Přednáška IV.
Náhodná veličina, rozdělení pravděpodobnosti a reálná data

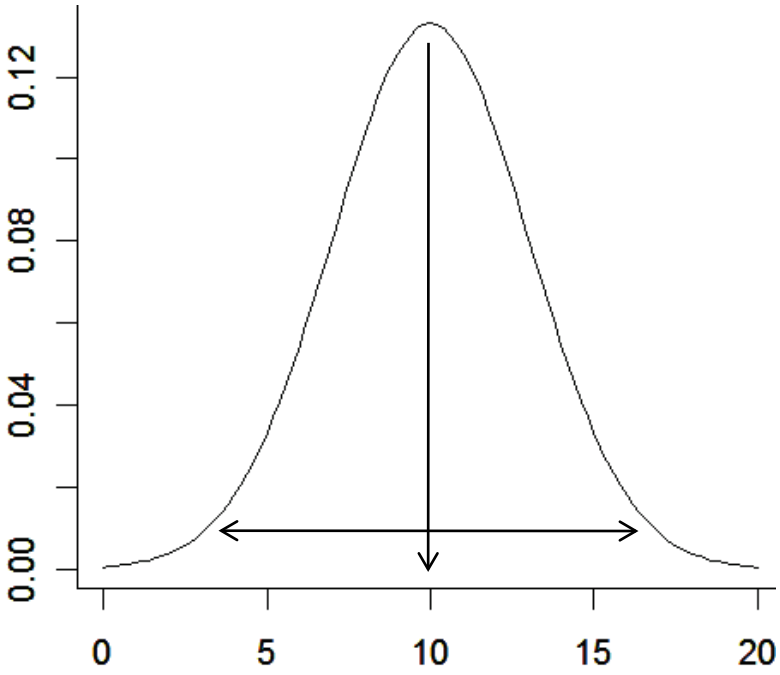
- Náhodná veličina
- Rozdělení pravděpodobnosti náhodných veličin
- Normální rozdělení a rozdělení příbuzná
- Transformace náhodných veličin

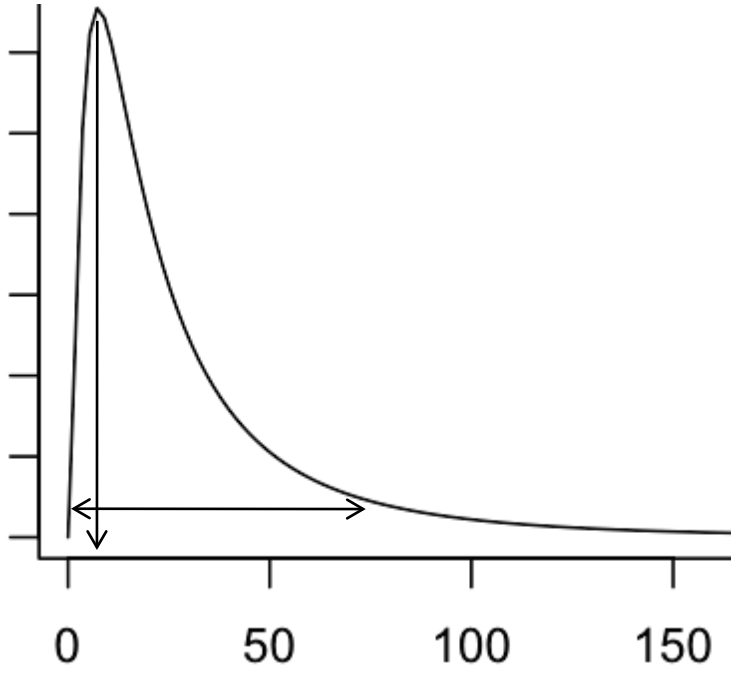
Opakování – typy dat

- Jaké znáte typy dat?
- Uveďte příklady…

Opakování – popis dat

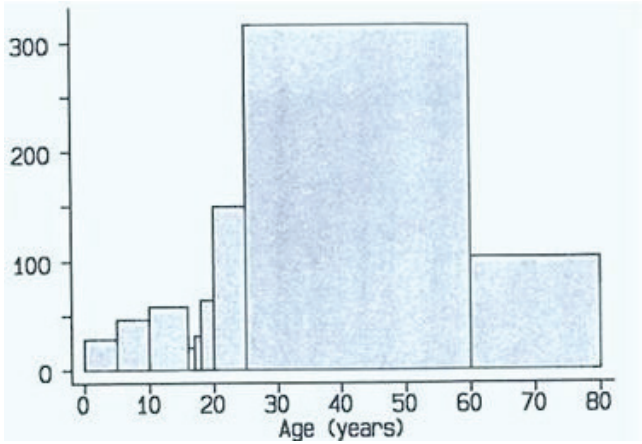
- Co chceme u dat popsat?
- Jak to můžeme udělat?

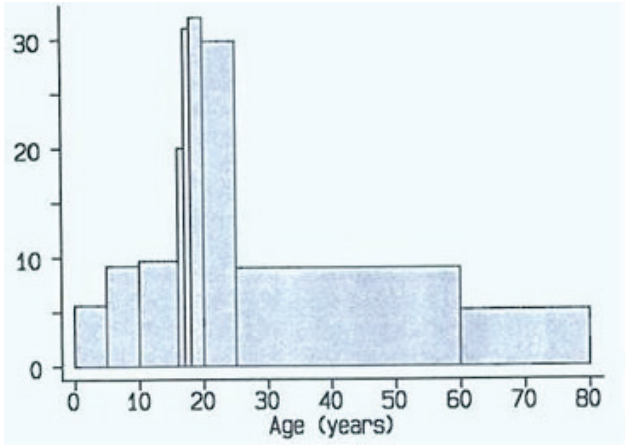




Opakování – který histogram je správný a proč?

- Chceme pomocí histogramu vykreslit počty zraněných při automobilových haváriích na předměstí Londýna v roce 1985. Data máme zadána jako počty v daných věkových kategoriích.





1. Náhodná veličina

Pojem náhodná veličina

- Číselné vyjádření výsledku náhodného pokusu. Matematicky je to funkce, která každému elementárnímu jevu ω z Ω přiřadí hodnotu *X*(ω) z nějaké množiny možných hodnot.

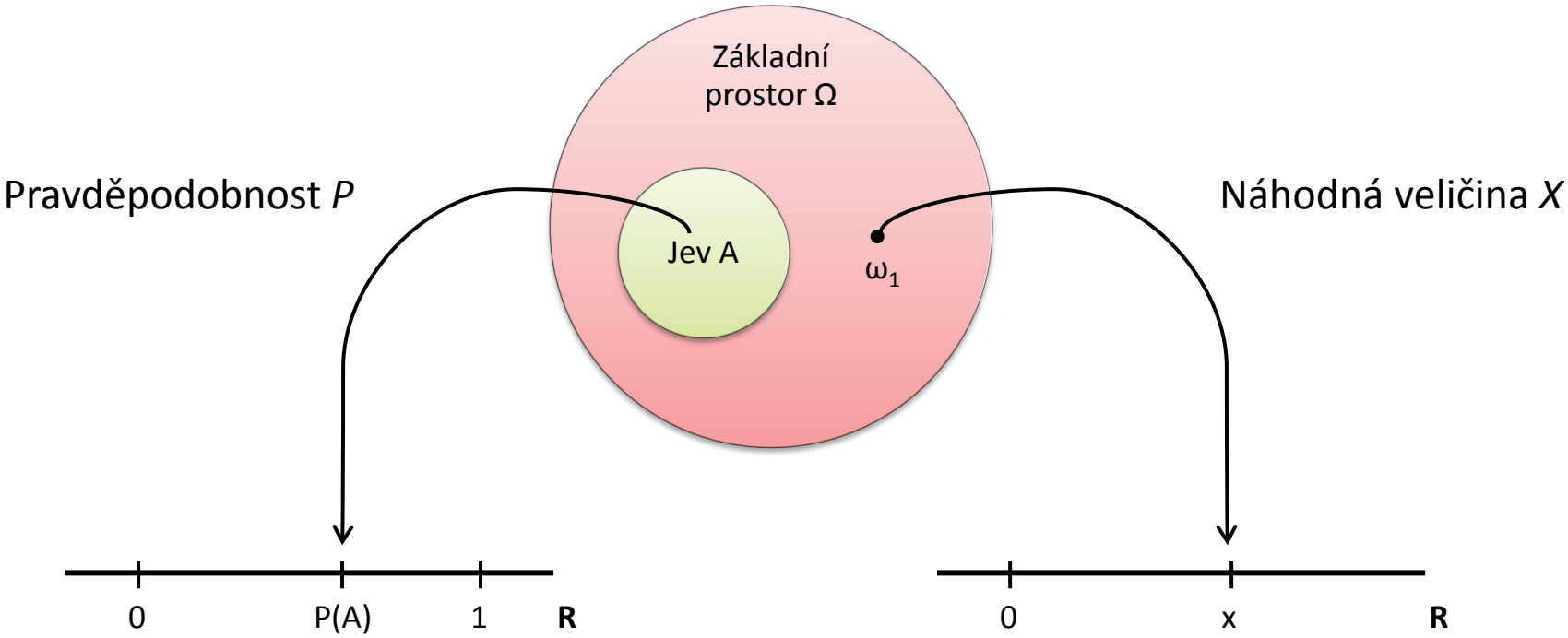
$$X : \Omega \to R$$

- Náhodná veličina se netýká pouze kvantitativních proměnných. Číselné vyjádření výsledku náhodného pokusu může popisovat i pohlaví.

