Statické hry a Nashova rovnováha

Ivica Kopčoková

Teória hier

- Ekonomická vedná disciplína skúmajúca široké spektrum rozhodovacích situácií s viacerými účastníkmi pomocou modelov
- Nielen matematika, na hranici psychológie, biológie a ostatných disciplín
- A. Cournote (1838), model duopolu
- Neumann, Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior (1944)*

Základné pojmy teórie hier	
hra	rozhodovacia situácia, konflikt
hráč	účastník konfliktu (firma, jedinec, politická strana, biologický druh)
stratégia	konkrétna alternatíva, ktorú môže hráč zvoliť
optimálna stratégia	hráčom zvolená stratégia, ktorá je pre neho najvýhodnejšia
priestor stratégií	všetky možné alternatívy, ktoré sú hráčovi dostupné
výplatná funkcia	výsledok hry, tj. úžitok, výhra hráča v závislosti na stratégii
inteligentný hráč	má dokonalé informácie a maximalizuje výhru

Teória úžitku

- Úžitok = stupeň uspokojenia zo spotreby (udalosti) /subjektívny pojem/
- Kardinalistická x ordinalistická teória úžitku

- Úžitková funkcia *u* popisuje hráčovu sústavu preferencií
  $u(a) > u(b)$ ak hráč preferuje *a* pred *b*

- Zachycuje individuálne preferencie, ktoré nie je možné medzi jednotlivcami porovnávať a sčítať

Racionálna voľba

- V každej danej situácii si hráč vyberie najlepšiu stratégiu z množiny stratégii podľa svojich preferencií
- Ak existuje možnosť viacerých rovnako preferovaných stratégií, hráč si vyberie stratégiu podľa preferencií minimálne tak dobrú ako ktorákoľvek iná stratégia

Strategická (normálna) hra

- množina hráčov $\{1,2,\ldots N\}$
- pre každého hráča množina stratégií $\{S_1, S_2, .. S_N\}$
- funkcie výplat $u_i: S_1 \times S_2 \times .. \times S_N \rightarrow R,\ i=(1,2,\ldots N)$

- pojem stratégie je zvyčajne interpretovaný ako "plán akcie“

- profilom stratégií s = $(s_1, s_2, .. s_N)$ nazývame prvok z množiny S = $S_1 \times S_2 \times .. \times S_N$. Predstavuje výber stratégií všetkých hráčov.

- výber stratégií všetkých hráčov okrem hráča i
  $s_{-i} = (s_1, s_2, .., s_{i-1}, s_{i+1}, .., s_N)$

- čisté stratégie x zmiešané stratégie
- Čas neexistuje, hráči sa rozhodujú simultánne, žiadny hráč nie je informovaný o voľbe druhého hráča v čase vlastného rozhodovania

Väzňovo dilema

- Dvaja podozrivý zo závažného zločinu sú držaní v cele. Polícia má dosť dôkazov na usvedčenie z menej závažného činu, ale pokiaľ ani jeden nebude svedčiť, nemá dostatok dôkazov na usvedčenie zo závažného zločinu.
- Ak obaja budú ticho, usvedčia ich z menšieho zločinu a dostanú 1 rok
- Bude svedčiť iba jeden z nich proti druhému, bude voľný, druhý dostane 10 rokov
- Ak obaja prehovoria, dostanú 5 rokov

HRÁČI: 2
MNOŽINA STRATÉGIÍ: {Ticho, Svedok}
PREFERENCIE:

- P1: (Svedok, Ticho) 0 rokov; (Ticho, Ticho) 1 rok; (Svedok, Svedok) 5 rokov; (Ticho, Svedok) 10 rokov
- P2: (Ticho, Svedok) 0 rokov; (Ticho, Ticho) 1 rok; (Svedok, Svedok) 5 rokov; (Svedok, Ticho) 10 rokov

- $u_1(S,T) > u_1(T,T) > u_1(S,S) > u_1(T,S)$
- $u_2(T,S) > u_2(T,T) > u_2(S,S) > u_2(S,T)$

- $u_1(S,T) = 3$
  $u_1(T,T) = 2$
  $u_1(S,S) = 1$
  $u_1(T,S) = 0$
- $u_2(T,S) = 3$
  $u_2(T,T) = 2$
  $u_2(S,S) = 1$
  $u_2(S,T) = 0$

- $u_1(S,T) = 3$
  $u_1(T,T) = 2$
  $u_1(S,S) = 1$
  $u_1(T,S) = 0$

- $u_2(T,S) = 3$
  $u_2(T,T) = 2$
  $u_2(S,S) = 1$
  $u_2(S,T) = 0$

P2

		Ticho	*Svedok*
P1	*Ticho*	2,2	0,3
	Svedok	3,0	1,1

Bach alebo Stravinsky

známa aj ako Súboj pohlaví

- Dvaja ľudia idú na koncert. Jeden preferuje Bacha, druhý Stravinskeho. Nemá pre nich význam ísť na rozdielne koncerty.

