Blackův-Scholesův model, jištění, citlivosti

Martina Pleváková

Black-Scholesův vzorec

- Pro evropskou call a put opci:

$$C = S_0\ \Phi(d_1) - K\ \mathrm{e}^{-rT}\ \Phi(d_1 - \sigma\sqrt{T})$$

$$P(S,T) = Ke^{-rT}\Phi(-d_2) - S\Phi(-d_1)$$

- Kde Φ je distribuční funkce N(0,1)

$$d_1 = \frac{\ln\frac{S_0}{K} + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Proměnné, na nichž závisí hodnota opce

- **Black-Scholes model:**

K . . . realizační cena

S_0 . . . současná cena PA

σ. . . volatilita

T. . . čas expirace

r . . . bezriziková úroková míra

+ . . . přímá úměrnost

− . . . nepřímá úměrnost

	Call	Put
S_0	+	−
K	−	+
T	+	+
r	+	−
σ	+	+

- r: Put opce je potencionální příjem v budoucnosti, pokud roste r, jeho současná hodnota klesá. Call opce je potencionální výdej v budoucnosti
- σ: S rostoucí volatilitou šance velkého růstu i velkého poklesu rostou.Majitel call (put) opce profituje z růstu (poklesu), zatímco při poklesu (růstu)je ztráta omezena opční prémií. σ roste → C (P) roste
- T: Delší čas znamená větší nejistotu (podobně jako u volatility), tedy stejný argument jako pro σ ukazuje, že C a P rostou přímo úměrně T
- V B.-S. vzorci vystupuje jen součin $\sigma\sqrt{T}$, tedy vliv σ a $\sqrt{T}$ je stejný

Jištění opční pozice (hedging)

- Příklad: Banka prodala call opce na 100 000 akcií za 300 000 Kč. $S_0 = 49$, $K = 50$, $r = 0{,}05$, $\sigma = 0{,}2$, $T = 20$ týdnů. Cena opcí je 240 000 Kč. Banka tedy prodala o 60 000 dráž než je teoretická hodnota.Jak se může pojistit proti rizikům a zaručit zisk?
- Zajištění se proti riziku pomocí investice do vhodného instrumentu

1. strategie: Nekrytá pozice (nedělat nic)

- $S_T < 50 \longrightarrow$ neplatí nic, zisk 300 000, opce není uplatněna
- $S_T > 50 \longrightarrow$ např. $S_T = 60$, musí zaplatit $10^5 (S_T - 50)$, tzn. ztráta bude $10^6 - 3 \cdot 10^5 =$ 700 000 Kč
- Velká rizikovost

2. strategie: Krytá pozice

- Banka koupí v čase t = 0 100 000 akcií
- $S_T < 50 \rightarrow$ např. $S_T = 40$, na portfoliu ztratí 900 000 (z opcí má zisk jen 300 000)
  Potenciál pro ztrátu: Pokles ceny PA – prémium z prodeje
- $S_T > 50 \rightarrow$ např. $S_T = 51$, prodá za 50, ale koupila za 49 $\rightarrow$ další zisk

  Růstový potenciál: Prémium z prodeje + rozdíl mezi K a S_o

Statické strategie

- Podle B-S vzorce by cena jištění měla být v průměru 240 000, ale strategie 1 a 2 mají velké výkyvy (rozptyl). Pokud chceme držet blízko 240 000, musíme použít dynamické jištění.

3. strategie: Stop-loss strategie (dynamická)

- Koupíme akcii pokud cena vzroste nad K
- Jakmile klesne cena pod K, opět prodáme
- Pro $S_t < K$ máme nekrytou pozici
- Pro $S_t > K$ máme krytou pozici
- V praxi se nepoužívá

Problém

- Je-li $S_t = K$, nevíme, zda cena poroste nebo bude klesat (hypotéza efektivního trhu). Prakticky musíme kupovat pro $K + \varepsilon$ a prodávat pro $K - \varepsilon$. Pro $\varepsilon \to 0$ očekávaný počet obchodů půjde do ∞ (vlastnost Brownova pohybu, že protne osu x nekonečně mnohokrát v libovolně malém okolí 0). Každá dvojice obchodů je ztráta 2ε.

Lemma

- Nechť W_t je geom. Wienerův proces a nechť $W_{t_o} = K$. Pak v libovolně malém intervalu $(t_o-\varepsilon, t_o+\varepsilon)$ nabývá proces nekonečně mnohokrát hodnoty K. Pro $\varepsilon \to 0$ očekávaný počet obchodů jde do ∞.

