

Přednáška VI.

Intervalové odhady

- ➔ Motivace
- ➔ Směrodatná odchylka a směrodatná chyba
- ➔ Centrální limitní věta
- ➔ Intervaly spolehlivosti



INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Opakování – nestranné a MLE

- Jaký je princip nestranných odhadů?
- Jaký je princip odhadů metodou MLE?
- Jak vypadají nestranný a MLE odhad parametru σ^2 ?

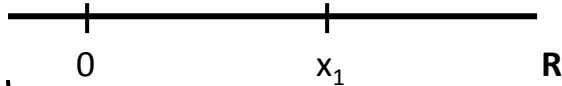
Opakování – použití průměru a mediánu

- ➡ Jmenujte výhody a nevýhody průměru a mediánu jako statistik pro odhad střední hodnoty náhodné veličiny.
- ➡ Jmenujte příklad, kdy průměr je výhodnější než medián, a příklad, kdy medián je výhodnější než průměr.

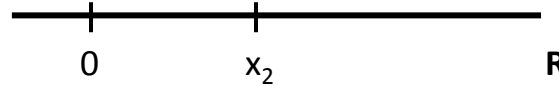
1. Motivace

Spolehlivost bodového odhadu

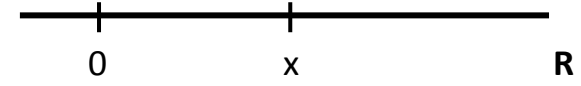
Výběr číslo 1



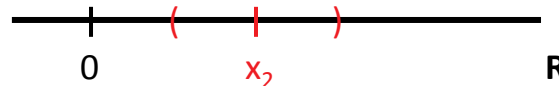
Výběr číslo 2



Celá cílová populace



Pracujeme-li s výběrem z cílové populace, je třeba na základě variability pozorovaných dat spočítat tzv. interval spolehlivosti pro bodový odhad.



Umíme-li „změřit“ celou cílovou populaci, nepotřebujeme interval spolehlivosti, protože jsme schopni odhadnout sledovaný parametr přesně – v praxi je tato situace nereálná.

Interval spolehlivosti na základě výběru číslo 1.



Intervalový odhad

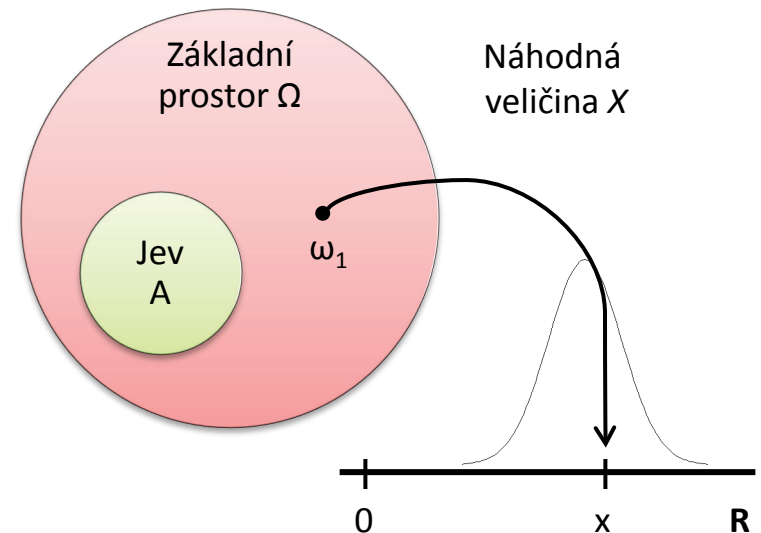
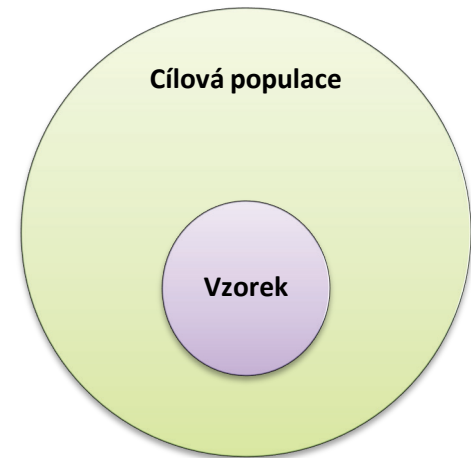
- ➔ Bodový odhad je prvním krokem ve statistickém popisu dat.
- ➔ Co nám říká jedno číslo? Studie 1 může publikovat číslo x_1 , studie 2 číslo x_2 . Které je správnější, lepší, přesnější?
- ➔ Bodový odhad je sám o sobě nedostatečný pro popis parametru rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny.
- ➔ Zajímá nás přesnost (spolehlivost) bodového odhadu.



2. Variabilita pozorování a variabilita výběrového průměru

Populace a náhodná veličina

- ➔ **Cílová populace** – skupina subjektů, o které chceme zjistit nějakou informaci.
- ➔ Realizujeme-li náhodně výběr z cílové populace, dostaneme **výběrovou populaci** (experimentální vzorek).
- ➔ **Znak X = náhodná veličina X** – vlastnost, která nás zajímá.
- ➔ **Realizace náhodné veličiny** – reálné číslo, pozorovaná hodnota na vybraném subjektu.
- ➔ **Náhodný výběr** – množina n nezávislých náhodných veličin se stejným rozdělením: X_1, X_2, \dots, X_n .
- ➔ **Realizace náhodného výběru** – reálná čísla, hodnoty pozorované na výběrové populaci.