- Chování náhodné veličiny lze popsat pomocí rozdělení pravděpodobnosti:
  - Funkce zadaná analyticky
  - Výčet možností a příslušných pravděpodobností

Význam náhodných veličin

- **Množina Ω často není známa** (může být i nekonečná) a nejsme tak schopni ji popsat. Náhodná veličina převádí Ω na čísla, se kterými se pracuje lépe.
- Neznáme-li Ω, nejsme schopni popsat ani *X*, ale **jsme schopni ho pozorovat**.



Pravděpodobnostní chování náhodné veličiny

- Pravděpodobnostní chování náhodné veličiny je jednoznačně popsáno tzv. **rozdělením pravděpodobnosti** náhodné veličiny .

- **Rozdělením náhodné veličiny *X*** definované na prostoru s pravděpodobností *P* **rozumíme předpis**, který jednoznačně určuje všechny pravděpodobnosti typu

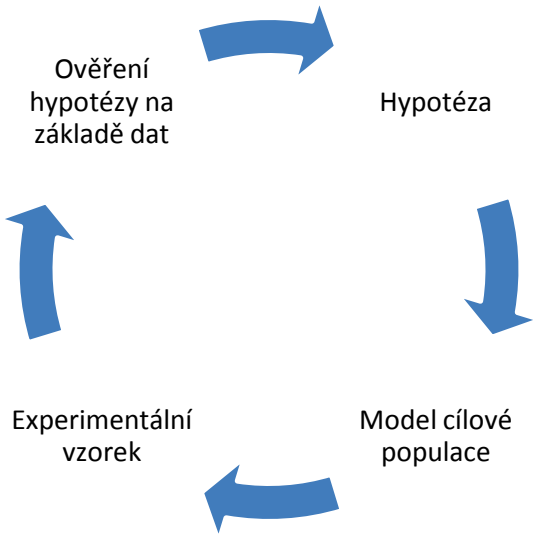
$$P_X(B) = P(X \in B) = P(\omega_i \in \Omega : X(\omega_i) \in B)$$

  pro každou $B \subset R$.

- Distribuční funkce
- Hustota – spojité náhodné veličiny
- Pravděpodobnostní funkce – diskrétní náhodné veličiny

Opět vztah populace × vzorek

- Rozdělení pravděpodobnosti představuje model cílové populace.
- Pomocí vzorku (naměřených pozorování) se ptáme, jestli byl model správný – snažíme se z dat usuzovat na vlastnosti tohoto rozdělení pravděpodobnosti.



Popis rozdělení pravděpodobnosti

- Distribuční funkce popisuje rozdělení pravděpodobnosti kumulativním způsobem.
- Hustota a pravděpodobnostní funkce popisují rozdělení pravděpodobnosti pro jednotlivé „body“ (respektive intervaly) na reálné ose.

- Distribuční funkce a hustota, respektive pravděpodobnostní funkce, jsou navzájem ekvivalentní, tedy známe-li jednu nepotřebujeme druhou.

Distribuční funkce

- Vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná veličina X nepřekročí dané x na reálné ose.

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\omega_i \in \Omega : X(\omega_i) \leq x)$$

- Vlastnosti distribuční funkce?

Distribuční funkce

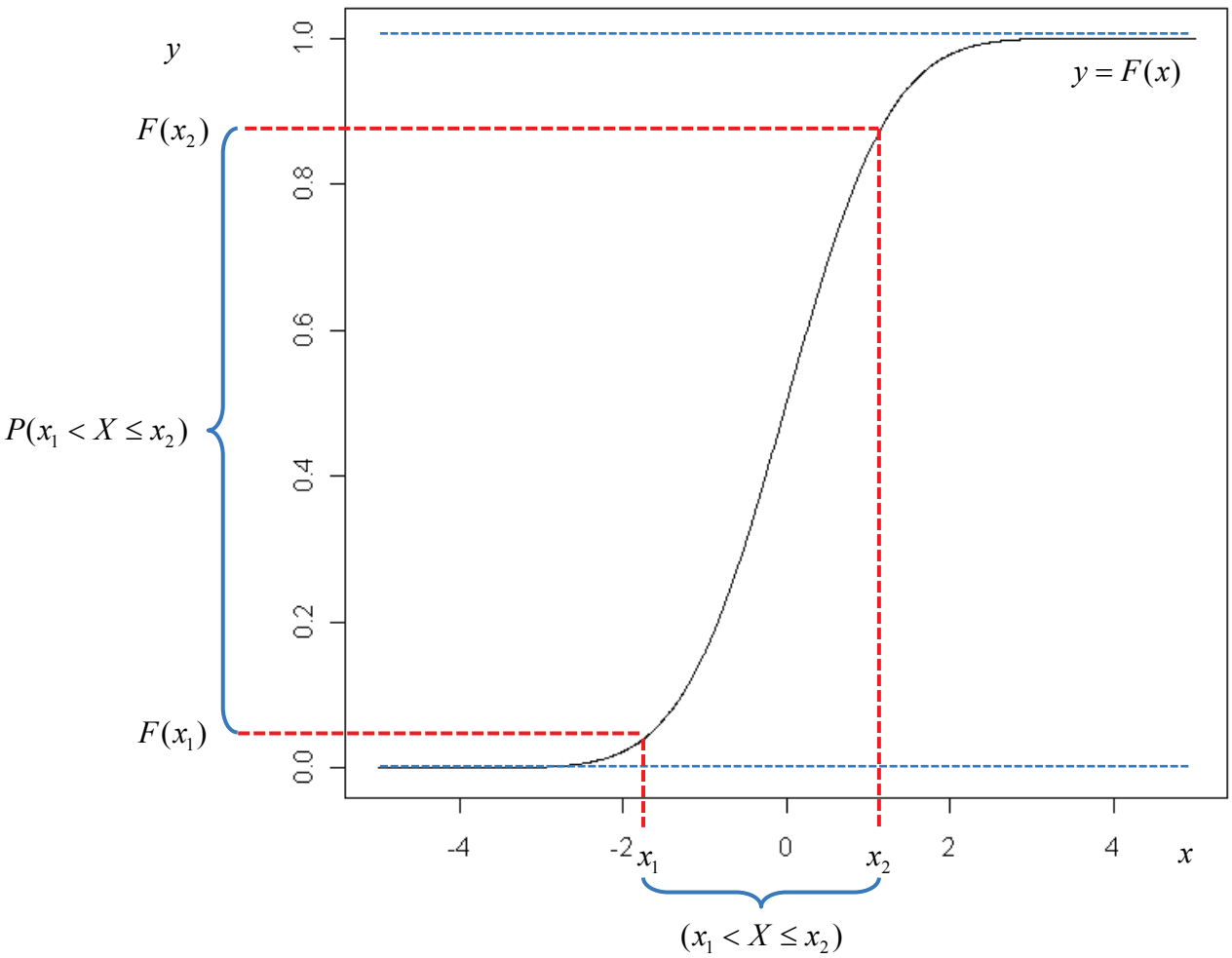
- Vyjadřuje pravděpodobnost, že náhodná veličina X nepřekročí dané x na reálné ose.

$$F(x) = P(X \leq x) = P(\omega_i \in \Omega : X(\omega_i) \leq x)$$

- Vlastnosti distribuční funkce:

1. Neklesající
2. Zprava spojitá
3. $0 \leq F(x) \leq 1$
4. $F(x) \to 0 \text{ pro } x \to -\infty$
5. $F(x) \to 1 \text{ pro } x \to \infty$

Distribuční funkce



Distribuční funkce – příklad

- Uvažujme 5 hodů mincí. Náhodná veličina *X* představuje počet líců.
- Jak vypadá distribuční funkce *X*?

Distribuční funkce – příklad

- Uvažujme 5 hodů mincí. Náhodná veličina *X* představuje počet líců.
- Jak vypadá distribuční funkce *X*?

