Drsná matematika II – 4. přednáška
Vlastnosti derivací a elementární funkce

Jan Slovák

Masarykova univerzita

12. 3. 2012

Obsah přednášky

Pravidla pro počítání

Theorem

Nechť f a g jsou reálné nebo komplexní funkce definované na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a mající v tomto bodě vlastní derivaci. Potom

1. *funkce f je v bodě x_0 spojitá,*
2. *pro každé reálné nebo komplexní číslo c má funkce $x \mapsto c \cdot f(x)$ derivaci v x_0 a platí*
$$(cf)'(x_0) = c(f'(x_0)),$$
3. *funkce $f + g$ má v x_0 derivaci a platí*
$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

Pravidla pro počítání

Theorem

Nechť f a g jsou reálné nebo komplexní funkce definované na okolí bodu $x_0 \in \mathbb{R}$ a mající v tomto bodě vlastní derivaci. Potom

1. *funkce $f \cdot g$ má v x_0 derivaci a platí*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0),$$

2. *Je-li dále h funkce definovaná na okolí obrazu $y_0 = f(x_0)$, která má derivaci v bodě y_0, má také složená funkce $h \circ f$ derivaci v bodě x_0 a platí*

$$(h \circ f)'(x_0) = h'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Intuitivně můžeme pravidlům velice snadno rozumět, když si derivaci funkce $y = f(x)$ představíme jako podíl přírůstků závislé proměnné y a nezávislé proměnné x:

$$f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Samozřejmě pak při $y = h(x) = f(x) + g(x)$ je přírůstek y dán součtem přírůstků f a g a přírůstek závislé proměnné zůstává stejný. Je tedy derivace součtu součtem derivací.
U součinu musíme být malinko pozornější. Pro $y = h(x) = f(x)g(x)$ je přírůstek

$$\begin{aligned}\Delta y &= f(x+\Delta x)g(x+\Delta x) - f(x)g(x)\\ &= f(x+\Delta x)(g(x+\Delta x) - g(x)) + (f(x+\Delta x) - f(x))g(x)\end{aligned}$$

Nyní ale když budeme zmenšovat přírůstek Δx, jde vlastně o výpočet limity součtu součinů a o tom už víme, že jej lze počítat jako součet součinů limit. Proto z naší formulky lze očkávat pro derivaci součinu fg výraz $fg' + f'g$.

Ještě zajímavější je to pro derivaci složené funkce $g = h \circ f$, kde definiční obor funkce $z = h(y)$ obsahuje obor hodnot funkce $y = f(x)$. Opět vypsáním přírůstků dostáváme

$$g' = \frac{\Delta z}{\Delta x} = \frac{\Delta z}{\Delta y}\frac{\Delta y}{\Delta x}.$$

Můžeme tedy očekávat, že pravidlo pro výpočet bude $(h \circ f)'(x) = h'(f(x))f'(x)$.

Důsledek

Nechť f a g jsou reálné funkce, která mají v bodě x_0 vlastní derivace a $g(x_0) \neq 0$. Pak pro funkci $h(x) = f(x)(g(x))^{-1}$ platí

$$h'(x_0) = \left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0) - f(x_0)g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Důkaz.

Nejprve pro $h(x) = x^{-1}$ přímo z definice:

$$h'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\frac{1}{x+\Delta x} - \frac{1}{x}}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x - x - \Delta x}{\Delta x(x^2 + x\Delta x)} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-1}{x^2 + x\Delta x}.$$

Z pravidel pro počítání limit okamžitě dostáváme

$$h'(x_0) = -x^{-2}.$$

Nyní pravidlo pro derivaci složené funkce říká, že $(g^{-1})' = -g^2 \cdot g'$ a konečně pravidlo pro derivaci součinu nám dává právě kýžený vzorec:

$$(f/g)' = (f \cdot g^{-1})' = f'g^{-1} - fg^{-2}g' = \frac{f'g - gf'}{g^2}.$$

□

Derivace inverzních funkcí

Již dávno jsme formulovali pojem **inverzní funkce**: Pokud k dané funkci $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ inverzní funkce f^{-1} existuje (nezaměňujme značení s funkcí $x \mapsto (f(x))^{-1}$), pak je dána jednoznačně kterýmkoliv ze vztahů