Pravděpodobnostní chování náhodné veličiny

- $F(x)$, $f(x)$ a $p(x)$ – popisují chování náhodné veličiny úplně, ale složitě.
- Dvě charakteristiky odráží vlastnosti rozdělení jedním číslem: **střední hodnota** a **rozptyl**. Odmocnina z rozptylu je **směrodatná odchylka**.

$$E(X), D(X), SD(X)$$

- Platí následující:
 - Jednotlivé realizace náhodné veličiny vykazují variabilitu (dle $SD(X)$).
 - Jakákoliv statistika (např. průměr) je jako transformace náhodných veličin také náhodnou veličinou. Má tedy i rozdělení pravděpodobnosti.
 - Jednotlivé realizace statistiky nad různými náhodnými výběry také vykazují variabilitu (opět úměrnou $SD(X)$).

Co je zajímavé – výběrový průměr

- ➔ Rozdělení pravděpodobnosti výběrového průměru tím méně variabilní čím více pozorování je v průměru zahrnuto.
- ➔ Rozdělení pravděpodobnosti výběrového průměru se s rostoucím n přestává podobat rozdělení původních dat a začíná se podobat rozdělení normálnímu.
- ➔ Proč?

Co je zajímavé – výběrový průměr

- ➔ Rozdělení pravděpodobnosti výběrového průměru tím méně variabilní čím více pozorování je v průměru zahrnuto → plyne z vlastností rozptylu transformované náhodné veličiny.
- ➔ Rozdělení pravděpodobnosti výběrového průměru se s rostoucím n přestává podobat rozdělení původních dat a začíná se podobat rozdělení normálnímu → plyne z centrální limitní věty.

Charakteristiky výběrového průměru

- Máme posloupnost X_1, \dots, X_n nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin, které mají konečnou střední hodnotu μ a rozptyl σ^2 .

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

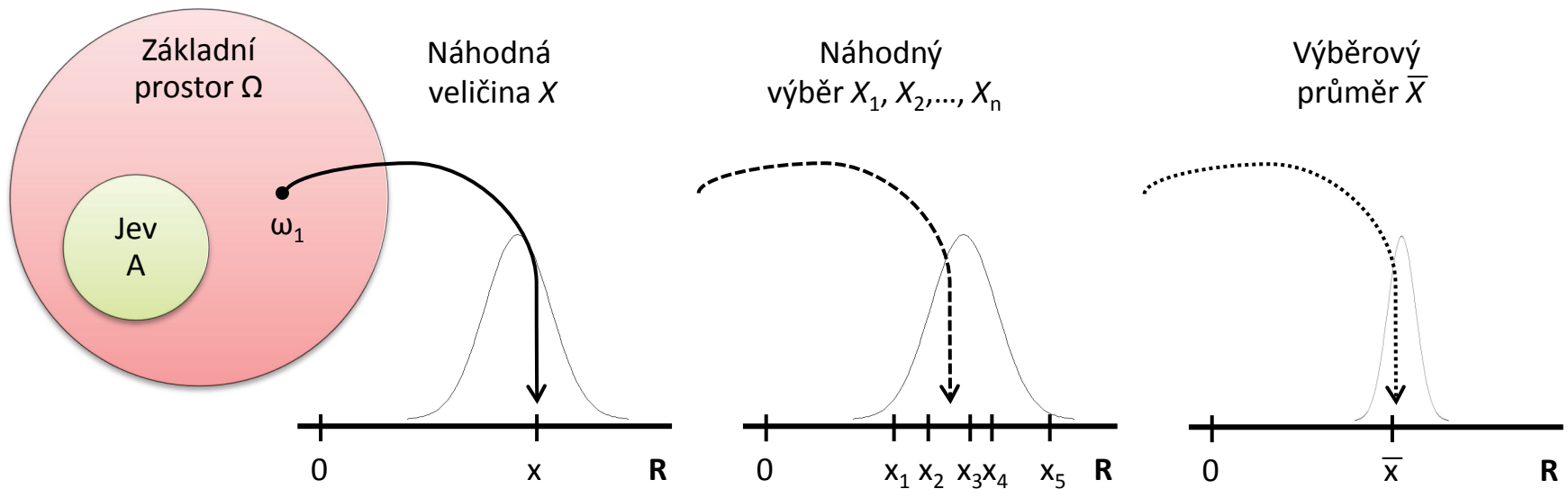
$$E(\bar{X}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n E(X_i) = \mu$$

$$D(\bar{X}) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n D(X_i) = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$SD(\bar{X}) = \sqrt{D(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Pro odhad, respektive statistiku, se tomuto výrazu říká **směrodatná chyba** nebo **standardní chyba** („standard error“) a značí se SE .

Příklad – výběrový průměr



Shrnutí

- ➔ Směrodatná odchylka (SD) není směrodatná chyba popisné statistiky (SE)!
- ➔ Směrodatná odchylka (SD) je odrazem variability náhodné veličiny ve sledované populaci.
- ➔ Směrodatná chyba (SE) je odrazem přesnosti popisné statistiky jako odhadu střední hodnoty náhodné veličiny.
- ➔ Pozor na rozdíl mezi SD a SE v člancích a knihách – tabulkách a grafech!



Příklad – výška člověka

➔ Náhodná veličina bude výška člověka: $X \sim N(175, 15^2)$, tedy uvažujme střední hodnotu 175 cm a směrodatnou odchylku 15 cm. Jak se chovají průměry pro náhodné výběry o velikosti $n = 10$, $n = 100$ a $n = 1000$?