X = {0, 1, 2, 3, 4, 5}

P(0) = 1 / 32

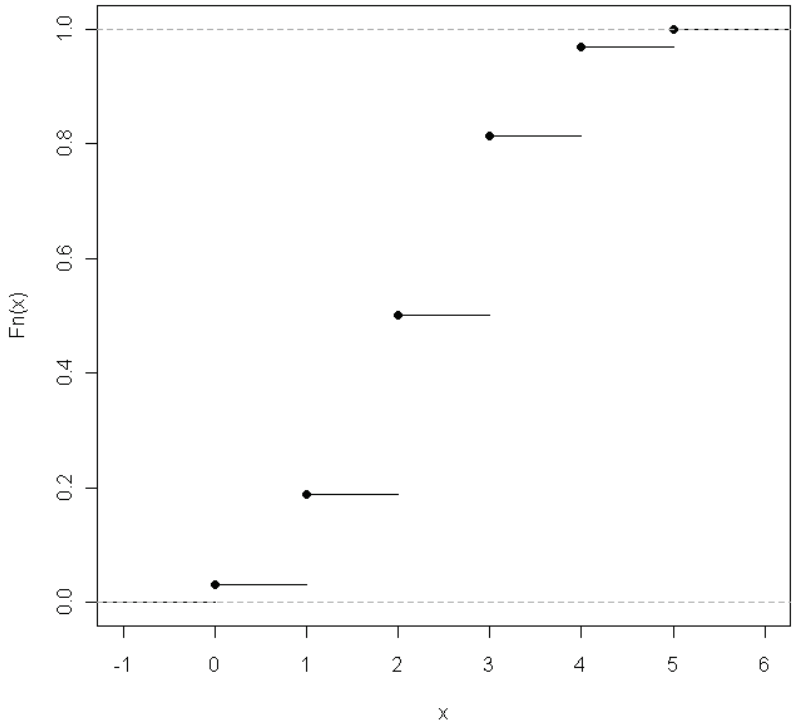
P(1) = 5 / 32

P(2) = 10 / 32

P(3) = 10 / 32

P(4) = 5 / 32

P(5) = 1 / 32



Výběrová distribuční funkce

- **Distribuční funkce je teoretická záležitost**, která definuje pravděpodobnostní model pro náhodnou veličinu *X*. Často neznáme její přesné vyjádření.
- **Výběrová distribuční funkce je charakteristika pozorovaných dat**. Je odhadem teoretické distribuční funkce (je-li vzorek reprezentativní).

- Vyjádření:

$$F_n(x) = \frac{\#(x_i \leq x)}{n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} I(x_i \leq x)$$

Výběrová distribuční funkce – příklad

- Výška studentů 2. ročníku Matematické biologie

Spojité a diskrétní náhodné veličiny

- Náhodné veličiny dělíme dle podstaty na:
- **Spojité** – mohou nabývat všech hodnot v daném intervalu.
- **Diskrétní** – mohou nabývat nejvýše spočetně mnoha hodnot.

- Spojitou náhodnou veličinu *X* s distribuční funkcí *F*(*x*) charakterizuje tzv. **hustota pravděpodobnosti**, což je funkce taková, že platí:

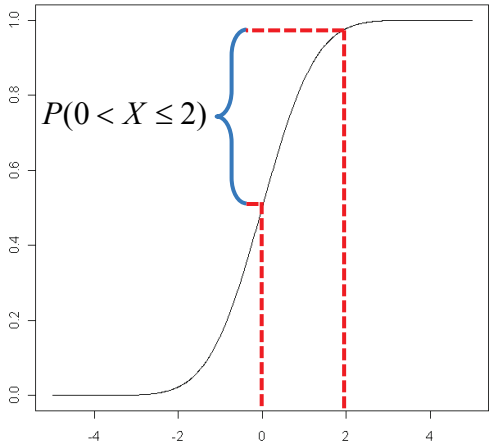
$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(x)dt$$

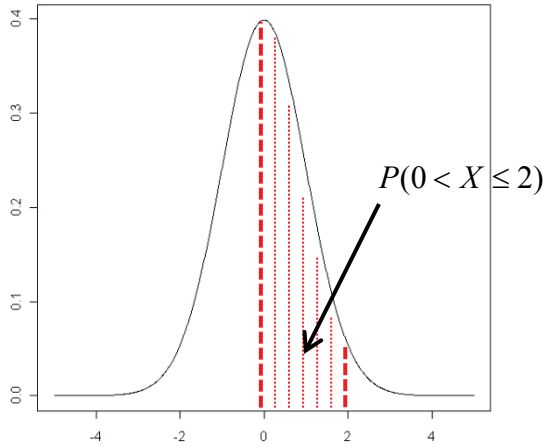
- Diskrétní náhodnou veličinu *X* s distribuční funkcí *F*(*x*) charakterizuje tzv. **pravděpodobnostní funkce**, což je funkce taková, že platí:

$$F_X(x) = \sum_{t \le x} p_X(t) = \sum_{t \le x} P(X = t)$$

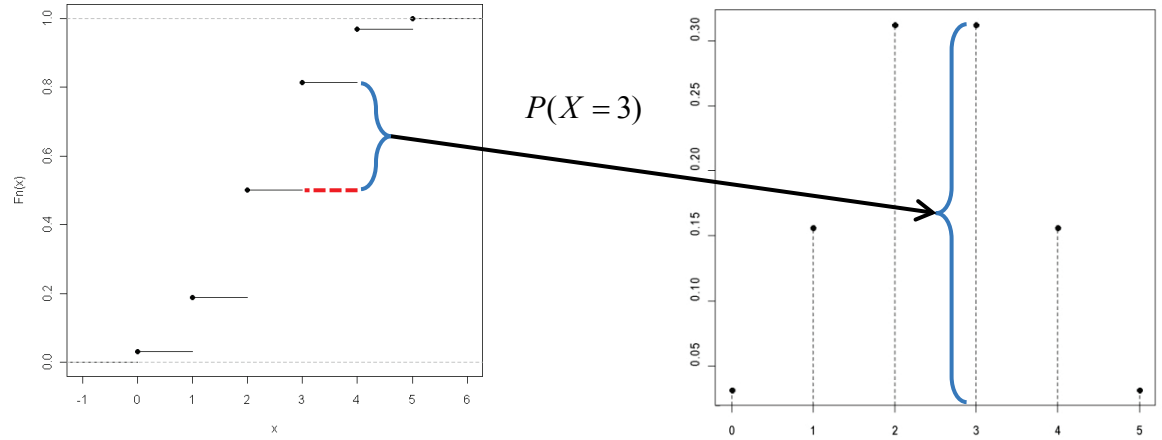
F(x) a f(x) a p(x)

Spojitá náhodná veličina





Diskrétní náhodná veličina



Spojité a diskrétní náhodné veličiny - příklady

- **Spojité náhodné veličiny**:
  - Medicína:
  - Biologie:

- **Diskrétní náhodné veličiny**:
  - Medicína:
  - Biologie:

Spojité a diskrétní náhodné veličiny - příklady

- **Spojité náhodné veličiny**:
  - Medicína: výška, váha, krevní tlak, glykémie, čas do sledované události, …
  - Biologie: biomasa na m^2, listová plocha, pH, koncentrace látek ve vodě, ovzduší, …

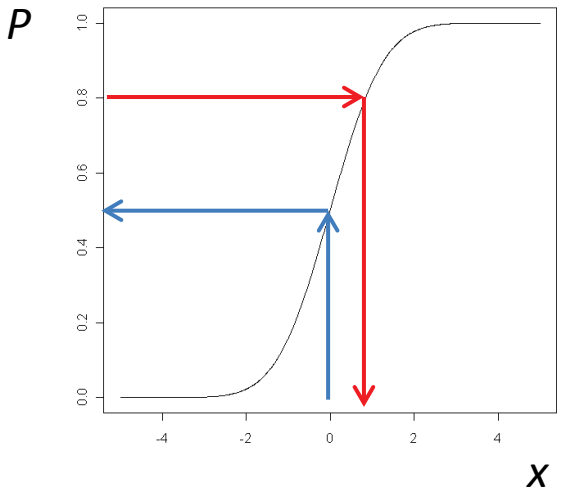
- **Diskrétní náhodné veličiny**:
  - Medicína: počet krvácivých epizod, počet hospitalizací, počet dní po operaci do odeznění bolesti, …
  - Biologie: počet zvířat na jednotku (plochu, objem), počet kolonií na misku, …

Kvantilová funkce

- Inverzní funkce k distribuční funkci, výsledkem není pravděpodobnost, ale číslo na reálné ose, které odpovídá určité pravděpodobnosti.