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}, \quad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}},$$

a druhý již pak platí také. Pokud je f definováno na podmnožině $A \subset \mathbb{R}$ a $f(A) = B$, je existence f^{-1} podmíněna stejnými vztahy s identickými zobrazeními id_A resp. id_B na pravých stranách.
Pokud bychom věděli, že pro diferencovatelnou funkci f je i f^{-1} diferencovatelná, pravidlo pro derivaci složené funkce nám říká

$$1 = (\mathrm{id})'(x) = (f^{-1} \circ f)'(x) = (f^{-1})'(f(x)) \cdot f'(x)$$

a tedy přímo víme formuli (zjevně $f'(x)$ v takovém případě nemůže být nulové)

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

To dobře odpovídá intuitivní představě, že pro $y = f(x)$ je $f' = \frac{\Delta y}{\Delta x}$ zatímco pro $x = f^{-1}(y)$ je $(f^{-1})'(y) = \frac{\Delta x}{\Delta y}$. Takto skutečně můžeme derivace inverzních funkcí počítat:

Theorem

Je-li f diferencovatelná funkce na okolí bodu x_0 a $f'(x_0) \neq 0$, pak existuje na nějakém okolí bodu $y_0 = f(x_0)$ funkce f^{-1} inverzní k f a platí vztah

$$(f^{-1})'(f(x)) = \frac{1}{f'(x)}.$$

Pokud je $f'(x_0) = 0$ izolovaným nulovým bodem derivace $f'(x)$ a inverzní funkce k f na okolí $f(x_0)$ existuje, pak limity zprava i zleva funkce f' jsou v bodě x_0 nevlastní.

Definition

Říkáme, že reálná nebo komplexní funkce f má v bodě x_0 derivaci druhého řádu v bodě x_0, jestliže derivace f' existuje na nějakém okolí bodu x_0 a existuje její derivace v bodě x_0. Píšeme

$$f''(x_0) = (f')'(x_0)$$

nebo také $f^{(2)}(x_0)$. Funkce f je **dvakrát diferencovatelná** na nějakém intervalu A, jestliže má druhou derivaci v každém jeho bodě.

Derivace vyšších řádů definujeme induktivně. Známe již pojem první a druhá derivace a říkáme, že reálná nebo komplexní funkce f je ***k*-krát diferencovatelná** pro nějaké přirozené číslo k v bodě x_0, jestliže je $(k-1)$-krát diferencovatelná na nějakém okolí bodu x_0 a její $(k-1)$-ní derivace má v bodě x_0 derivaci.

Pro k-tou derivaci funkce $f(x)$ užíváme značení $f^{(k)}(x)$.

Jestliže existují derivace všech řádů na intervalu, říkáme, že je tam funkce f **hladká**. Většinou se také užívá konvence, že 0-krát diferencovatelná funkce znamená spojitá funkce. Používáme pro takové funkce označení **třída funkcí** $C^k(A)$ na intervalu A, kde k může nabývat hodnot $0, 1, \dots, \infty$. Často píšeme pouze C^k, je-li definiční obor znám z kontextu.

Výsledkem derivování polynomu je opět polynom, ale derivací se vždy o jedničku snižuje jeho stupeň, dostaneme po konečném počtu derivací nulový polynom. Přesněji řečeno, právě po $k+1$ derivacích, kde k je stupeň polynomu, dostaneme nulu. Samozřejmě pak existují derivace všech řádů, tj. $f \in C^\infty(\mathbb{R})$. Racionální funkce lomené budou nekonečně diferencovatelné ve všech bodech svého definičního oboru.
Při konstrukci splajnů jsme pohlídali, aby výsledné funkce byly třídy $C^2(\mathbb{R})$. Jejich třetí derivace budou po částech konstantní funkce. Proto nebudou splajny patřit do $C^3(\mathbb{R})$, přestože jejich všechny derivace vyšších řádů budou nulové ve všech vnitřních bodech jednotlivých intervalů v interpolaci. Promyslete si podrobně tento příklad!