➔ Kód v R:

```
x <- rep(0, 100) # vytvořím si vektor pro ukládání průměrů

for (i in 1:100) {
  pom <- rnorm(10, 175, 15)
  x[i] <- mean(pom) # cyklus pro výpočet výběrových průměrů pro n=10
  hist(x, breaks=10, xlim=c(160,190)) # vykreslení histogramu pro výběrové průměry pro n=10

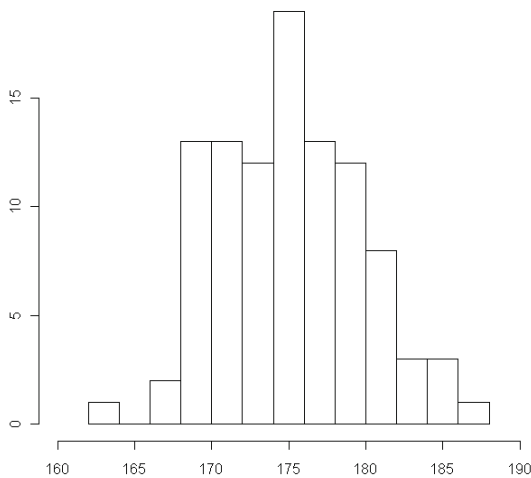
  for (i in 1:100) {
    pom <- rnorm(100, 175, 15)
    x[i] <- mean(pom) # cyklus pro výpočet výběrových průměrů pro n=100
    hist(x, breaks=10, xlim=c(160,190)) # vykreslení histogramu pro výběrové průměry pro n=100

    for (i in 1:100) {
      pom <- rnorm(1000, 175, 15)
      x[i] <- mean(pom) # cyklus pro výpočet výběrových průměrů pro n=1000
      hist(x, breaks=10, xlim=c(160,190)) # vykreslení histogramu pro výběrové průměry pro n=1000
```

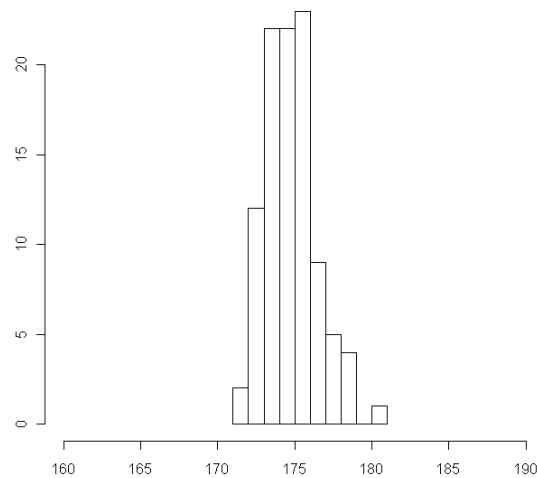
Příklad – výška člověka

➔ Původní pozorování mají rozsah hodnot zhruba od 120 cm do 220 cm. Kde se pohybují jednotlivé průměry?

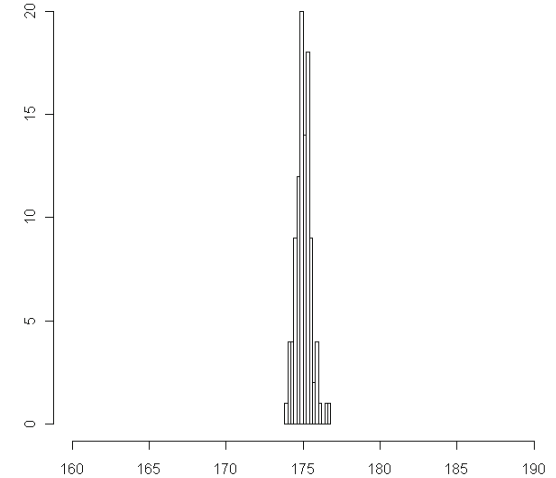
Výběrové průměry
ze vzorku $n = 10$



Výběrové průměry
ze vzorku $n = 100$



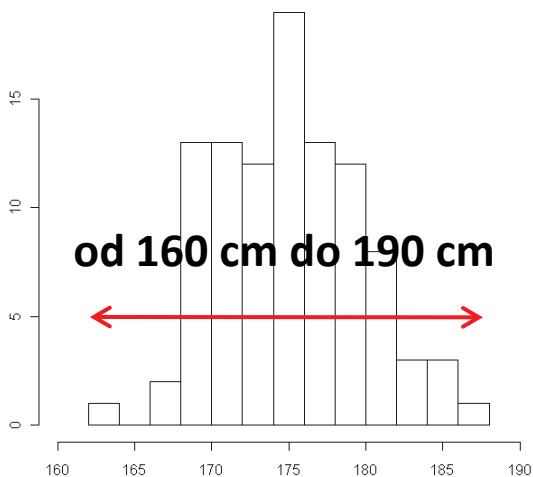
Výběrové průměry
ze vzorku $n = 1000$



Příklad – výška člověka

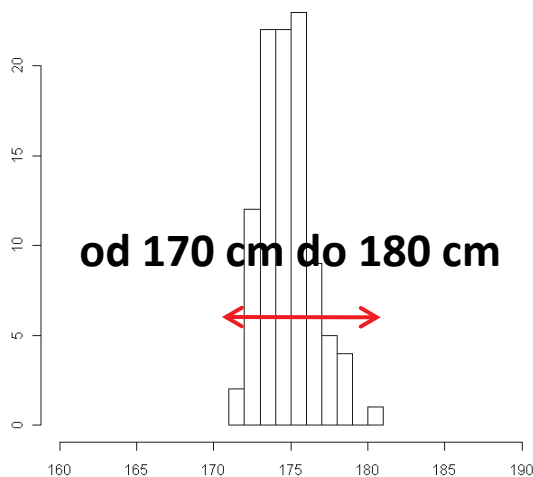
→ Původní pozorování mají rozsah hodnot zhruba od 120 cm do 220 cm. Kde se pohybují jednotlivé průměry?