- **Distribuční funkce** $F(x) = P(X \leq x)$
- **Kvantilová funkce** $x_p = F^{-1}(P(X \leq x)) = F^{-1}(p)$

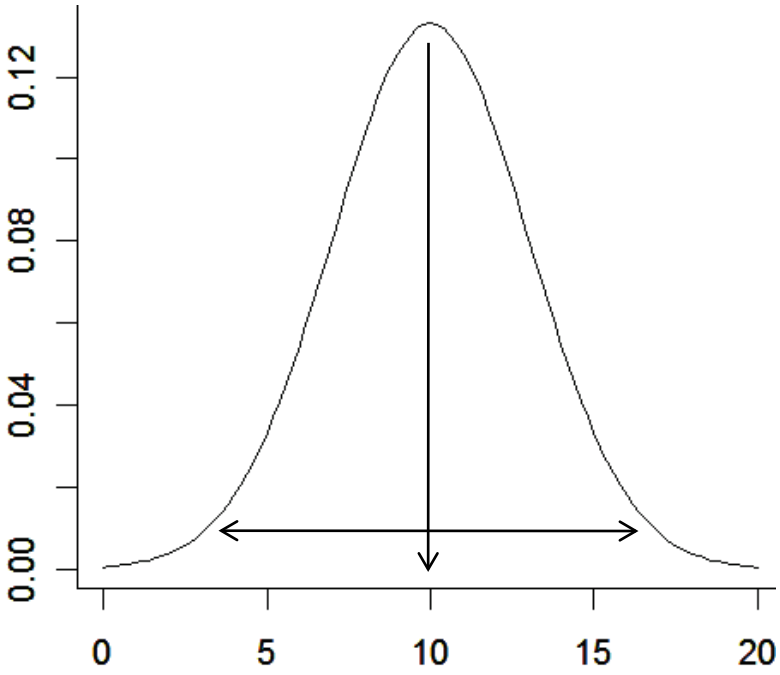
Spojitá náhodná veličina

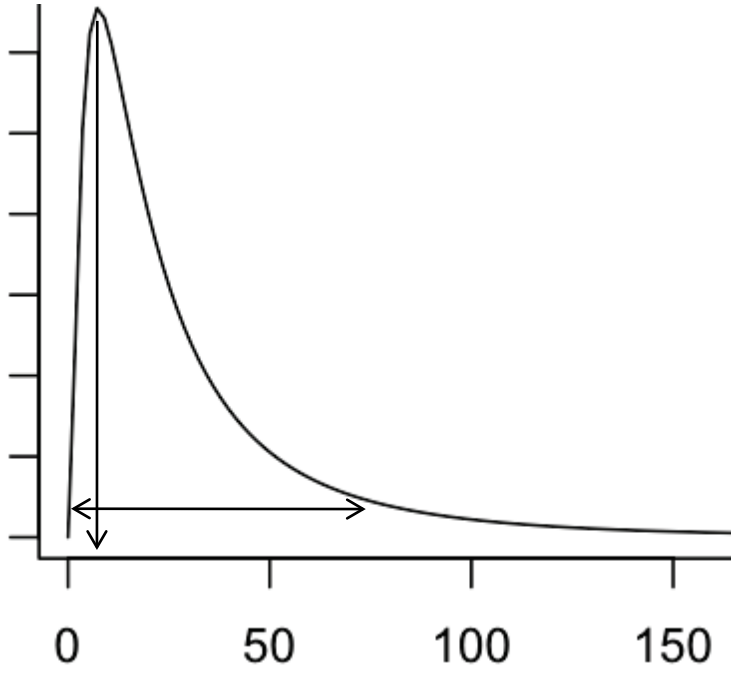


2. Charakteristiky náhodných veličin

Co chceme u dat popsat?

- **Kvalitativní data** – četnosti (absolutní i relativní) jednotlivých kategorií.
- **Kvantitativní data** – **těžiště a rozsah pozorovaných hodnot**.





Charakteristiky náhodných veličin

- Distribuční funkce, hustota a pravděpodobnostní funkce popisují chování náhodné veličiny sice kompletně, ale trochu neprakticky – složitě.
- Jsou definovány dvě charakteristiky, které odráží vlastnosti rozdělení jedním číslem: **střední hodnota** a **rozptyl**.

- Střední hodnota je definována
- pro spojitou náhodnou veličinu *X* s hustotou *f*(*x*) jako integrál (pokud existuje):

$$E(X) = \mu = \int_{-\infty}^{\infty} x f(x) dx$$

- pro diskrétní náhodnou veličinu *X* s pravděpodobnostní funkcí *p*(*x*) jako součet:

$$E(X) = \mu = \sum_{x \in R} x p(x)$$

Charakteristiky náhodných veličin

- Rozptyl je definován pro spojitou i diskrétní náhodnou veličinu *X* jako střední hodnota:

$$D(X) = \sigma^2 = E(X - E(X))^2$$

- Pro výpočet je používán vzorec:

$$D(X) = E(X - E(X))^2 = E(X^2 - 2X\,E(X) + E(X)^2)$$
$$= E(X^2) - 2E(X)E(X) + E(X)^2 = E(X^2) - E(X)^2$$

- Nevýhoda rozptylu je, že není ve stejných jednotkách jako střední hodnota, proto se používá tzv. směrodatná odchylka – odmocnina z rozptylu.

Charakteristiky náhodných veličin

- To, co nás zajímalo u pozorovaných dat má teoretický ekvivalent (ve smyslu pravděpodobnosti) ve formě charakteristik náhodných veličin:

Těžiště ≈ Střední hodnota

Rozsah ≈ Rozptyl

- Těmto charakteristikám pak odpovídají parametry rozdělení pravděpodobnosti.

- Charakteristiky však mohou být i lehce zavádějící: **náhodná veličina nemusí nabývat své střední hodnoty**. Příklad: Náhodná veličina X nabývá hodnot -1 a 1, obou s pravděpodobností 0,5. Její střední hodnota je 0!

Význam střední hodnoty

- Jedná se o formu váženého průměru možných hodnot na základě jejich pravděpodobností.

- Uvažujme diskrétní náhodnou veličinu
  - $X = \{x_1, \ldots, x_k\}$
  - $P(X=x_1) = p_1, \ldots, P(X=x_k) = p_k$

- Pak střední hodnota má tvar:

Váhu pro jednotlivé hodnoty hraje jejich pravděpodobnost

$$E(X) = \mu = \sum_{i=1}^{k} x_i p(x_i)$$

Jednotlivé možné hodnoty

K čemu všechny ty funkce a čísla vlastně jsou?

- **Popis vlastností cílové populace** – na základě pozorovaných dat (histogram, box plot, popisné statistiky) jsme schopni usuzovat na charakter rozdělení pravděpodobnosti sledované veličiny. Dokonce jsme schopni otestovat míru shody s teoretickým rozdělením.

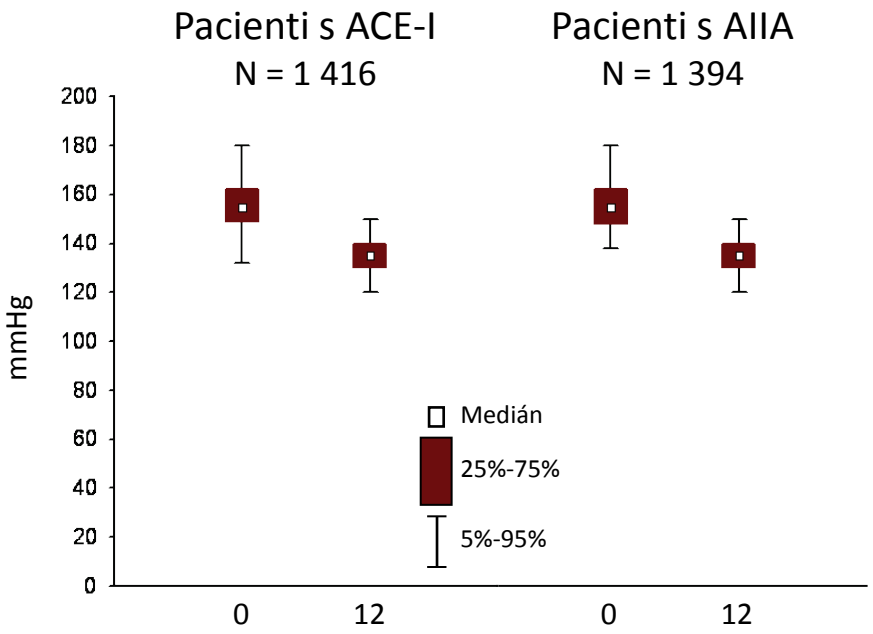
- **Srovnání vlastností cílové populace/populací** – na základě pozorovaných dat a našich předpokladů o teoretickém modelu (hypotéz) jsme schopni pomocí statistických testů srovnávat vlastnosti jedné nebo více cílových populací.

- **Predikce vlastností cílové populace** – nevyvrátíme-li na základě pozorovaných dat platnost teoretického modelu, jsme schopni se ptát, jak a s jakou pravděpodobností se bude cílová populace v budoucnu chovat.

Příklad – srovnání

- Pacienti s hypertenzí, léčení ACE-I nebo AIIA.