Zatím máme shromážděny ctyři typy funkcí:

- polynomy f definované na celém $\mathbb{R}$ s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo v $\mathbb{C}$,
- racionální funkce f/g definované na celém $\mathbb{R}$ kromě nejvýše konečné množiny kořenů polynomu g ve jmenovateli zlomku, s hodnotami v $\mathbb{R}$ nebo $\mathbb{C}$,
- mocninné funkce x^b s obecným $b \in \mathbb{R}$, definované pro $x > 0$ a hodnotami v $\mathbb{R}$,
- exponenciální funkce a^x o libovolném základu $a > 0$ definované pro všechna $x \in \mathbb{R}$ a s hodnotami v $\mathbb{R}$.

Polynomy

Naše nástroje pro výpočet derivací se hodí při diskusi kořenů polynomů: Předně platí tzv. **základní věta algebry**:

Theorem

Každý nenulový komplexní polynom $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ stupně alespoň jedna má kořen.

Nutně tedy polynom stupně $k > 0$ má právě k kořenů včetně násobností a můžeme jej vždy psát jednoznačně ve tvaru

$$f(x) = (x - a_1)^{c_1} \cdot (x - a_q)^{c_q}$$

kde $a_1, \dots, a_q$ jsou všechny kořeny polynomu f a $1 \leq c_1, \dots, c_q \leq k$ jsou jejich násobnosti.

Derivací dostaneme

$$f'(x) = c_1(x-a_1)^{c_1-1}\dots(x-a_q)^{c_q}+\dots+c_q(x-a_1)^{c_1}\dots(x-a_q)^{c_q-1}.$$

Jestliže je $c_1 = 1$, bude hodnota derivace f' v bodě a_1 nenulová, protože první člen výrazu je nenulový, zatímco všechny zbývající po dosazení hodnoty $x = a_1$ zmizí. Oddobně to bude i s ostatními kořeny. Ověřili jsme tedy užitečnou vlastnost, že kořen a polynomu f je vícenásobný tehdy a jen tehdy, když je zároveň kořenem derivace f'.

Protože polynomy jen zřídka jsou výhradně rostoucí nebo klesající funkce, nebudou k nim existovat globálně definované inverzní funkce. Inverzní funkce k polynomu f ale existují na každém intervalu mezi kořeny derivace f'. Tam je derivace polynomu je nenulová a nemění znaménko. Tyto inverzní funkce nebudou nikdy polynomy, až na případ polynomů stupně jedna.
U polynomu druhého řádu např. $y = ax^2 + bx + c$ vede k formuli

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4a(c-y)}}{2a},$$

a inverze tedy existuje (a je dána touto formulí) jen pro x na intervalech $(-\infty, -\frac{b}{2a})$, $(-\frac{b}{2a}, \infty)$.
Pro práci s inverzními funkcemi k polynomům nevystačíme s našimi funkcemi a dostáváme v našem zvířetníku nové přírůstky.

Racionální funkce

Všechny racionální funkce jsou také třídy C^∞ ve všech bodech svého definičního oboru. Jejich derivace se snadno počítá pomocí formule pro derivaci podílu. Samozřejmě bude také racionální funkcí.
Inverze také budou jako u polynomů existovat obecně jen lokálně a jsou novými přírůstky do našeho společenstva funkcí.