Výběrové průměry
ze vzorku $n = 10$



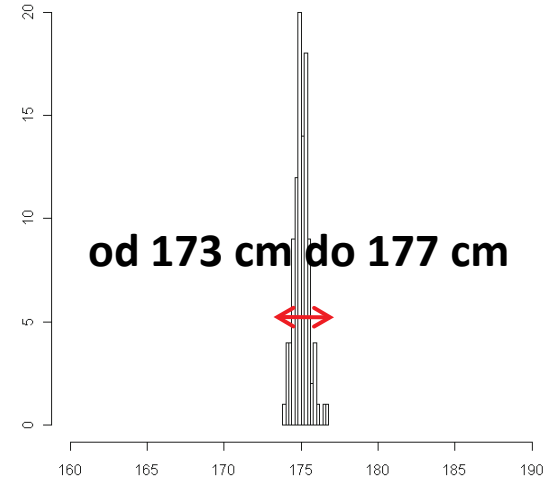
$$\bar{X}_1 \sim N(175, \frac{15^2}{10})$$

Výběrové průměry
ze vzorku $n = 100$



$$\bar{X}_2 \sim N(175, \frac{15^2}{100})$$

Výběrové průměry
ze vzorku $n = 1000$



$$\bar{X}_3 \sim N(175, \frac{15^2}{1000})$$

3. Centrální limitní věta

Připomenutí: standardizace normálního rozdělení

- Standardizace je transformace náhodné veličiny s $N(\mu, \sigma^2)$ na $N(0,1)$.
- Důvod: řada statistických metod byla odvozena pro standardizované normální rozdělení, $N(0,1)$. Děláme to tedy opět kvůli lepší možnosti hodnocení dat.

→ Teoretická standardizace náhodné veličiny:
$$U = \frac{X - \mu}{\sqrt{\sigma^2}}$$

→ Praktická standardizace naměřených hodnot:
$$u_i = \frac{x_i - \bar{x}}{\sqrt{s^2}}$$

Centrální limitní věta

- Klíčová věta umožňující sestavení intervalových odhadů.
- Máme posloupnost X_1, \dots, X_n nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin, které mají konečnou střední hodnotu μ a rozptyl σ^2 .
- Pak platí, že pro $n \rightarrow \infty$ má suma $X_i = \sum_i X_i$ přibližně normální rozdělení pravděpodobnosti.

Centrální limitní věta

→ Máme posloupnost X_1, \dots, X_n nezávislých, stejně rozdělených náhodných veličin, které mají konečnou střední hodnotu μ a rozptyl σ^2 . Pak platí, že pro $n \rightarrow \infty$ má výběrový průměr $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_i X_i$ přibližně normální rozdělení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2/n .

→ Tedy $(\bar{X} - \mu)/(\sigma/\sqrt{n})$ má přibližně standardizované normální rozdělení pravděpodobnosti:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du$$


CLV – zjednodušená interpretace

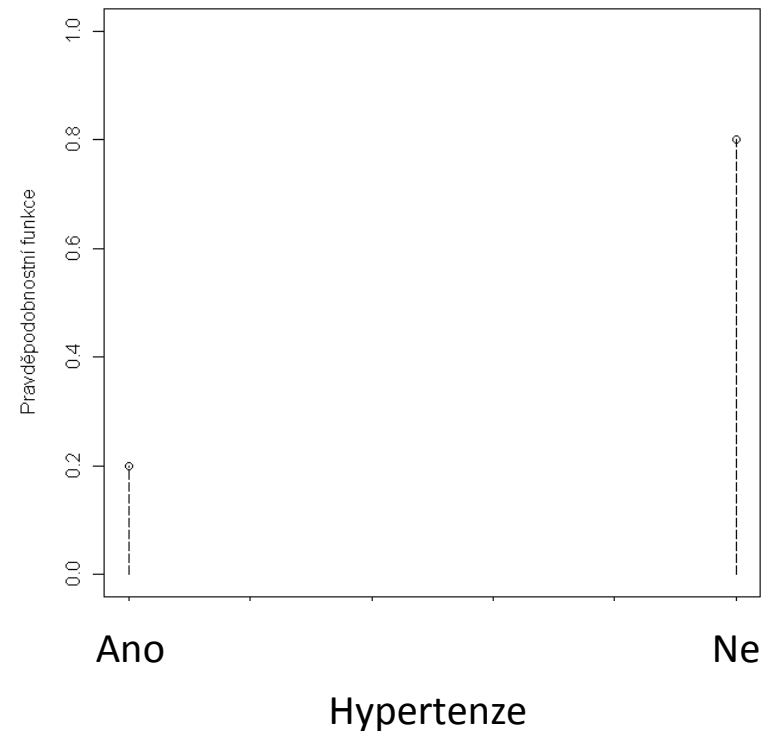
- ➔ Pokud je rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny normální, pak je i rozdělení průměru pozorovaných hodnot normální (a to i pro $n = 1$).
- ➔ Pokud rozdělení pravděpodobnosti náhodné veličiny není normální, pak je rozdělení průměru pozorovaných hodnot přibližně normální, když n je dostatečně velké ($n \rightarrow \infty$).
- ➔ „Dostatečně velké“ znamená > 30 pro rozdělení podobná normálnímu a > 100 pro rozdělení nepodobná normálnímu.

Co je super...

- ➔ Centrální limitní věta funguje i když rozdělení původní náhodné veličiny není normální rozdělení pravděpodobnosti. A dokonce i když není spojité!

