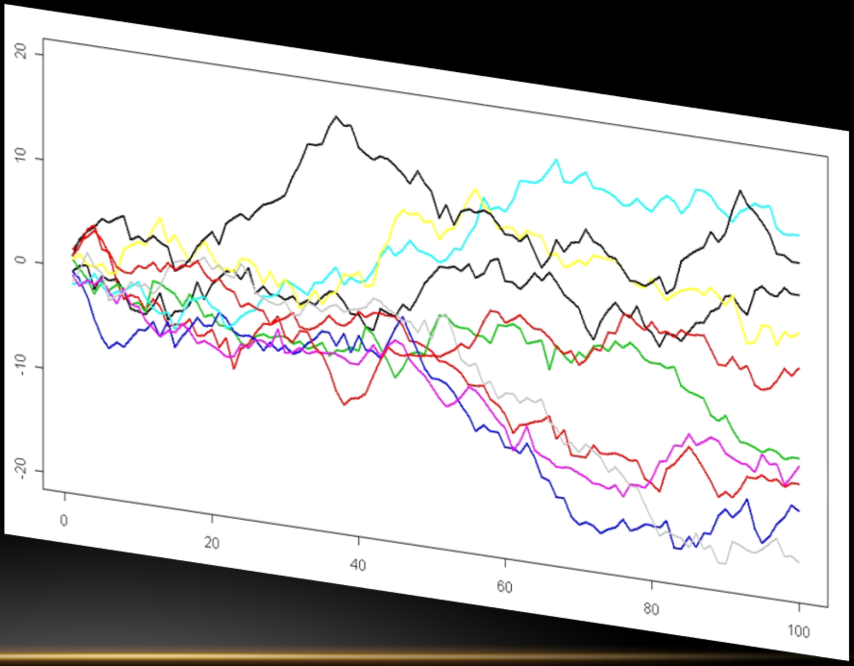
NÁHODNÁ PROCHÁZKA, ZÁKONY ARCSINU, PÓLYOVA VĚTA

Seminář z finanční matematiky

Petr Grätzer

OBSAH

- NÁHODNÁ PROCHÁZKA
  - Jednoduchá náhodná procházka
  - Technika podmíněná prvním krokem
  - Technika počítání trajektorií
- POLYOVA VĚTA
- ZÁKONY ARCSINU
  - 1. zákon
  - 2. zákon

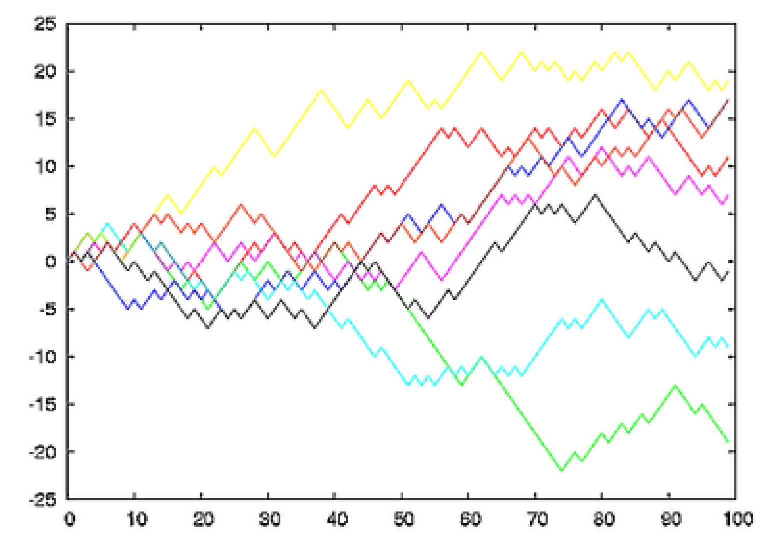


JEDNODUCHÁ NÁHODNÁ PROCHÁZKA

- Jednoduchá náhodná procházka je základem diskrétních modelů pro pohyb cen aktiv. Je to “diskrétní verze“ Brownova pohybu.
- Uvažujme následující hru: Hází se opakovaně mincí (ne nutně férovou). Padne-li hlava (H), získáme 1 Kč. Padne-li orel (O), prohrajeme 1 Kč.
- Označme:
- S_0 ... suma, kterou máme na začátku,
- S_n ... suma, kterou máme po n hrách.
- Tedy platí $S_n = S_o + \sum_{i=1}^{n} X_i$, kde X_i je náhodná veličina popisující výsledek *i*-té hry. Předpokládáme, že pravděpodobnostní funkce X_i je $P(X_i = 1) = p$, $P(Xi = -1) = 1 - p = q$, platí pro všechna *i* a navíc X_i jsou nezávislé.
- **Definice**: Pro všechna pevná *n* je S_n náhodná veličina, tedy $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ je stochastický proces nazývaný ***jednoduchá náhodná procházka***.
- Je-li p = q = ½, nazývá se ***symetrická jednoduchá náhodná procházka***.