- **Teď předbíháme**:
- *Vizualizace a popis → zhodnotíme tvar rozdělení a přítomnost odlehlých hodnot.*
- *Testem můžeme ověřit normalitu hodnot.*
- *Testem můžeme ověřit rovnost rozptylů.*
- *Rozhodneme o aplikovatelnosti jednotlivých testů.*

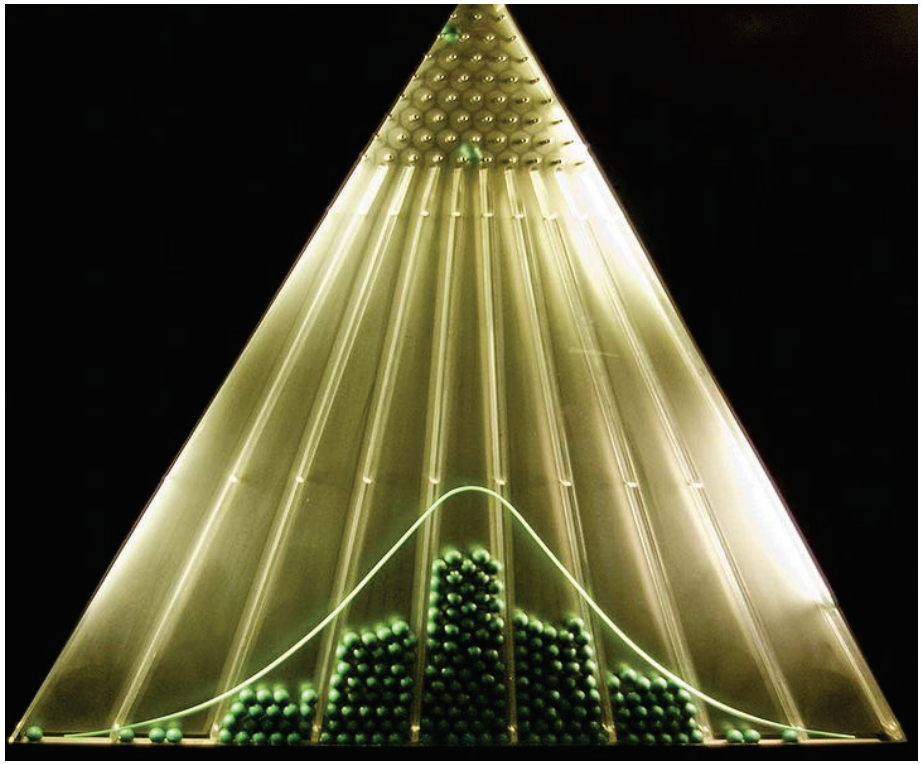


TKs v sedě (mmHg)	B ACE-I	B AIIA	p-hodnota A vs. B
Čas 0 – medián	155	155	0,929
Čas 12 měsíců - medián	135	135	
p-hodnota 0 vs. 12	<0,001	<0,001	

3. Normální rozdělení pravděpodobnosti a rozdělení z něj odvozená

Normální rozdělení pravděpodobnosti

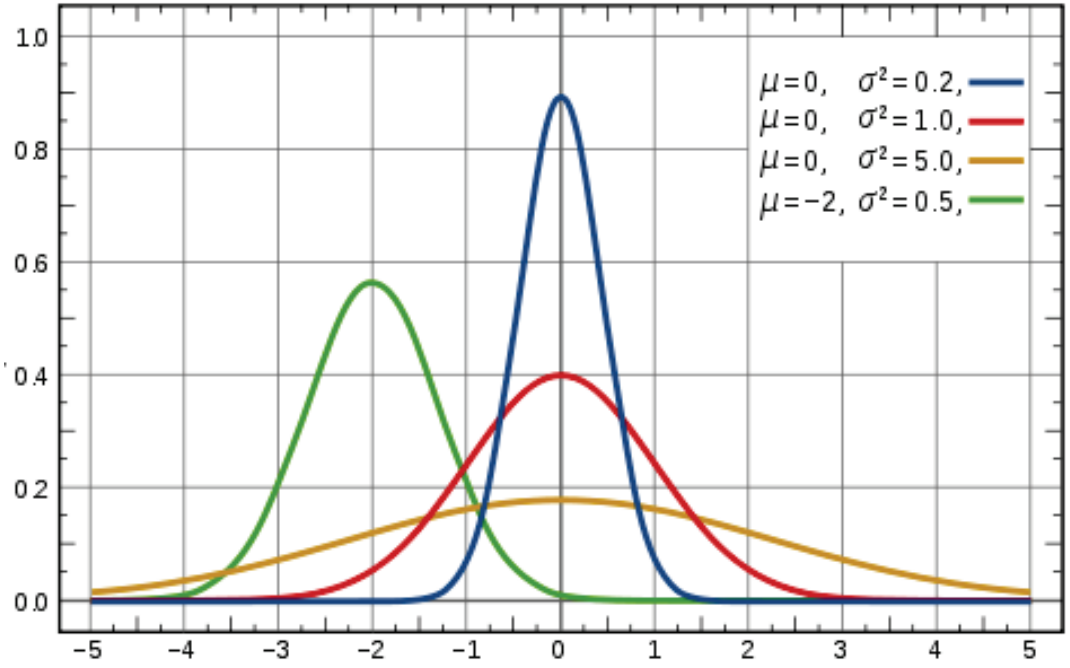
- Klíčové rozdělení pravděpodobnosti. Jak pro teoretickou statistiku, tak pro biostatistiku.
- Označení „normální“ neznamená, že by bylo normálnější než ostatní rozdělení.
- Popisuje proměnné, jejichž hodnoty se symetricky shlukují kolem střední hodnoty. Rozptyl kolem střední hodnoty je dán aditivním vlivem mnoha „slabě působících“ faktorů.
- **Příklad**: výška člověka, krevní tlak



Normální rozdělení pravděpodobnosti

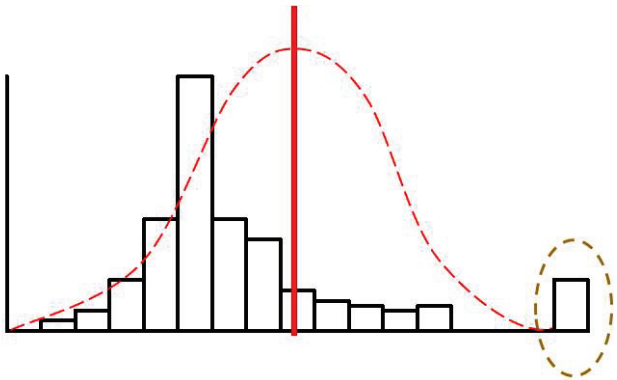
- Je kompletně popsáno dvěma parametry:
  - μ – střední hodnota, tedy E(X)
  - σ^2 – rozptyl, tedy D(X)
  - Označení: $N(\mu, \sigma^2)$
- Hustota pravděpodobnosti: $f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}$
- Čím bychom mohli jednotlivé parametry normálního rozdělení odhadnout?

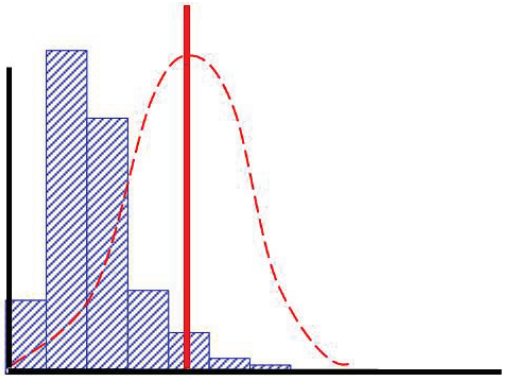
Normální rozdělení dle hodnot parametrů μ a σ^2



Normální rozdělení pravděpodobnosti

- Normalita je klíčovým předpokladem řady statistických metod – zejména testů a modelů.
- Není-li splněna podmínka normality hodnot, je špatně celý model se kterým daná metoda pracuje, což vede k neinterpretovatelným závěrům.
- Její ověření je tak stejně důležité jako výběr správného testu.
- Pro ověření normality existuje řada testů a grafických metod.