Příklad – binomické rozdělení

- Chceme sledovat s jakou přesností lze odhadnout podíl hypertoniků v dospělé populaci ČR.
- Předpokládejme, že skutečný podíl dospělých s hypertenzí je 0,2.
- Náhodná veličina X : osoba trpí / netrpí hypertenzí.
- Pravděpodobnostní funkce X  (alternativní rozdělení)



Příklad – binomické rozdělení

→ Náhodná veličina S bude součet $X_i, i = 1, \dots, n$.

→ Náhodná veličina Y bude definována jako S/n .

$$E(S) = np$$

$$D(S) = np(1 - p)$$

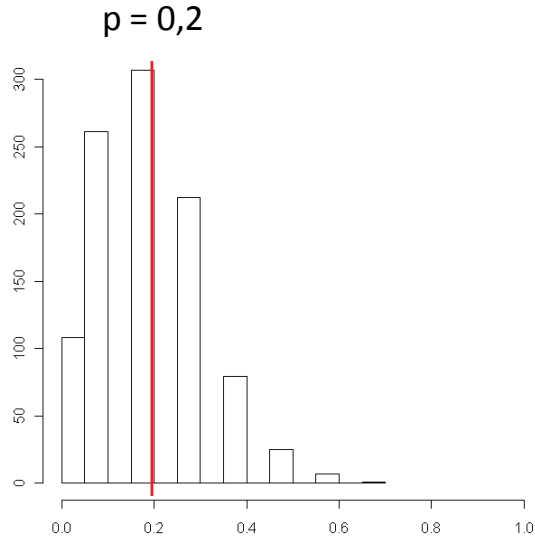
$$E(Y) = E(S) / n = p$$

$$D(Y) = D(S) / n^2 = (p(1 - p)) / n$$

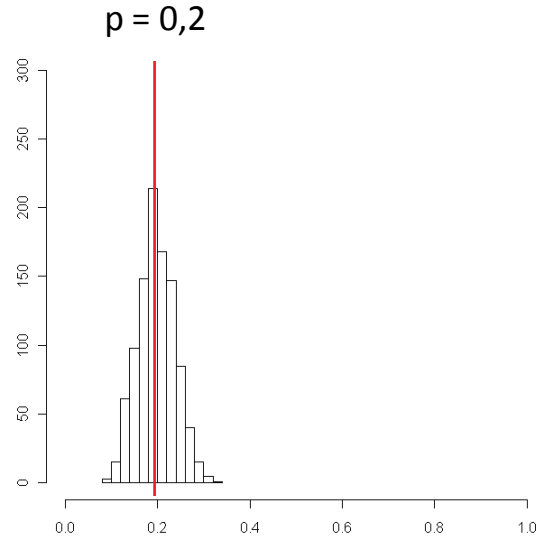
→ Jak se chová Y pro náhodné výběry o velikosti $n = 10, n = 100$ a $n = 1000$?

Příklad – binomické rozdělení

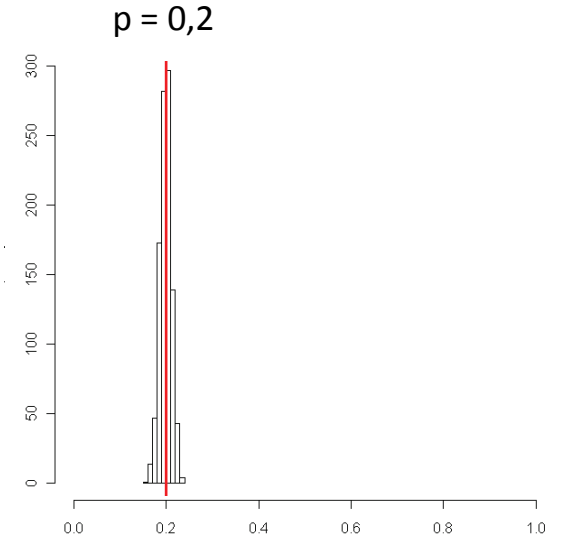
1000 realizací veličiny
 Y při $n = 10$



1000 realizací veličiny
 Y při $n = 100$

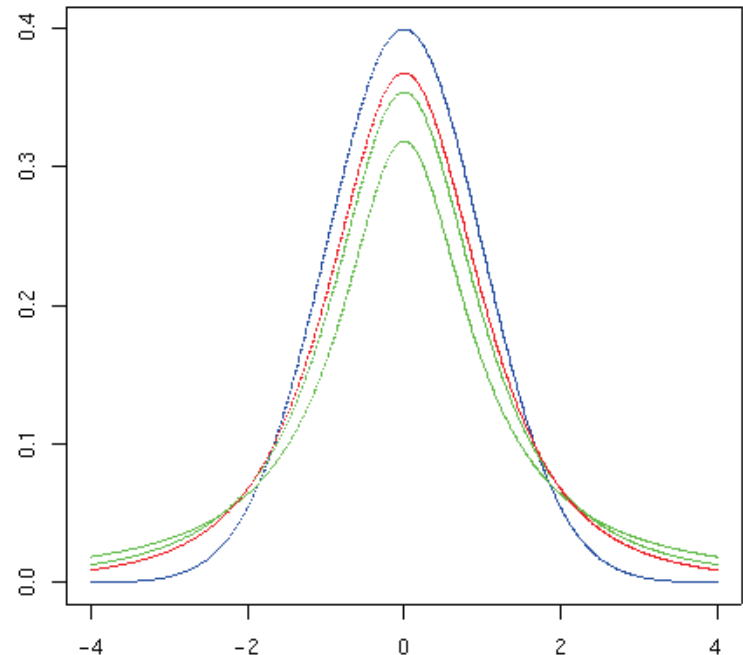


1000 realizací veličiny
 Y při $n = 1000$



Co když ale n nejde do nekonečna?