JEDNODUCHÁ NÁHODNÁ PROCHÁZKA

- **Grafické znázornění**: Body o souřadnicích (n; S_n) spojené úsečkami. Vzniklá lomená čára se nazývá ***trajektorie*** (cesta) náhodné procházky. Trajektorie je grafické znázornění realizace náhodného procesu $\{S_n\}_{n=0}^{\infty}$.



JEDNODUCHÁ NÁHODNÁ PROCHÁZKA

- **Základní vlastnosti**:
  - Jednoduchá náhodná procházka je ***prostorově homogenní***. To znamená, že

    $P(S_n = j \mid S_0 = a) = P(S_n = j + b \mid S_0 = a + b).$
  - Jednoduchá náhodná procházka je ***časově homogenní***. Tedy

    $P(S_n = j \mid S_0 = a) = P(S_{m+n} = j \mid S_m = a)$
  - Jednoduchá náhodná procházka má ***Markovovu vlastnost***. Tedy

    $P(S_{m+n} = j \mid S_0, S_1, \ldots, S_m) = P(S_{m+n} = j \mid S_m), n \geq 0.$

    Důkaz: Pokud známe S_m pak rozdělení S_{m+n} závisí pouze na krocích $X_{m+1}, \ldots, X_{m+n}$ a nemůže záviset na dřívějších informacích zahrnujících hodnoty $S_0, S_1, \ldots, S_{m-1}$.

JEDNODUCHÁ NÁHODNÁ PROCHÁZKA

Základní techniky pro počítání s náhodnou procházkou:

- **Technika podmíněná prvním krokem**
- **Technika počítání trajektorií**
- **Technika využívající generující funkce**

TECHNIKA PODMÍNĚNÁ 1. KROKEM

- **Příklad („zruinování hráče“)**: Uvažujme předchozí hru s férovou mincí (p =1/2).
  H ... hráč získá 1 Kč, O ... hráč prohraje 1 Kč. Nechť S_0 = K ... počáteční jmění hráče. Hráč si chce koupit auto v ceně N. Bude hrát tak dlouho, dokud S_n = N (koupí auto) nebo S_n = 0 (bankrot).
- Jaká je pravděpodobnost, že hráč koupí auto?
- Uvažujme jevy:

  A ... hráč nakonec zbankrotuje;

  H ... první hod je hlava ($P(\mathbf{H}) = p$);

  O ... první hod je orel ($P(\mathbf{O}) = q$).
- Podle věty o úplné pravděpodobnosti:

$$P(\mathbf{A}) = P(\mathbf{H}) \cdot P(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) + P(\mathbf{O}) \cdot P(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}).$$

TECHNIKA PODMÍNĚNÁ 1. KROKEM

- Označme $P_k(\mathbf{A})$ hledanou pravděpodobnost bankrotu pro dané k:

  $$P_k(\mathbf{A}) = P(\mathbf{H}) \cdot P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) + \mathrm{P}(\mathbf{O}) \cdot P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}).$$

- $P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H})$ ... pravděpodobnost bankrotu v situaci, kdy hráč po 1. kroku má k + 1 (a hra začíná znovu; z nezávislosti X_i), tedy $P_k(\mathbf{A} \mid \mathbf{H}) = P_{k+1}(\mathbf{A})$ a podobně $Pk(\mathbf{A} \mid \mathbf{O}) = P_{k-1}(\mathbf{A})$.
- Označme $p_k = P_k(\mathbf{A})$. Dosazením dostaneme

$$p_k = p \cdot P_{k+1} + q \cdot P_{k-1} = \frac{1}{2} \cdot p_{k+1} + \frac{1}{2} \cdot p_{k-1}$$

$$\frac{1}{2} \cdot (p_{k+1} - p_k) = \frac{1}{2} \cdot (p_k - p_{k-1})$$

tj. přírůstky pravděpodobnosti jsou konstantní. Přírustky p_k - p_{k-1} označíme b, tedy

$$\boldsymbol{p_k = p_0 + k \cdot b.}$$

TECHNIKA PODMÍNĚNÁ 1. KROKEM

- $\boldsymbol{p_k = p_0 + k \cdot b.}$
- Okrajové podmínky pro diferenční rovnici:

  $p_0 = 1$ okamžitý bankrot

  $p_N = 0$ okamžitá koupě auta
- $k = 0 : p_0 = 1$
- $k = N : p_0 + N \cdot b = 0;$
- $1 + N \cdot b = 0 \rightarrow b = {}^{1}/_{N}$

  tedy $p_k = 1 - {}^{k}/_{N}$
- Pro $p \neq 1/2$ musíme vyřešit diferenční rovnici.