HRÁČI: 2
MNOŽINA STRATÉGIÍ: {Bach, Stravinsky}
PREFERENCIE:

- $u_1(B,B) = 2$
  $u_1(S,S) = 1$
  $u_1(B,S) = 0$
  $u_1(S,B) = 0$

- $u_2(S,S) = 2$
  $u_2(B,B) = 1$
  $u_2(S,B) = 0$
  $u_2(B,S) = 0$

	Bach	*Stravinsky*
Bach	2,1	0,0
Stravinsky	0,0	1,2

Mince

- Dvaja hráči naraz hádžu mincou. Ak padne rovnaká strana, H2 dá H1 korunu, ak rozdielne strany potom H1 dá H2 korunu. Každému ide len o vyhranú sumu.

- Antagonistický konflikt: H1 chce rovnakú stranu ako H2, H2 chce presný opak

HRÁČI: 2
MNOŽINA STRATÉGIÍ: {Hlava, Znak}
PREFERENCIE:

- $u_1(H,H) = 1$
  $u_1(Z,Z) = 1$
  $u_1(H,Z) = -1$
  $u_1(Z,H) = -1$

- $u_2(H,H) = -1$
  $u_2(Z,Z) = -1$
  $u_2(H,Z) = 1$
  $u_2(Z,H) = 1$

	Hlava	*Znak*
Hlava	1,-1	-1,1
Znak	-1,1	1,-1

Dominancia

- **Predpoklad: racionalita hráčov**, maximalizácia zisku
- Presvedčenie možno definovať ako pravdepodobnostné rozdelenie nad stratégiami ostatných hráčov. V prípade, že hráč nemá žiadne špeciálne presvedčenie o tom, čo budú jeho súperi hrať, rozdelenie bude rovnomerné.
- V prípade existencie dvoch stratégií, z ktorých jedna je horšia ako druhá bez ohľadu na to, čo bude hrať protihráč si túto stratégiu hráč nikdy nevyberie. V takomto prípade hovoríme o **dominovanej stratégii.**

Definícia 1.1.3 ([3])
Hovoríme, že stratégia $s_i \in S_i$ *hráča* i *je ostro dominovaná, ak existuje taká stratégia* $s_i' \in S_i$ *hráča* i*, že*

$$u_i(s_i', s_{-i}) > u_i(s_i, s_{-i})$$

pre každé $s_{-i} \in S_{-i}$.

- ak nahradíme striktnú nerovnosť neostrou (≤) a existuje aspoň jedna kombinácia stratégií ostatných hráčov, kedy platí striktná nerovnosť, dostaneme definíciu **slabo dominovanej stratégie**

- každý hráč je presvedčený o tom, že žiadny z jeho súperov si nezvolí dominovanú stratégiu
- dominované stratégie z hry odstránime
- po odstránení niektorej resp. niektorých stratégií sa môže stať, že v novovzniknutej hre budú niektoré stratégie dominované, aj keď predtým neboli
- vznikla ďalšia dominovaná stratégia, ktorú na základe predpokladu racionality z hry odstránime. Tento proces sa nazýva **iterovaná dominancia**
- V prípade, že je možné postupným odstraňovaním dominovaných stratégií dôjsť až k jedinému profilu, možno tento považovať za riešenie hry, pretože racionalita hráčov implikuje, že práve tento profil stratégií budú hráči hrať

Nashova rovnováha

- optimálnu stratégiu hráčov v konfliktnej situácii nájdeme pomocou Nashovej rovnováhy. NR je riešenie, v ktorom platí, že pokiaľ sa niektorý z hráčov nebude držať optimálnej stratégie a jeho súper áno, jeho výplata sa zníži
- *„kto sa odchýli od optimálnej stratégie, nemôže si polepšiť"*

Definícia 1.1.6 ([3])
Profil stratégií s^* je Nashovým ekvilibriom hry G v čistých stratégiách, ak pre každého hráča i a pre všetky $s_i \in S$ platí:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \tag{1.4}$$

Definícia 1.1.7 ([3])
Nashovo ekvilibrium s^* v čistých stratégiách je ostré, ak pre každého hráča i a pre všetky $s_i \in S$ také, že $s_i \neq s^*$ platí:

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) > u_i(s_i, s_{-i}^*) \tag{1.5}$$

- Nashove ekvilibrium nemusí byt' Pareto-optimiálne. Toto riešenie môže viest' k výsledku, ktorý aspoň pre jedného z hráčov prinesie nižší úžitok ako niektorý iný výsledok hry

- Nashove ekvilibrium nemusí byt' v hre jedinečné. Ak je v hre viac ekvilibrií, tak hráči nie sú bez dodatočných informácií schopní určiť jedno z nich, podl'a ktorého by sa mali správat'

NE: Väzňovo dilema

		P2	
		Ticho	*Svedok*
P1	*Ticho*	2,2	0,3
	Svedok	3,0	1*,1*

- *(Ticho, Ticho)* nespĺňa NE, ak si P2 vyberie *Ticho*, výplata P1 pri *Svedok* predčí výplatu pri *Ticho*. Jeden z hráčov sa môže odchýliť a prilepšiť si
- *(Svedok, Ticho)* nespĺňa NE, ak si P1 vyberie *Svedok*, výplata P2 pri *Svedok* predčí tú pri *Ticho*
- *(Ticho, Svedok)* nespĺňa NE, ak si P2 vyberie *Svedok*, výplata P1 pri *Svedok* predčí tú pri *Ticho*

NE: Bach vs Stravinsky

	Bach	*Stravinsky*
Bach	2*,1*	0,0
Stravinsky	0,0	1*,2*

- *(Bach, Bach)* a *(Stravinsky, Stravinsky)* odchýlenie sa hociktorého hráča znamená pre neho stratu
- *(B,S) a (S,B)* jeden z hráčov si odchýlením od súčasnej stratégie prilepší

NE: Bach vs Stravinsky

zmena: obaja preferujú Bacha pred Stravinskym

	Bach	*Stravinsky*
Bach	2*,2*	0,0
Stravinsky	0,0	1*,1*

- *opäť dve NE*
- *(B,B) je viac preferované NE, ale ak dospejú do NE (S,S) ani jeden z hráčov nemá dôvod odkloniť sa od stratégie*

Stratégia optimálnej odpovede (BR)

Definice 1.1.14 (Strategie optimální odpovědi (Best response)) *Nechť* $s^* = (s^*_{-i}, s^*_i) \in S$ *je profil strategií. Strategii* s^*_i *nazýváme* optimální odpovědí *na* s^*_{-i}, *pokud*

$$u_i(s^*_{-i}, s^*_i) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s^*_{-i}, s_i).$$

Množinu všech optimálních odpovědí na s^*_{-i} *značíme* $B(s^*_{-i})$, *tj.*

$$B(s^*_{-i}) = \{s'_i \in S_i : u_i(s^*_{-i}, s'_i) = \max_{s_i \in S_i} u_i(s^*_{-i}, s_i)\}$$

- pojem **optimálna odpoveď** použijeme k definícii NE
- V rovnováhe žiadny z hráčov nemá dôvod (motiváciu) svoji stratégiu jednostranne meniť. To nastáva v prípade, že každý z hráčov volí optimálnu odpoveď na stratégie ostatných hráčov
- BR nie je nič iné ako "zlúčenie" najlepších odpovedí každého hráča do jediného zobrazenia prislúchajúceho všetkým hráčom

Nájdite NE pomocou BR

	L	C	R
T	1,2	2,1	1,0
M	2,1	0,1	0,0
B	0,1	0,0	1,2

Nájdite NE pomocou BR

	L	C	R
T	1,2	2,1	1,0
M	2*,1	0,1	0,0
B	0,1	0,0	1,2

Nájdite NE pomocou BR

	L	C	R
T	1,2	2*,1	1,0
M	2*,1	0,1	0,0
B	0,1	0,0	1,2

Nájdite NE pomocou BR

	L	C	R
T	1,2	2*,1	1*,0
M	2*,1	0,1	0,0
B	0,1	0,0	1*,2

Nájdite NE pomocou BR

	L	C	R
T	1,2*	2*,1	1*,0
M	2*,1	0,1	0,0
B	0,1	0,0	1*,2

Nájdite NE pomocou BR

	L	C	R
T	1,2*	2*,1	1*,0
M	2*,1*	0,1*	0,0
B	0,1	0,0	1*,2

Nájdite NE pomocou BR

	L	C	R
T	1,2*	2*,1	1*,0
M	2*,1*	0,1*	0,0
B	0,1	0,0	1*,2*

Nájdite NE pomocou BR

	L	C	R
T	1,2*	2*,1	1*,0
M	2*,1*	0,1*	0,0
B	0,1	0,0	1*,2*