- Není-li velikost vzorku n dostatečně velká, nelze rozdělení výběrových průměrů považovat za normální.
- Aproximace Studentovým t rozdělením (viz přednáška o jednotlivých rozdělení pravděpodobnosti: Lze ho chápat jako aproximaci normálního rozdělení pro malé vzorky, pro velké velikosti souborů konverguje k normálnímu rozdělení).



4. Intervalové odhady

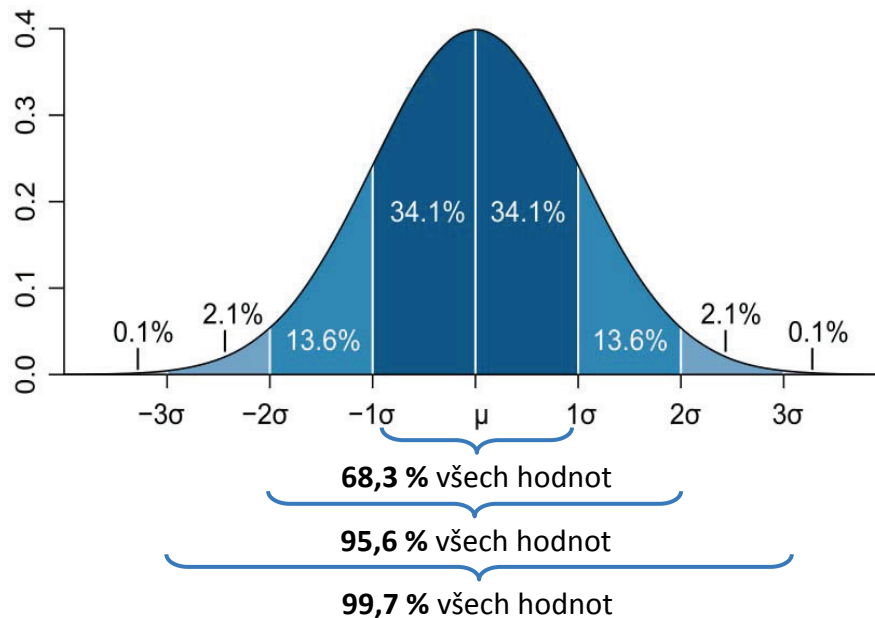
Co je super ... pokračování

- Centrální limitní věta mi říká, že rozdělení pravděpodobnosti výběrového průměru můžu při dostatečném n aproximovat normálním rozdělením.
- Když provedu standardizaci, tak dokonce standardizovaným normálním rozdělením.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbf{P}\left(\frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq x\right) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \quad \rightarrow \quad \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \sim N(0,1)$$

Interval spolehlivosti

- Princip vytvoření intervalového odhadu pro výběrový průměr, respektive konstrukce intervalu spolehlivosti pro výběrový průměr, je shodný s teoretickým pozadím pravidla $\pm 3\sigma$.



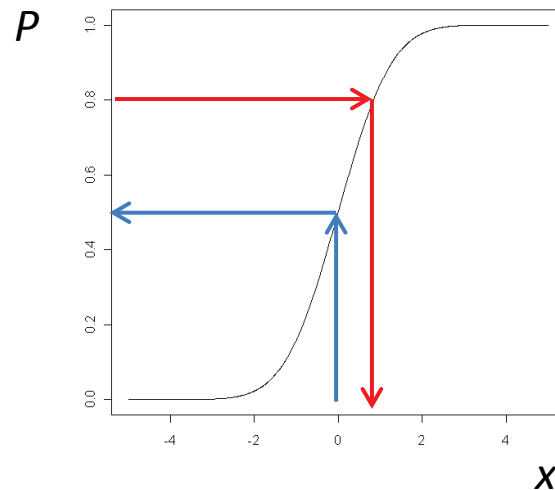
Připomenutí – kvantilová funkce

→ Inverzní funkce k distribuční funkci, výsledkem není pravděpodobnost, ale číslo na reálné ose, které odpovídá určité pravděpodobnosti.

→ **Distribuční funkce** $F(x) = P(X \leq x)$

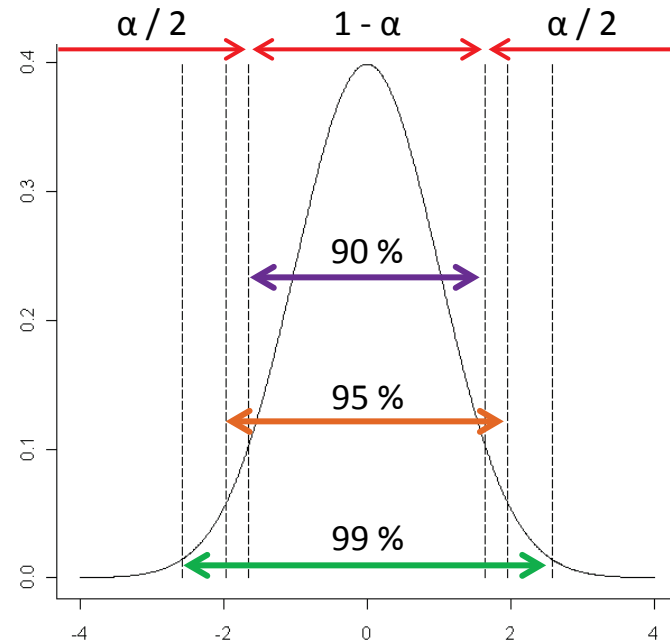
→ **Kvantilová funkce** $x_p = F^{-1}(P(X \leq x)) = F^{-1}(p)$