TECHNIKA POČÍTÁNÍ TRAJEKTORIÍ

- Zatím jsme používali techniku podmínění prvním krokem procházky. Jiný jednoduchý, ale užitečný způsob je počítání možných trajektorií.

- Nechť X_1, X_2... jsou nezávislé veličiny, každá nabývá hodnot −1 a 1 s pravděpodobností $q = 1 - p$ a p, jako dříve, a nechť $S_n = a + \sum_{i=1}^{n} X_i$ je pozice odpovídající náhodnému chodci po n krocích, startujícímu v $S_0 = a$. Množina realizací procházky je množina vektorů $s = (s_0, s_1,\dots, s_n)$ s $s_0 = a$ a $s_{i+1} - s_i = \pm 1$. Takový vektor můžeme považovat za „trajektorii“ procházky.

- Pravděpodobnost, že prvních n kroků sleduje danou cestu $s = (s_0, s_1,\dots, s_n)$ je $p^r q^l$, kde r je počet kroků vpravo a l je počet kroků vlevo. To znamená, že $r = | \{i : s_{i+1} - s_i = 1\} |$ a $l = | \{i : s_{i+1} - s_i = -1\} |$. Potom např. $\mathrm{P}(S_n = b) = a + \sum_r M_n^r(a,b) p^r q^{n-r}$, kde $M_n^r(a,b)$ je počet cest $(s_0, s_1,\dots, s_n)$ s $s_0 = a$ a $s_n = b$ mající r kroků vpravo. Vidíme, že $r + l = n$ celkový počet kroků a $r - l = a - b$. Tedy $r = \frac{1}{2}(n + b - a)$ a $l = \frac{1}{2}(n - b + a)$. Tedy

TECHNIKA POČÍTÁNÍ TRAJEKTORIÍ

- $$\mathrm{P}(S_n = b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)} p^{\frac{1}{2}(n+b-a)} q^{\frac{1}{2}(n-b+a)}$$
- Protože $\binom{n}{r}$ je počet cest délky *n* mající *r* kroků doprava a *n*−*r* kroků doleva.
- Bude nás zajímat:

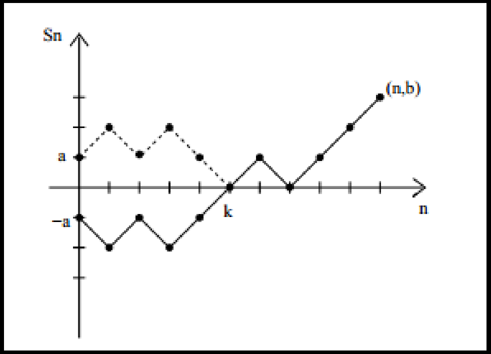
  (a) Kdy se prvek poprvé dostane do daného bodu?

  (b) Jakého nejvzdálenějšího bodu vpravo dosáhne náhodná procházka v čase *n*?

- Tyto otázky můžeme zodpovědět pomocí „**principu odrazu**“. Předpokládejme, že $S_0 = a$, $S_n = b$. Náhodná procházka může a nemusí projít počátkem v čase 0 až *n*. Nechť $N_n(a,b)$ je počet možných cest z *(0, a)* do *(n, b)* a nechť $N_n^0(a,b)$ je počet takových cest, které obsahují nějaký bod *(k, 0)* na ose x.

TECHNIKA POČÍTÁNÍ TRAJEKTORIÍ

- *Věta* (**Princip odrazu/reflexe**). Pokud *a*, *b* > 0, potom $N_n^0(a,b) = N_n(-a,b)$.
- *Důkaz*. Každá cesta z *(0, −a)* do *(n, b)* protne osu x v nějakém dřívějším bodě *(k, 0)*. Odrazem části cesty s *0 ≤ x ≤ k* souměrně podle osy x získáme cestu spojující *(0, a)* a *(n, b)*, která protne osu x.