Standardizované normální rozdělení

- Jakékoliv normální rozdělení může být převedeno (zatím schválně neříkám transformováno) na tzv. standardizované normální rozdělení:

$$X \sim N(\mu, \sigma^2) \rightarrow Y = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}} \rightarrow Y \sim N(0,1)$$

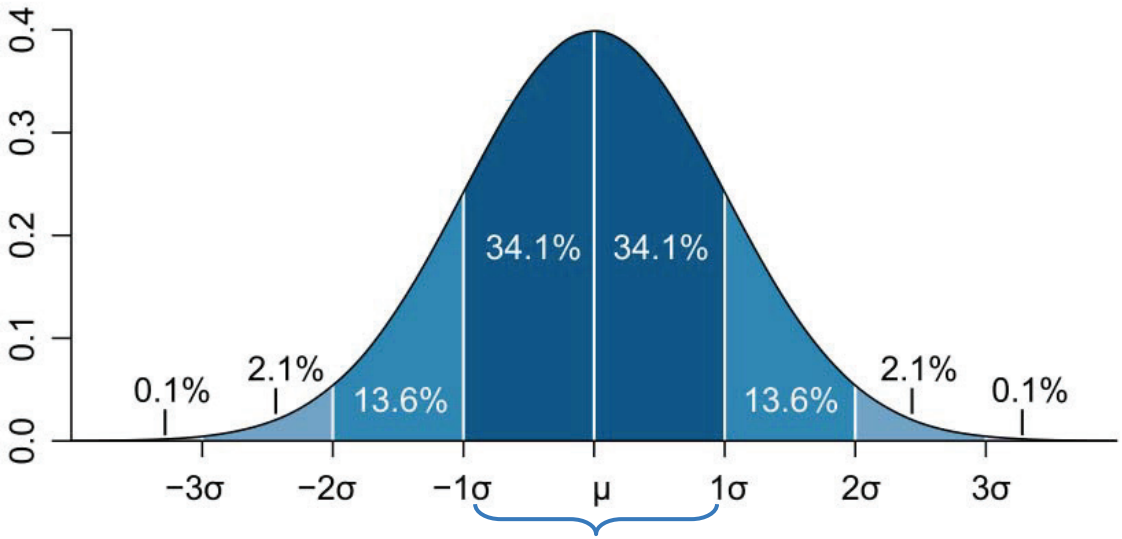
- Hustota pravděpodobnosti:

$$f(x;0,1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$$

- **Klíčové rozdělení řady testů**.
- Výhoda je, že všechny hodnoty distribuční i kvantilové funkce jsou tabelovány a obsaženy ve všech dostupných softwarech.

Pravidlo ±3 sigma

- U normálního rozdělení lze vyčíslit procento hodnot, které by se měly vyskytovat v rozmezí ± *x* násobku směrodatné odchylky od střední hodnoty.
- Lze říci, že v rozmezí μ ± 3σ by se mělo vyskytovat přes 99,5 % všech hodnot.



68,3 % všech hodnot

95,6 % všech hodnot

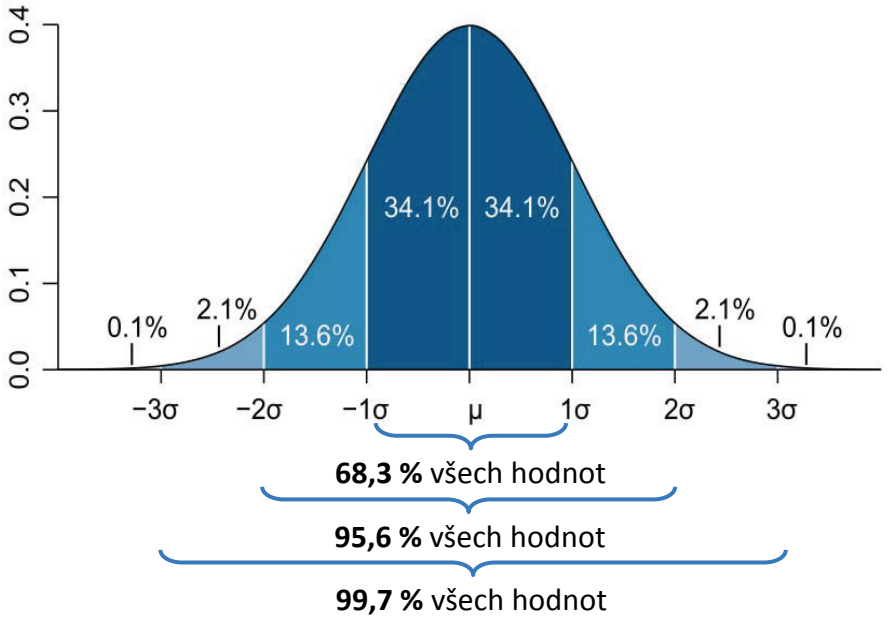
99,7 % všech hodnot

Pravidlo ±3 sigma – k čemu to je?

- Lze ho použít pro jednoduché (ale pouze orientační) **ověření normality** rozdělení pozorovaných dat.
- **Příklad 1**: Hladina sérového albuminu u 216 pacientů s cirhózou jater.
- Sumarizace pozorovaných hodnot:

$$\bar{x} = 34{,}46 \text{ g/l}$$
$$s = 5{,}84 \text{ g/l}$$

$$\bar{x} \pm 1s = 28{,}62 - 40{,}30 \text{ g/l}$$
$$\approx 73{,}15\,\% \text{ hodnot}$$
$$\bar{x} \pm 2s = 22{,}78 - 46{,}14 \text{ g/l}$$
$$\approx 95{,}83\,\% \text{ hodnot}$$
$$\bar{x} \pm 3s = 16{,}94 - 51{,}98 \text{ g/l}$$
$$\approx 99{,}07\,\% \text{ hodnot}$$



Pravidlo ±3 sigma – k čemu to je?

- **Příklad 2**: Simulovaná data, 50 hodnot z N(0,1) + 1 odlehlá hodnota (200).
- Sumarizace pozorovaných hodnot:

$$\bar{x} = 3{,}87$$

$$s = 28{,}02$$

$$\bar{x} \pm 1s = -24{,}15 - 31{,}90$$

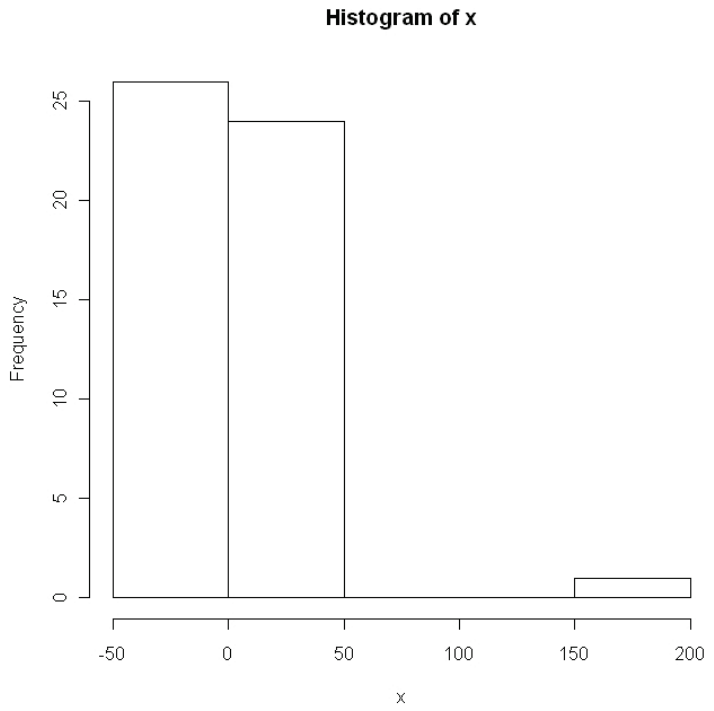
$$= 98{,}04\,\%\ \text{hodnot} \neq 68{,}3\,\%\ \text{hodnot}$$

$$\bar{x} \pm 2s = -52{,}18 - 59{,}92$$

$$= 98{,}04\,\%\ \text{hodnot} \neq 95{,}6\,\%\ \text{hodnot}$$

$$\bar{x} \pm 3s = -80{,}21 - 87{,}95$$

$$= 98{,}04\,\%\ \text{hodnot} \neq 99{,}7\,\%\ \text{hodnot}$$



Pravidlo ±3 sigma – k čemu to je?

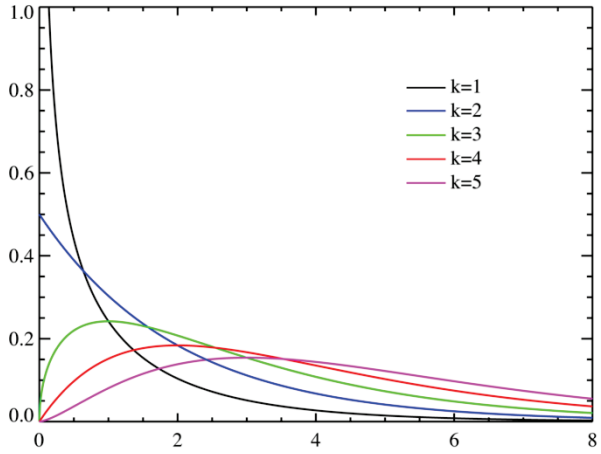
- Pravidlo 3 sigma můžeme použít pro identifikaci odlehlých hodnot.
- Pravidlo 3 sigma můžeme použít pro orientační ověření normality dat.

