_n| \leq 1/n$ . Pak je ovšem  $a \in A$  hromadným bodem množiny  $\mathbb{R} \setminus A$ , což není možné, protože doplněk  $A$  je uzavřený.

Naopak předpokládejme, že každé  $a \in A$  leží v  $A$  i s nějakým svým okolím. To přirozeně zabraňuje, aby nějaký hromadný bod  $b$  pro množinu  $\mathbb{R} \setminus A$  ležel v  $A$ . Je proto  $\mathbb{R} \setminus A$  uzavřená a tedy je  $A$  otevřená. □

Zjevně je libovolné sjednocení otevřených množin opět otevřenou množinou a každý konečný průnik otevřených množin je opět otevřená množina.

Množina  $A$  reálných čísel se nazývá **ohraničená**, jestliže celá leží v nějakém konečném intervalu  $[a, b]$ ,  $a, b \in \mathbb{R}$ . V opačném případě je **neohraničená**. Ohraničená a uzavřená množina se nazývá **kompaktní**.

Další užitečné pojmy:

**Vnitřním bodem množiny  $A$**  reálných čísel nazveme takový bod, který do  $A$  patří i s nějakým svým okolím.

**Hraniční bod  $a \in A$**  je takový, jehož každé okolí má neprázdný průnik jak s  $A$  tak s doplňkem  $\mathbb{R} \setminus A$ .

**Otevřené pokrytí množiny  $A$**  je takový systém otevřených intervalů  $U_i$ ,  $i \in I$ , že jejich sjednocení obsahuje celé  $A$ .

**Izolovaným bodem množiny  $A$**  rozumíme bod  $a \in A$ , který má okolí, jehož průnik s  $A$  je právě jednobodová množina  $\{a\}$ .

## Theorem

*Pro podmnožiny  $A$  reálných čísel platí:*

- 1  $A$  je otevřená, právě když je sjednocením nejvýše spočetného systému otevřených intervalů,*
- 2 každý bod  $a \in A$  je buď vnitřní nebo hraniční,*
- 3 každý hraniční bod je buď izolovaným nebo hromadným bodem  $A$ ,*
- 4  $A$  je kompaktní, právě když každá v ní obsažená nekonečná posloupnost má podposloupnost konvergující k bodu v  $A$ ,*
- 5  $A$  je kompaktní, právě když každé její otevřené pokrytí obsahuje konečné pokrytí.*



Pro diskusi limit je vhodné rozšířit množinu reálných čísel  $\mathbb{R}$  o dvě nekonečné hodnoty  $\pm\infty$ . Pro tyto účely si zavádíme i pravidla pro počítání s těmito formálně přidanými hodnotami pro libovolná „konečná“ čísla  $a \in \mathbb{R}$ :

$$a + \infty = \infty$$

$$a - \infty = -\infty$$

$$a \cdot \infty = \infty, \text{ je-li } a > 0$$

$$a \cdot \infty = -\infty, \text{ je-li } a < 0$$

Okolím nekonečna rozumíme interval  $(a, \infty)$ , resp.  $(-\infty, a)$  je okolí  $-\infty$ . Pojem hromadného bodu množin rozšiřujeme tak, že  $\infty$  je hromadným bodem množiny  $A \subset \mathbb{R}$  jestliže každé okolí  $\infty$  s ní má neprázdný průnik, tj. jestliže je  $A$  zprava neohrazená. Obdobně pro  $-\infty$ .

# Definice limity

Rozšíříme také pojem okolí do komplexní roviny. Pro kladné reálné číslo  $\delta$  rozumíme  $\delta$ -okolím komplexního čísla  $z \in \mathbb{C}$  množinu  $\mathcal{O}_\delta(z) = \{w \in \mathbb{C}, |w - z| < \delta\}$ .

## Definition

Nechť  $A \subset \mathbb{R}$  je libovolná podmnožina a  $f$  je reálná, resp. komplexní, funkce reálné proměnné definovaná na  $A$  a necht'  $x_0$  je hromadný bod množiny  $A$ . Říkáme, že  $f$  má v  $x_0$  **limitu**  $a \in \mathbb{R}$ , resp.  $a \in \mathbb{C}$  a píšeme

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = a,$$

jestliže pro každé okolí bodu  $\mathcal{O}(a)$  bodu  $a$  lze najít okolí  $\mathcal{O}(x_0)$  bodu  $x_0$  takové, že pro všechny  $x \in A \cap (\mathcal{O}(x_0) \setminus \{x_0\})$  je  $f(x) \in \mathcal{O}(a)$ . Limita reálné funkce se nazývá **nevlastní**, jestliže je  $a = \pm\infty$ , V opačném případě se nazývá **vlastní**.

Je důležité si všimnout, že hodnota  $f$  v bodě  $x_0$  v definici nevystupuje a  $f$  v tomto hromadném bodě vůbec nemusí být definována!

Je zřejmé, že nevlastní limity komplexních funkcí nemohou být definovány.

Limity v případných nevlastních hromadných bodech  $\pm\infty$  definičního oboru reálných i komplexních funkcí však výše uvedenou definicí korektně definovány jsou.