Spojité náhodné
veličina



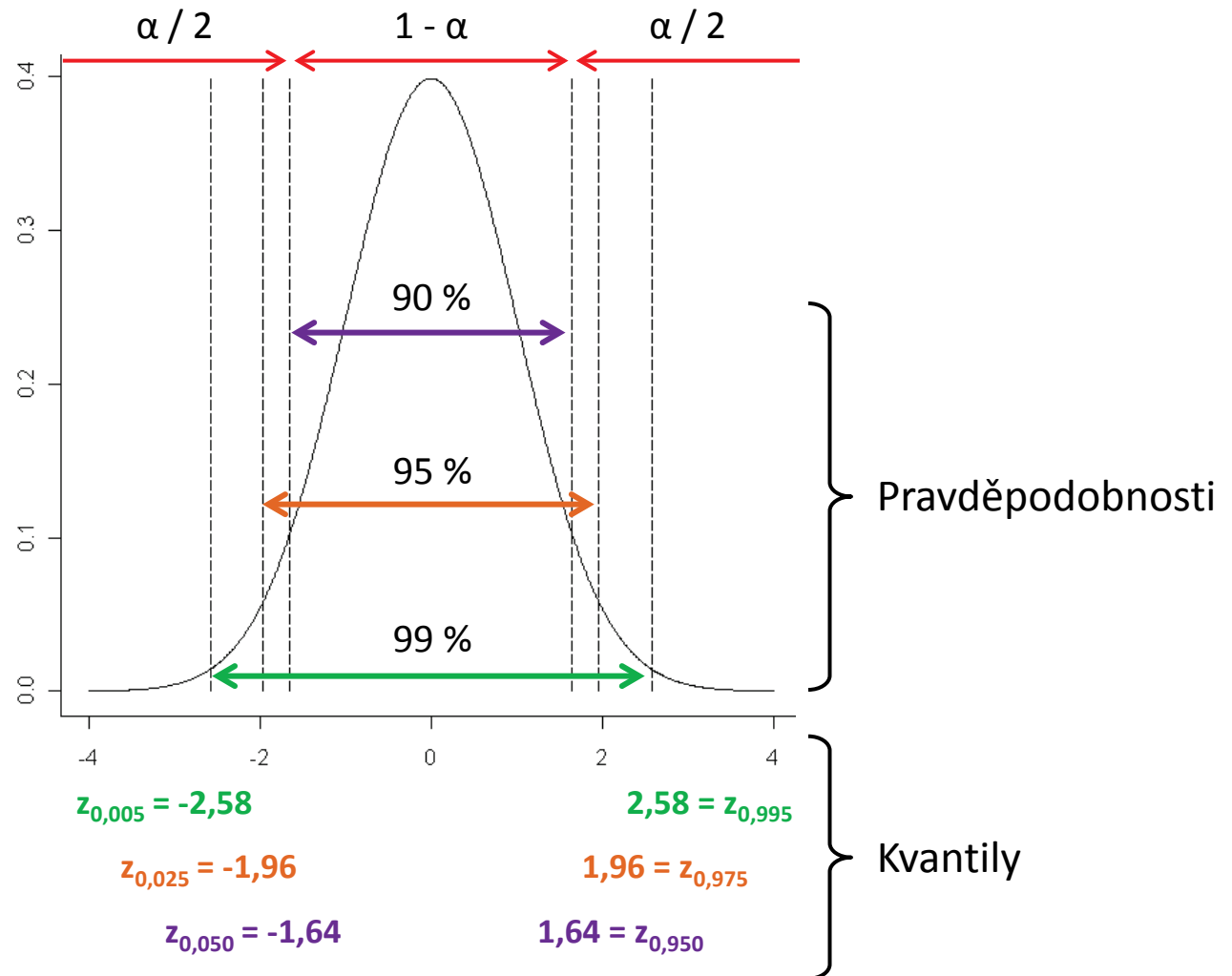
Kvantily standardizovaného normálního rozdělení

→ Oblast, kde se náhodná veličina se standardizovaným normálním rozdělením realizuje s pravděpodobností $1 - \alpha$ lze vyjádřit pomocí následujícího vztahu:



$$P(z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = F_{N(0,1)}(z_{1-\alpha/2}) - F_{N(0,1)}(z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

Kvantily standardizovaného normálního rozdělení



100(1-α)% interval spolehlivosti pro μ

- Máme náhodný výběr X_1, X_2, \dots, X_n z normálního rozdělení. $X_i \sim N(\mu, \sigma^2)$
- Budeme předpokládat, že σ známe!
- Z předchozího snímku víme, že platí:

$$P(z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = F_{N(0,1)}(z_{1-\alpha/2}) - F_{N(0,1)}(z_{\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2} = 1 - \alpha$$

- Když si rozepíšeme a upravíme výraz na levé straně, dostaneme:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = P(-z_{1-\alpha/2} \leq Z \leq z_{1-\alpha/2}) = P(-z_{1-\alpha/2} \leq \frac{\bar{X} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq z_{1-\alpha/2}) \\ &= P(-\frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq \bar{X} - \mu \leq \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}) = P(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \leq \mu \leq \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}) \end{aligned}$$

- 100(1-α)% IS pro μ má tvar: $(D, H) = (\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}; \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2})$

100(1- α)% interval spolehlivosti pro μ

→ Co ten vzorec znamená?

$$(D, H) = \left(\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2}; \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} z_{1-\alpha/2} \right)$$

$$\bar{X} \sim N\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right)$$

$$SE(\bar{X}) = \sqrt{\frac{\sigma^2}{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$