4. strategie: Delta a Δ-hedging

- V praxi
- Δ měří rychlost změny opční ceny vzhledem ke změně ceny akcie, tj. $$\Delta = \frac{\partial C}{\partial S}$$
- Δ = 0… Δ-neutrální portfolio
- Hodnota takového portfolia se nemění při malém pohybu ceny akcie.
- Růst S zvyšuje Δ → jištění funguje jen krátký čas, musíme portfolio rebalancovat (prodej akcií + nákup opcí, nebo naopak) → dynamický Δ-hedging
- $\Delta(\mathrm{call}) = \Phi(d_1)$ $\Delta(\mathrm{put}) = \Delta(\mathrm{call}) - 1$

Příklad

- Nechť $\Delta = 0,6$ pro $S_0 = 100$ a $C = 10$. Tedy upsání 20 call opcí můžeme jistit koupením $0,6 \cdot 20 = 12$ akcií. Zisk (ztráta) za opce je jištěna ztrátou (ziskem) z pozice akcií.
- Např. akcie vzroste o 1 Kč $\rightarrow$ zisk 12 Kč na akciích a ztráta $-20 \cdot 0,6 = -12$ Kč na opcích (každá opce jde dolů o 0,6 Kč).
- Δ opční pozice je $0,6 \cdot (-20) = -12$.
- Δ pozice v akciích je $12 \cdot 1 = 12$.
- Celková Δ portfolia je $-12 + 12 = 0$.

Delta portfolia

- π…hodnota portfolia

$$\Delta(\pi) = \frac{\partial \pi}{\partial S}$$

- Nechť portfolio obsahuje w_i i-té opce, pak

$$\Delta(\pi) = \sum_i w_i \cdot \Delta_i$$

- Δ put je vždy záporný
- Transakční náklady: pro 1 opci Δ-hedging neúnosně drahý. Pro velké portfolio je schůdný, je třeba jen jedna transakce

Příklad

- Česká banka má 3 pozice v opcích na euro:
- 1. dlouhou pozici na 10^5 call opcí s K = 27 Kč a T = 3 měsíce. $\Delta = 0{,}533$,
- 2. krátkou pozici na $2 \cdot 10^5$ call opcí s K = 28 Kč a T = 5 měsíců. $\Delta = 0{,}468$,
- 3. krátkou pozici na $5 \cdot 10^4$ put opcí s K = 28 Kč a T = 2 měsíce. $\Delta = -\,0{,}508$.
- $\Delta\ (1+2+3) = 10^5\ (0{,}533) - 2 \cdot 10^5 (0{,}468) - 5 \cdot 10^4 (-0{,}508) = -14\ 900$
- Tedy banka může udělat portfolio Δ-neutrální nakoupením 14 900 Euro.

Theta

- θ meří citlivost portfolia (hodnoty opce) na změnu času, t.j. $$\Theta = \frac{\partial C}{\partial T}.$$

$$\Theta(\text{call}) = -\frac{S_0 \cdot \Phi'(d_1) \cdot \sigma}{2\sqrt{T}} - rK\,\mathrm{e}^{-rT}\Phi(d_2),$$

kde $\Phi'(d_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{{d_1}^2}{2}}$

- Čas je deterministická proměnná,proti plynutí času se nemá cenu jistit. V praxi jako náhražka za Γ.

Gamma

- Γ měří rychlost změny Δ vzhledem ke změně ceny S, tj.

$$\Gamma = \frac{\partial \Delta}{\partial S} = \frac{\partial^2 C}{\partial S^2}$$

- Malé Γ- Δ se mění pomalu, není třeba tak často rebalancovat pro udržení Δ-neutrálního portfolia
- Velké Γ- Δ je citlivé na změny S, častější rebalancování
- Γ měří křivost
- Pro dlouhou pozici je $\Gamma > 0$
- Výpočet:

$$\Gamma(\text{call}) = \frac{\partial \Phi(d_1)}{\partial S_0} = \frac{\Phi'(d_1)}{S_0 \sigma \sqrt{T}}$$

Γ- neutrální portfolio

- Pozice v akcii $\Gamma = 0$
- Potřeba nástroj (např. opce), který má $\Gamma \neq 0$
- Přidání w počtu opcí do portfolia $\Gamma = \Gamma_a + w\Gamma_o$
- Pro $w = -\Gamma_a / \Gamma_o$ dostaneme $\Gamma = 0$ (neutrální portfolio)
- Přidáním opce se změní Δ portfolia. Musíme ještě změnit pozici v akciích

Příklad

- Uvažujeme Δ -neutrální portfolio s $\Gamma = -3000$. Δ a Γ opce jsou 0,62 a 1,5. Pak portfolio bude Γ -neutrální, jestliže přidáme dlouhou pozici v 3000/1,5 = 2000 call opcích. Tím se změní Δ portfolia z 0 na $2000 \cdot 0{,}62 = 1240$. Musíme ještě prodat 1240 akcií, abychom dostali portfolio, které je Δ -neutrální (a současně Γ -neutrální).