Mocninné funkce

Obecnou mocninou funkci není tak snadné zderivovat, i když bychom mohli věřit, že formulka $(x^a)' = ax^{a-1}$ známá pro přirozená a bude platit i pro obecné a. K tomu totiž máme dobrý důvod, protože ji umíme přímo ověřit pro racionální $a = p/q$:
Je-li a celé a záporné, pak tvrzení přímo vidíme z věty o složené funkci:

$$(x^{-n})' = ((x^n)^{-1})' = -(x^n)^{-2} n x^{n-1} = -nx^{-2n+n-1} = -nx^{-n-1}.$$

Pokračujme dále s odmocninami, tj. $a = 1/q$. Pišme $x = h(y) = y^{1/q}$, $y = x^q$ a počítejme podle věty o derivaci inverzní funkce

$$h'(y) = \frac{1}{q}\frac{1}{x^{q-1}} = \frac{1}{q}y^{-(q-1)/q} = \frac{1}{q}y^{1/q-1}.$$

Pro obecné racionální $a = p/q$ máme

$$(x^{p/q})' = ((x^{1/q})^p)' = p(x^{1/q})^{p-1}\frac{1}{q}x^{1/q-1} = \frac{p}{q}x^{p/q-1}.$$

Nyní bychom mohli zvládnout důkaz platnosti formule pomocí spojitosti definice mocninné funkce x^a v parametru a. Vrátíme se raději k důkazu z jiného pohledu za malou chvíli.

Funkce $f(x) = x^0 = 1$ má samozřejmě derivaci nulovou, pro všechny jiné hodnoty $a \neq 0$ je derivace $f'(x) = ax^{a-1}$ nenulová. Je záporná pro $a \in (-\infty, 0)$, kladná pro $a \in (0, \infty)$. Proto je mocninná funkce na celém definičním oboru $x \in (0, \infty)$ klesající v prvém případě a rostoucí v druhém. Její inverzní funkce je opět mocninnou funkcí.

Exponenciální funkce

Zbývají nám funkce $f(x) = a^x$. Pokud existuje $(a^x)'$ ve všech bodech x, pak jistě platí

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{x+\Delta x} - a^x}{\Delta x} = a^x \lim_{\Delta x \to 0} \frac{a^{\Delta x} - 1}{\Delta x} = f'(0)a^x.$$

Naopak, pokud existuje derivace v nule, pak tento výpočet ověřuje existenci derivace v kterémkoliv bodě a dává její hodnotu. Zároveň jsme ověřili platnost téhož vztahu pro derivace zprava a zleva.

Zdá se proto, že derivace exponenciálních funkcí jsou úměrné hodnotám s konstantním koeficientem úměrnosti.

Diskutujme derivaci $f'(0)$, tj. výraz

$$\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$$

a předpokládejme, že naše $a > 1$. Naším cílem je najít a tak, aby $f'(0) = 1$.
Z definice a^x pomocí suprem množin hodnot s racionálními x vyplývá, že a^x je na celém svém definičním oboru rostoucí. Pro výpočet derivace zprava stačí dosazovat za x postupně hodnoty $x_n = 1/n$.

$$\lim_{x\to 0_+} \frac{a^x - 1}{x} = \lim_{n\to\infty} \frac{a^{1/n} - 1}{1/n}.$$

$f'(0) = 1$, pokud budeme umět s rostoucím n libovolně dobře přibližovat hodnotu $a^{1/n}$ k hodnotě $1 + 1/n$.

Chceme tedy aby bylo a s rostoucím n libovolně přesně aproximováno hodnotou

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n.$$

Z binomického rozvoje je zřejmé, že pro každé kladné číslo b a přirozené n platí $(1+b)^n > 1 + nb$, dostáváme proto pro dva po sobě jdoucí členy naší posloupnosti podíl

$$\frac{(1+\frac{1}{n})^n}{(1+\frac{1}{n-1})^{n-1}} = \frac{(n^2-1)^n n}{n^{2n}(n-1)} = \left(1-\frac{1}{n^2}\right)^n \frac{n}{n-1} > (1-\frac{1}{n})\frac{n}{n-1} = 1.$$

Je tedy naše posloupnost rostoucí. Zároveň stejným výpočtem ověříme, že posloupnost čísel

$$b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1} = (1+\frac{1}{n})(1+\frac{1}{n})^n$$

je klesající a jistě je $b_n > a_n$.