TECHNIKA POČÍTÁNÍ TRAJEKTORIÍ

- *Lemma*: Pro $N_n(a, b)$ máme, jako již dříve, vzorec:

$$N_n(a,b) = \binom{n}{\frac{1}{2}(n+b-a)}$$

- Následující „věta o hlasování“ je důsledkem předcházejících výsledků. Byla poprvé dokázána W.A.Whitworthem v roce 1878.
- *Věta* (**Věta o hlasování**). Pokud $b > 0$, pak se počet cest z $(0, 0)$ do (n, b), které nepřekročí osu x rovná $\frac{b}{n} N_n(0, b)$.
- Jako aplikaci a vysvětlení názvu věty můžeme odpovědět následující otázku. Předpokládejme, že během voleb kandidát A dostane α hlasů a kandidát B získává β hlasů, kde α > β. Jaká je pravděpodobnost, že bude během voleb A stále před B? Nechť $X_i = 1$, pokud *i*-tý hlas hlasuje pro A, a −1 opačně. Předpokladem, že všechny kombinace α hlasů pro A a β hlasů pro B jsou stejně možné, dostaneme, že tato pravděpodobnost je počet cest z (0, 0) do (α + β, α − β), které nepřekročí osu x. Užitím věty o hlasování dostaneme odpověď $\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}$.

TECHNIKA VYUŽÍVAJÍCÍ GENERUJÍCÍ FCE

2. Stochastické metody
   - Náhodná procházka, Polyova věta, zákony arcsinu,
   - Generující funkce, diskrétní martingaly
   - Wienerův proces, spojité martingaly a filtrace,
   - Stochastický integrál, Itoova a Stratonovičova definice
   - Stochastický kalkulus, Itoovo lemma, řešení jednoduchých integrálních rovnic
   - Ekvivalentní martingalové míry, věrohodnostní poměr, Cameron-Martinova věta
   - Analýza časových řad, stacionární procesy, autokorelační funkce, periodogram

PÓLYOVA VĚTA

- ***Pravděpodobnost návratu částice konající jednoduchou symetrickou náhodnou procházku do své výchozí polohy je rovna 1.***
- *Důkaz*. Předpokládejme, že částice je ve své výchozí poloze v čase t = 0, dále označme P_n pravděpodobnost toho, že se částice v čase $t = n$ vrátí do svého počátku, což nastane v případě, kdy částice vykoná v obou směrech stejný počet kroků. Tedy $P_{2n+1} = 0$ a $P_{2n} = \frac{\binom{2n}{n}}{2^{2n}} = \frac{1}{2^{2n}} \frac{2n!}{(n!)^2}$.
- Použijeme-li nyní Stirlingova vzorce $n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$, dostaneme
- $P_{2n} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi n}}$
- Podle této aproximace je
- $\sum_{n=1}^{\infty} P_{2n} = \infty$

DŮKAZ PÓLYOVY VĚTY

- Abychom ukázali, že se částice skutečně vrátí do své výchozí polohy, musíme vyšetřit délku časového intervalu, po němž se částice do svého počátku poprvé vrátí. Nechť Q_{2n} je pravděpodobnost, že se částice při náhodné procházce vrátí v *2n-tém* kroku poprvé do své původní polohy. Pak zřejmě platí
- $P_{2n} = Q_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1} P_{2k} Q_{2n-2k}$
- V další části důkazu využijeme generující funkce. Položme
- $\mathrm{G}(\mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} P_{2k} x^k$ a $\mathrm{H}(\mathrm{x}) = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{2k} x^k$
- Pak dostaneme
- $\mathrm{G}(\mathrm{x}) = H(x) + G(x)H(x)$
- tedy
- $H(x) = \frac{G(x)}{1+G(x)}$

DŮKAZ PÓLYOVY VĚTY

- Zřejmě platí
- $Q = \sum_{k=1}^{\infty} Q_{2k} = H(1) = \lim_{x \to 1^-} \frac{G(x)}{1+G(x)}$
- kde Q značí pravděpodobnost, že se částice vůbec někdy vrátí do své původní
- polohy. Protože je ale řada $\sum_{k=1}^{\infty} P_{2k}$ divergentní, dostaneme tedy výsledek $Q=1$.