Taylorův rozvoj hodnoty portfolia v parametrech

- Připomenutí: Tayl. polynom 2. stupně pro funkci 2 proměnných

$$f(x,y) \doteq f(x_0,y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x-x_0)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x-x_0)(y-y_0) + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(y-y_0)^2$$

- Dále

$$\partial f = \frac{\partial f}{\partial x}\partial x + \frac{\partial f}{\partial y}\partial y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\partial x)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\partial x \partial y + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(\partial y)^2$$

- Pro π, S, t

$$\partial\pi \doteq \underbrace{\frac{\partial\pi}{\partial S}}_{=\Delta}\partial S + \underbrace{\frac{\partial\pi}{\partial t}}_{=\Theta}\partial t + \frac{1}{2}\underbrace{\frac{\partial^2\pi}{\partial S^2}}_{=\Gamma}(\partial S)^2 + \frac{\partial^2\pi}{\partial t\partial S}\partial t\partial S + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\pi}{\partial t^2}(\partial t)^2$$

- Obecně: $\partial\pi \doteq \Delta\partial S + \Theta\partial t + \frac{1}{2}\Gamma(\partial S)^2$
- Δ-neutrální: $\partial\pi \doteq \Theta\partial t + \frac{1}{2}\Gamma(\partial S)^2$
- Δ i Γ-neutrální: $\partial\pi \doteq \Theta\partial t$

Vega

- ν měří citlivost na změnu volatility, tj. $$\mathcal{V}(\text{call}) = \frac{\partial C}{\partial \sigma}.$$
- Platí: $\mathcal{V}(\text{call}) = S_0 \cdot \sqrt{T} \cdot \Phi'(d_1)$
- Velká ν- velká citlivost portfolia na změny volatility
- Pozice v akcii ν =0
- Γ-neutrální portfolio má obvykle nenulové ν a naopak
- Γ i ν neutrální portfolio- nejméně 2 různé deriváty na PA

Příklad

- Uvažujme Δ-neutrální portfolio A s $\Gamma(A) = -5000$ a $\nu(A) = -8000$. Obchodovaná opce O má gamma 0,5, vega 2,0 a delta 0,6. Nechť opce O_2 má gamma 0,8, vega 1,2 a delta 0,5.
- Řešení: Máme-li w opcí O a x opcí O_2, chceme:

  Γ: $-5000 + 0{,}5w + 0{,}8x = 0$

  ν: $-8000 + 2{,}0w + 1{,}2x = 0$

Odtud dostaneme $w = 400$, $x = 6000 \rightarrow \Gamma$, ν neutrální

$\Delta = 400 \cdot 0{,}6 + 6000 \cdot 0{,}5 = 3240$, musíme prodat 3240 akcií, aby bylo portfolio Δ-neutrální

Taylorův rozvoj v proměnných S, t, σ

$$\partial\pi \doteq \frac{\partial\pi}{\partial S}\partial S + \frac{\partial\pi}{\partial t}\partial t + \frac{\partial\pi}{\partial\sigma}\partial\sigma + \frac{1}{2}\frac{\partial^2\pi}{\partial S^2}(\partial S)^2$$

$$= \Delta\partial S + \Theta\partial t + \mathcal{V}\partial\sigma + \frac{1}{2}\Gamma(\partial S)^2$$

- Pro Δ, Γ i ν -neutrální: $\partial\pi \doteq \Theta\partial t$

Rho

- ρ měří změnu hodnoty opce (portfolia) v závislosti na změně úrokové míry.

$$\rho(\mathrm{call}) = \frac{\partial C}{\partial r}$$

- Platí: $\rho(\mathrm{call}) = K \cdot T \cdot \mathrm{e}^{-rT} \cdot \Phi(d_2).$

Vztah mezi Δ, Θ a Γ

- Připomenutí: Black-Scholesova rovnice pro cenu derivátu f (např.: f = C, P, . . .) $$\frac{\partial f}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial f}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial S^2} = r \cdot f$$
- Tedy pro hodnotu π portfolia derivátu dostaneme (na jednu stejnou podkladovou akcii) $$\frac{\partial \pi}{\partial t} + r \cdot S \cdot \frac{\partial \pi}{\partial S} + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \frac{\partial^2 \pi}{\partial S^2} = r \cdot \pi.$$
- Tedy: $$\Theta + r \cdot S \cdot \Delta + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \Gamma = r \cdot \pi.$$
- Pro Δ-neutrální portfolio: $$\Theta + \frac{1}{2}\sigma^2 \cdot S^2 \cdot \Gamma = r \cdot \pi.$$
- Je-li Θ velké kladné, pak Γ je velké záporné a naopak. V Δ-neutrálním portfoliu lze Θ použít jako náhražku Γ.

Děkuji za pozornost