## Příklad 1

Jestliže je  $A = \mathbb{N}$ , tj. funkce  $f$  je definována pouze pro přirozená čísla, hovoříme o **limitách posloupností reálných nebo komplexních čísel**. Jediným hromadným bodem  $A$  je pak  $\infty$  a píšeme pro  $f(n) = a_n$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = a.$$

Podle definice to pak znamená, že pro každé okolí  $\mathcal{O}(a)$  limitní hodnoty  $a$  existuje index  $N \in \mathbb{N}$  takový, že  $a_n \in \mathcal{O}(a)$  pro všechny  $n \geq N$ . Ve skutečnosti jsme tedy v tomto speciálním případě přeformulovali definici konvergence posloupnosti. Říkáme také, že **posloupnost  $a_n$  konverguje k  $a$** .

Přímo z naší definice pro komplexní hodnoty je také vidět, že komplexní posloupnost má limitu  $a$ , právě když reálné části  $\operatorname{re} a$  konvergují k  $\operatorname{re} a$  a zároveň imaginární části konvergují k  $\operatorname{im} a$ .

## Příklad 2

Jestliže je  $f$  definována na intervalu  $A = [a, b]$  a  $x_0$  je vnitřním bodem intervalu, hovoříme o limitě funkce ve vnitřním bodě jejího definičního oboru.

Podívejme se, proč je důležité v definici požadovat  $f(x) \in \mathcal{O}(a)$  pouze pro body  $x \neq x_0$  i v tomto případě. Vezměme jako příklad funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{je-li } x \neq 0 \\ 1 & \text{je-li } x = 0. \end{cases}$$

Pak zjevně limita v nule je dobře definována a  $\lim_{x \rightarrow 0} = 0$ , přestože  $f(0) = 1$  do malých okolí limitní hodnoty 0 nepatří.

## Příklad 3

Je-li  $A = [a, b]$  ohraničený interval a  $x_0 = a$  nebo  $x_0 = b$ , hovoříme o limitě v hraničním bodě definičního oboru funkce  $f$ . Jestliže je ale bod  $x_0$  vnitřním bodem, můžeme pro účely výpočtu limity definiční obor zúžit na  $[x_0, b]$  nebo  $[a, x_0]$ . Výsledným limitám pak říkáme **limita zprava**, resp. **limita zleva** pro funkci  $f$  v bodě  $x_0$ .

Označujeme ji výrazem  $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x)$ , resp.  $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x)$ . Jako příklad nám může sloužit limita zprava a zleva v  $x_0 = 0$  pro Heavisideovu funkci  $h$  ( $h(x) = 0$  pro  $x < 0$ ,  $h(x) = 1$  pro  $x > 0$ ). Evidentně je

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} h(x) = 0.$$

Limita  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  přitom neexistuje. Limita ve vnitřním bodu definičního oboru libovolné reálné funkce  $f$  existuje, právě když existují limity zprava i zleva a jsou si rovny.

## Příklady 4 a 5

Limita komplexní funkce  $f : A \rightarrow \mathbb{C}$  existuje tehdy a jen tehdy, jestliže existují limity její reálné a imaginární části. V takovém případě je pak

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (\operatorname{re} f(x)) + i \lim_{x \rightarrow x_0} (\operatorname{im} f(x)).$$

Nechť  $f$  je reálný nebo komplexní polynom. Pak pro každý bod  $x \in \mathbb{R}$  je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Skutečně, je-li  $f(x) = a_n x^n + \dots + a_0$ , pak roznásobením  $(x_0 + \delta)^k = x_0^k + k\delta x_0^{k-1} + \dots + \delta^k$  a dosazením pro  $k = 0, \dots, n$  vidíme, že volbou dostatečně malého  $\delta$  se hodnotou libovolně blízko přiblížíme  $f(x_0)$ .

## Příklad 6 a 7

Uvažme nyní obzvlášť ošklivou funkci definovanou na celém  $\mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{je-li } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{jestliže } x \notin \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Jistě snadno ověříte, že tato funkce nemá limitu v žádném bodě (dokonce ani zleva nebo zprava).

Ale naše definice jsou ještě záluďnější, než jsme viděli v předchozím případě. Definujme následující funkci  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \text{jestliže } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \text{ } p \text{ a } q \text{ nesoudělná} \\ 0 & \text{jestliže } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

Tato funkce je „spojitá“ ve všech iracionálních bodech a „nespojité“ ve všech racionálních reálných bodech.



# Definice spojitosti funkcí

## Definition

Nechť  $f$  je reálná nebo komplexní funkce definovaná na intervalu  $A \subset \mathbb{R}$ . Říkáme, že  $f$  je **spojitá v bodě**  $x_0 \in A$ , jestliže je

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0).$$

Funkce  $f$  je spojitá na  $A$ , jestliže je spojitá ve ve všech bodech  $x_0 \in A$ .

Všimněme si, že pro hraniční body intervalu  $A$  říká naše definice, že  $f$  v nich má být spojitá zprava, resp. zleva.

Již jsme také viděli, že každý polynom je spojitou funkcí na celém  $\mathbb{R}$ . Totéž platí také pro splajny.