Chí-kvadrát rozdělení

- Vzniká jako součet druhých mocnin *k* nezávislých náhodných veličin se standardizovaným normálním rozdělením, N(0,1). Konstanta *k* je nazývána počet stupňů volnosti.

$$X_i \sim N(0,1) \rightarrow Q = \sum_{i=1}^{k} X_i^2 \rightarrow Q \sim \chi^2(k)$$

- Velký význam v teoretické statistice:
  - Výpočet intervalu spolehlivosti pro rozptyl
  - Testování hypotéz o nezávislosti kvalitativních dat
  - Testy dobré shody

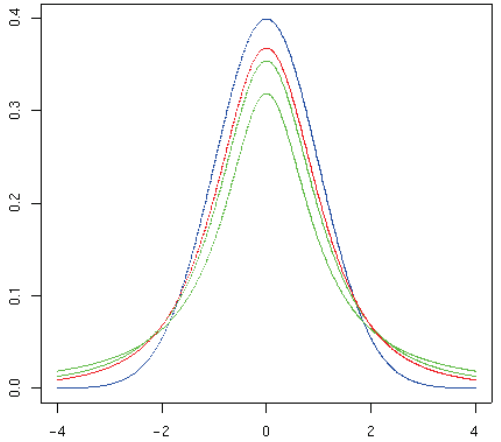


Studentovo *t* rozdělení

- **Charakterizuje rozdělení průměru jako odhadu střední hodnoty** veličiny s normálním rozdělením, v případě, že neznáme rozptyl (což je téměř vždy).
- Vzniká jako podíl dvou nezávislých veličin, jedné s rozdělením N(0,1) a druhé s rozdělením $\chi^2(k)$. Parametrem *t* rozdělení je opět počet stupňů volnosti *k*.

$$X \sim N(0,1), Q \sim \chi^2(k) \rightarrow T = \frac{X}{\sqrt{Q/k}} \rightarrow T \sim t(k)$$

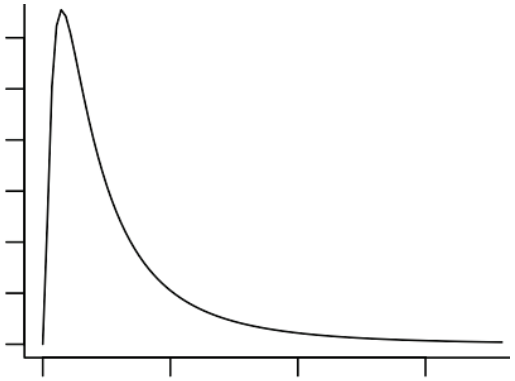
- Lze ho chápat jako aproximaci normálního rozdělení pro malé vzorky, pro velké velikosti souborů konverguje k normálnímu rozdělení.
- Teoretický základ *t* testu.



Log-normální rozdělení

- **Náhodná veličina *Y* má log-normální rozdělení, když *X*=ln(*Y*) má normální rozdělení**. A naopak, když *X* má normální, pak *Y*=exp(*X*) má log-normální.

- Hustota: $f(x;\mu,\sigma^2) = \frac{1}{x\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-(\ln x-\mu)^2/2\sigma^2}, x>0$



- Normální rozdělení – aditivní efekt faktorů
- Log-normální rozdělení – multiplikativní efekt faktorů

- Řada jevů v přírodě se řídí log-normálním rozdělením: délka inkubační doby infekčního onemocnění, abundance druhů, řada krevních parametrů (např. sérový bilirubin u pacientů s cirhózou), počet bakteriálních buněk v daném objemu,…

Binomické rozdělení

- Diskrétní rozdělení, které **popisuje počet výskytů sledované události** (ve formě nastala/nenastala) **v sérii *n* nezávislých experimentů**, kdy v každém experimentu **je stejná pravděpodobnost výskytu** události a je ***p* = θ**.

- Pravděpodobnostní funkce:

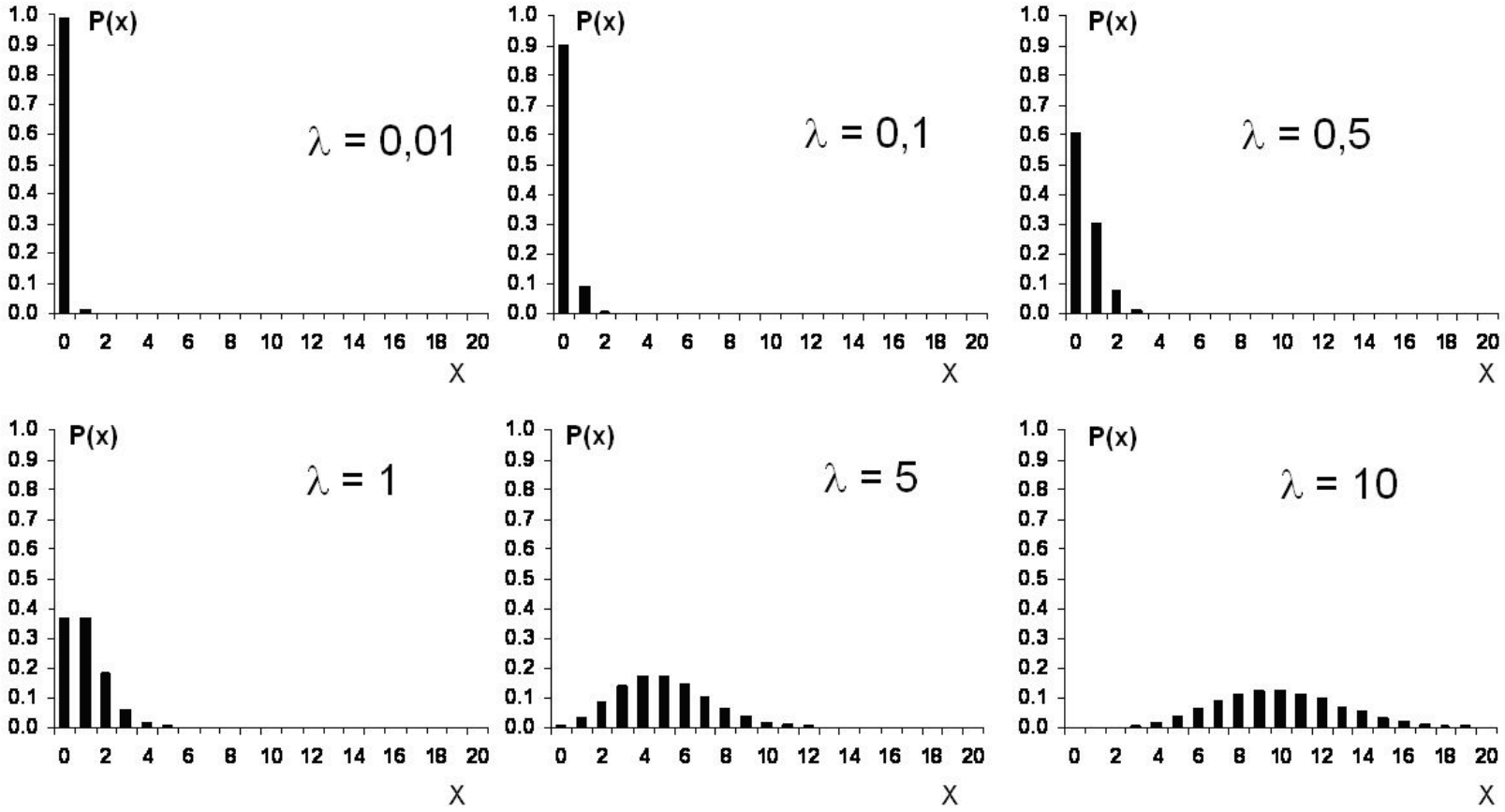
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \theta^k (1-\theta)^{n-k}$$

- Základ binomických testů pro srovnávání výskytu sledovaných událostí v populaci nebo mezi populacemi.

Poissonovo rozdělení

- Diskrétní rozdělení, které **popisuje počet výskytů sledované události na danou jednotku** (času, plochy, objemu), když se tyto události vyskytují vzájemně nezávisle s konstantní intenzitou (parametr λ).
- Jedná se o zobecnění binomického rozdělení pro $n \to \infty$ a $p \to 0$.
- Pravděpodobnostní funkce: $P(X = x) = p_X(x;\lambda) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, x \geq 0$
- Střední hodnota, rozptyl: $EX = \lambda, DX = \lambda$
- **Příklady**: průměrný výskyt mutací bakterií na 1 Petriho misku, počet krvinek v poli mikroskopu, počet žížal vyskytujících se na 1 m^2, počet pooperačních komplikací během určitého časového intervalu po výkonu.