Ověřili jsme tedy existenci limity poslounosti a_n (a zároveň vidíme, že je rovna limitě klesající posloupnosti b_n).

Definition

Limita

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

je jedním z nejdůležitějších čísel v matematice (vedle nuly, jedničky a Ludolfova čísla π). Nazýváme jej **Eulerovým číslem** e.

Náš postup zároveň ověřil, že existuje derivace v nule zprava exponenciální funkce e^x a je rovna jedné. Proto existuje ve všech bodech x také derivace zprava a je rovna e^x.
Spočteme derivaci zleva pomocí derivací složených funkcí:

$$\lim_{x\to 0_-}\frac{e^x - 1}{x} = \lim_{x\to 0_+}\frac{e^{-x} - 1}{-x} = \left(e^0\right)^{-2} e^0 = 1.$$

Derivace zleva i zprava tedy pro funkci $f(x) = e^x$ existují ve všech bodech a jsou si rovny.

Přirozený logaritmus

Exponenciální funkce e^x všude dobře definována a kladná, proto existuje všude i její funkce inverzní. Označujeme ji $\ln x$ a říkáme jí **přirozený logaritmus** nebo logaritmus se základem e.
Je definována vztahem

$$e^{\ln x} = x.$$

Z vlastností mocninných funkcí:

$$\ln(x \cdot y) = \ln x + \ln y, \quad \ln x^y = y \cdot \ln x.$$

Derivaci přirozeného logaritmu spočteme podle pravidla pro derivaci složené funkce (užíváme již, že e^x je rovno své derivaci, a také definiční vztah pro logaritmus):

$$(\ln)'(y) = (\ln)'(e^x) = \frac{1}{(e^x)'} = \frac{1}{e^x} = \frac{1}{y}.$$

Derivaci obecné exponenciální funkce $f(x) = a^x$ můžeme nyní spočíst takto:

$$(a^x)' = (e^{x \ln a})' = e^{x \ln a}(x \ln a)' = a^x \ln a.$$

Podobně také můžeme konečně ověřit i formuli pro derivaci obecné mocninné funkce pro všechny $x > 0$:

$$(x^a)' = (e^{a \ln x})' = e^{a \ln x}(a \ln x)' = ax^{a-1}.$$

Pro obecnou exponenciální funkci a^x se základem $a \neq 1$, $a > 0$ také existuje všude inverzní funkce. Říkáme jí **logaritmus při základu** a, píšeme $\log_a x$.

Vlastnosti jednotlivých obyvatelů zvířetníku a jejich vztahy:

funkce	**definiční obor**	**třída**	**derivace**	**inverze**
polynomy f	celé $\mathbb{R}$	C^∞	f' opět polynom	f^{-1} existuje jen lokálně a neumíme obecnou formulí
kubické splajny h	celé $\mathbb{R}$	C^2	h' je opět splajn	formule s odmocninami a jen lokálně
racionální funkce f/g	celé $\mathbb{R}$ mimo kořeny g	C^∞	opět racionální funkce: $\frac{f'g-fg'}{g^2}$	existuje jen lokálně a neumíme obecnou formulí

funkce	definiční obor	třída	derivace	inverze
mocninné funkce x^a	interval $(0, \infty)$	C^∞	funkce ax^{a-1}	existuje všude a je opět mocninnou funkcí $y^{1/a}$
exponenciální funkce a^x, $a > 0$, $a \neq 1$	celé $\mathbb{R}$	C^∞	existuje všude a je $\ln a \cdot a^x$	logaritmická funkce $\log_a$