- ***Pravděpodobnost návratu částice konající jednoduchou symetrickou náhodnou procházku do své výchozí polohy je rovna 1.***

ZÁKONY ARCSINU

- Jednou z dalších pomůcek při zkoumání náhodné procházky je tzv. ***zákon arcsinu*** . Zde si uvedeme dvě věty se zajímavými výsledky. Uvažujme částici konající symetrickou náhodnou procházku, jejíž pravděpodobnost návratu do svého počátku v čase 2n je rovna $\binom{2n}{n}2^{-2n}$, označíme P_{2n}. Dá se dokázat, že první návrat částice do svého počátku právě v čase 2n nastane s pravděpodobností $\frac{P_{2n}}{2n-1}$.
- Nyní se podívejme na opačný případ, tedy jaká je pravděpodobnost, že se částice **nevrátí** v čase 2n do svého počátku?
- *Věta 3.1.* Pravděpodobnost toho, že se částice konající symetrickou náhodnou procházku v čase 2n nevrátí do svého počátku, je P_{2n}. Tedy

$$P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = P_{2n}$$

ZÁKONY ARCSINU

- *Důkaz*:
- Víme, že

$$P(S_1 \neq 0, S_2 \neq 0, \dots ,S_{2n} \neq 0) = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{P_{2k}}{2k-1}$$

- Matematickou indukcí ukážeme, že platí rovnost

$$P_{2n} = 1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{P_{2k}}{2k-1}$$

- Pro n = 1 zjistíme, že P_2 =1/2 a obě strany se rovnají. Předpokládejme, že tvrzení platí pro n − 1. Máme

$$1 - \sum_{k=1}^{n} \frac{P_{2k}}{2k-1} = 1 - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{P_{2k}}{2k-1} - \frac{P_{2n}}{2n-1} = P_{2n-2} - \frac{P_{2n}}{2n-1} = P_{2n}$$

tedy platí i pro *n*.

ZÁKONY ARCSINU

- Jestliže nyní upravíme pravděpodobnost P_{2n} pomocí Stirlingovy aproximace $n! \sim n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \sqrt{2\pi n}$, dostaneme

$$P_{2n} \sim \frac{(2n)^{2n+\frac{1}{2}} e^{-2n} \sqrt{2\pi}}{n^{2n+1} e^{-2n} (2\pi) 2^{2n}} = \frac{1}{\sqrt{n\pi}}$$

- což nám při $P_{2n} \rightarrow 0$ a $n \rightarrow \infty$ ukáže již dříve dokázanou skutečnost, a to že s pravděpodobností 1 se symetrická náhodná procházka vrátí do svého počátku.

- Někdy nás ale může zajímat nikoli první, ale *poslední návrat* částice do svého počátku a stejně tak čas setrvání v kladné či záporné (resp. v pravé či levé) části od počátku. Právě k tomu slouží ***zákon arcsinu***.

ZÁKON ARCSINU POSLEDNÍHO NÁVRATU DO POČÁTKU

- *Věta* (Zákon arcsinu posledního návratu do počátku). Nechť $p = 1/2$ a $S_0 = 0$. Pak pravděpodobnost, že v časovém intervalu (0, 2n) se částice konající symetrickou náhodnou procházku vrátí do svého počátku naposledy právě v čase 2k, je rovna $P_{2k}P_{2n-2k}$. Tj.

$$P(S_{2n} = 0 \wedge S_{2k+1} \neq 0, \dots, S_{2n} \neq 0) = P(S_{2k} = 0) \cdot P(S_{2n-2k} = 0)$$

- Ze Stirlingova vzorce máme tedy:

$$P_{2k}P_{2n-2k} \approx \frac{1}{\sqrt{\pi k}} \cdot \frac{1}{\sqrt{\pi(n-k)}} = \frac{1}{\pi\sqrt{k(n-k)}}$$

- a $\pi\sqrt{k(n-k)}$ je maximální pro $k = \frac{n}{2}$. A tedy $P_{2k}P_{2n-2k}$ je minimální pro $k = \frac{n}{2}$.

ZÁKON ARCSINU PRO ČAS SETRVÁNÍ

- *Věta 3.3* (***Zákon arcsinu pro čas setrvání***). Nechť p =1/2 a S_0 = 0. Pak pravděpodobnost, že částice konající symetrickou náhodnou procházku v časovém intervalu (0, 2n) stráví právě 2k časových jednotek v kladné části reálné osy, je (opět) rovna

$$P(S_{2k} = 0) \cdot P(S_{2n-2k} = 0)$$

- Důkaz: učebnice Grimmett, Stirzaker

LITERATURA

1. Grimmett, G. & Stirzaker, D.: Probability and Random Processes. Oxford, New York 2001
2. Kolář, M.: Stochastické procesy ve finanční matematice, Brno, 2009
3. Fárková, L.: Generující funkce a náhodná procházka, bakalářská práce, MU Brno, 2006
4. Bartuňková, M.: Náhodná procházka a její aplikace, bakalářská práce, MU Brno, 2007

DĚKUJI ZA POZORNOST