Poissonovo rozdělení – vliv λ



Exponenciální rozdělení

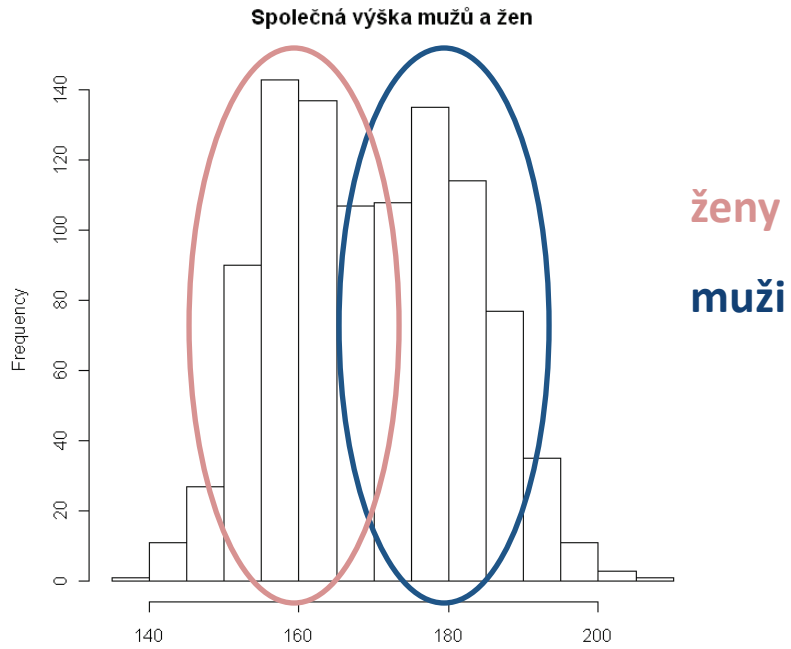
- Spojité rozdělení, které popisuje délky časových intervalů mezi jednotlivými událostmi Poissonova procesu. Popisuje tedy časový interval mezi událostmi, když se tyto události vyskytují vzájemně nezávisle s konstantní intenzitou (parametr λ).

- Hustota: $f_X(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x}, x \geq 0$
- Střední hodnota, rozptyl: $EX = 1/\lambda$, $DX = 1/\lambda^2$

- Význam v analýze přežití, je to „nejjednodušší“ modelové rozdělení pro délku doby do výskytu sledované události – předpokládá totiž konstantní intenzitu (systém nemá paměť).
- Zobecněním jsou další rozdělení: Weibullovo, Gamma.

Bimodální rozdělení

- Představuje většinou problém, neboť se zřejmě jedná o směs dvou souborů s unimodálním rozdělením.
- Bimodální rozdělení má např. tento tvar:



Existuje ±3 sigma i u asymetrických rozdělení?

- Pro nenormální rozdělení existuje pomůcka v podobě obecného pravidla – **Čebyševovy nerovnosti**: Máme-li náhodnou veličinu *X* se střední hodnotou μ a a konečným rozptylem σ^2, pak pro libovolné reálné číslo $k > 0$ platí:

$$P(|X - \mu| \geq k\sigma) \leq \frac{1}{k^2}$$

4. Transformace náhodných veličin

Transformace náhodné veličiny

- Transformací náhodné veličiny X rozumíme aplikaci matematické funkce g tak, že vzniká nová náhodná veličina (tzv. transformovaná) $Y = g(X)$.

- Nová veličina nabývá nových hodnot → má také jiné rozdělení pravděpodobnosti → je třeba ho najít (hustotu, pravděpodobnostní funkci).

- S transformací se mění škála – mění se i interpretace „vzdáleností“ mezi jednotlivými hodnotami.

Transformace náhodné veličiny

- **Spojitá veličina**: chceme najít hustotu $f_Y(y)$.

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(g(X) \le y) = P(X \le g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y)),\ y \in R.$$

$$\text{Pro } g(x) \text{ rostoucí}: f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y),\ y \in R.$$

$$\text{Pro } g(x) \text{ klesající}: f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \frac{d}{dy} (1 - F_X(g^{-1}(y))) = -f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y),\ y \in R.$$

$$\text{Pro } g(x) \text{ jakoukoliv}: f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|,\ y \in R.$$

- **Diskrétní veličina**: chceme najít pravděpodobnostní funkci $p_Y(y)$.

$$p_Y(y) = P(Y = y) = P(g(X) = y) = P(X \in g^{-1}(y)) = \sum_{x \in g^{-1}(y)} p_X(x),\ y \in R.$$

Transformace náhodné veličiny – příklad

- Máme rozdělení náhodné veličiny X dáno tabulkou a chceme najít rozdělení pravděpodobnosti transformované náhodné veličiny $Y = X^2 - 1$.

x	-2	-1	0	1	2
p(x)	0,1	0,25	0,15	0,3	0,2

x	-2	-1	0	1	2
p(x)	0,1	0,25	0,15	0,3	0,2
y	3	0	-1	0	3
p(y)	0,3	0,55	0,15	-	-

Význam transformací pro zpracování dat

- Teoretické vlastnosti transformovaných náhodných veličin nám dávají nástroj pro práci s pozorovanými daty.

- Transformace můžeme použít pro následující cíle:

1. Normalizaci pozorovaných hodnot
2. Standardizaci normálních hodnot
3. Stabilizaci rozptylu pozorovaných hodnot – teď vynecháme
4. Lepší interpretaci pozorovaných hodnot

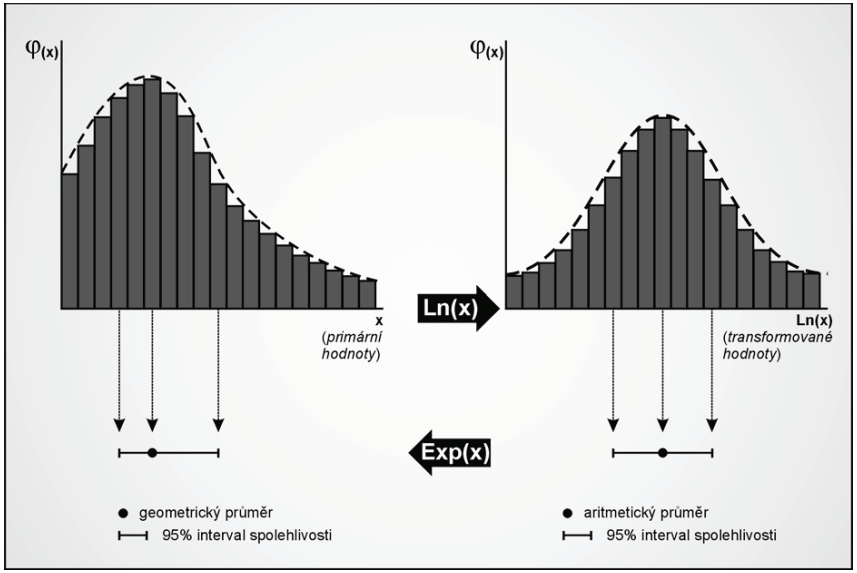
1. Normalizace pozorovaných hodnot

- Normalita pozorovaných hodnot je silný předpoklad řady statistických metod, který musí být splněn, aby výsledky byly interpretovatelné!
- Hodnocení normality dat – vizuálně, na základě testu.
- Nenormální data je nutné transformovat nebo použít test bez předpokladu normality.

- Logaritmická transformace

  $Y = \ln(X)$
- Odmocninová transformace

  $Y = \mathrm{sqrt}(X)$
- Box-Coxova transformace



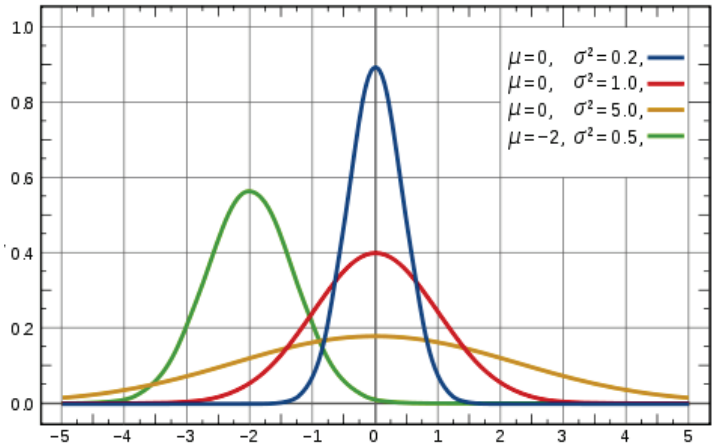
2. Standardizace normálních hodnot

- Standardizace je transformace náhodné veličiny s $N(\mu,\sigma^2)$ na $N(0,1)$.
- Důvod: řada statistických metod byla odvozena pro standardizované normální rozdělení, N(0,1). Děláme to tedy opět kvůli lepší možnosti hodnocení dat.

- Teoretická standardizace: $$U = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}$$

- Praktická standardizace: $$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{s^2}}$$

- Obrázek: standardizace je převod „modré“, „zelené“ a „okrové“ na „červenou“.



4. Lepší interpretace pozorovaných hodnot

- Někdy se nám hodí transformovat pozorovaná data kvůli lepší interpretaci.
- **Příklad**: Microarray experiment se dvěma vzorky, měříme intenzitu genu XY v jedné tkáni (hodnota intenzity A_{XY}) a v druhé tkáni (hodnota intenzity B_{XY}).
- Následně hodnoty převádíme na logaritmus se základem 2 jejich podílu:

$$Z_{XY} = \log_2\left(\frac{A_{XY}}{B_{XY}}\right)$$

- Jaké to má výhody?

Poděkování…

Rozvoj studijního oboru „Matematická biologie“ PřF MU Brno je finančně podporován prostředky projektu ESF č. CZ.1.07/2.2.00/07.0318 „Víceoborová inovace studia Matematické biologie“ a státním rozpočtem České republiky