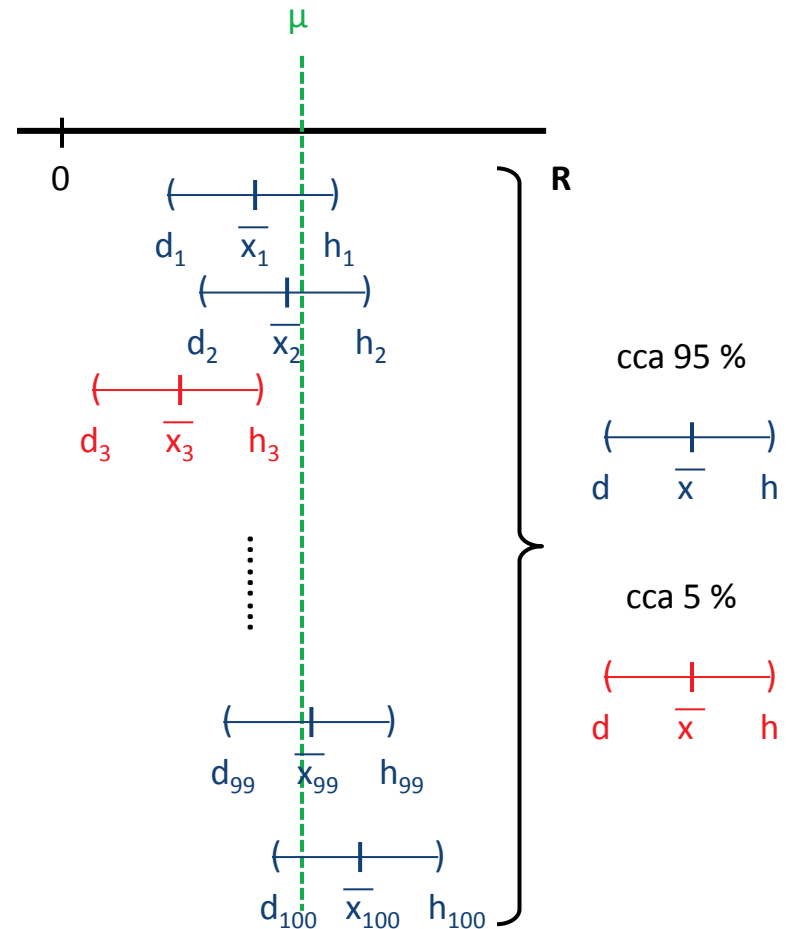
→ Tedy zjednodušeně:

$$100(1-\alpha)\% \text{ IS} = \bar{X} \pm z_{1-\alpha/2} SE(\bar{X})$$

Interpretace intervalu spolehlivosti

- Poloha neznámého parametru je konstantní (jsme-li frekventisti)!
- 95% interval spolehlivosti má následující interpretaci:

Pokud bychom opakovaně vybírali skupiny subjektů o stejné velikosti (n) a počítali výběrový průměr s 95% IS, pak 95 % těchto intervalů spolehlivosti neznámý parametr obsahuje a 5 % ho neobsahuje. Tedy 95% IS obsahuje neznámý parametr s rizikem α .



Co když neznáme σ ?

- ➔ V předchozím případě jsme předpokládali, že známe přesnou hodnotu rozptylu / směrodatné odchylky. To je v praxi nereálné!
- ➔ Musíme použít jinou statistiku s jiným rozdělením pravděpodobnosti.
- ➔ Čím bychom mohli nahradit σ ?
- ➔ K čemu to povede?

Co když neznáme σ ?

➔ Musíme použít jinou testovou statistiku s jiným rozdělením pravděpodobnosti.

➔ Čím bychom mohli nahradit σ ?

➔ Logické je použít výběrovou směrodatnou odchylku s .

➔ Náhrada ale není úplně jednoduchá – není to dosazení s za σ .

$$s^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$$

➔ K čemu to bude?

➔ Pomocí s^2 vytvoříme statistiku s chí-kvadrát rozdělením (χ^2) – tu pak použijeme pro vytvoření statistiky se Studentovým t rozdělením (viz přednáška o jednotlivých rozděleních pravděpodobnosti):

$$X \sim N(0,1), Q \sim \chi^2(k) \rightarrow T = \frac{X}{\sqrt{Q/k}} \rightarrow T \sim t(k)$$

Co když neznáme σ ?

→ Lze ukázat, že statistika $K = \frac{n-1}{\sigma^2} s^2 \sim \chi^2(n-1)$

→ Použijeme ještě standardizovanou normální veličinu $Z = \frac{\bar{X}_n - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \sim N(0,1)$

→ A obě dohromady použijeme pro vytvoření T statistiky:

$$T = \frac{Z}{\sqrt{K/(n-1)}} = \frac{\sqrt{n}(\bar{X}_n - \mu) / \sigma}{\sqrt{(n-1)s^2 / (n-1)\sigma^2}} = \frac{\bar{X}_n - \mu}{s / \sqrt{n}} \rightarrow T \sim t(n-1)$$

→ Z toho plyne tvar $100(1-\alpha)\%$ intervalu spolehlivosti pro μ v případě, že neznáme hodnotu σ :

$$(D, H) = \left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1); \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \right)$$

Příklad – konstrukce intervalu spolehlivosti

- Chceme sestavit 95% IS pro odhad střední hodnoty systolického tlaku studentů vysokých škol.

$$n = 100$$

$$\bar{X}_n = 123,4 \text{ mm Hg}$$

$$s = SD = 14,0 \text{ mm Hg}$$

$$SE = 14 / \sqrt{100} = 1,4 \text{ mm Hg}$$

$$t_{1-\alpha/2}(n-1) = 1,98$$

} naměřené hodnoty

→ z tabulek

$$95\% \text{ IS} = (D, H) = \left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1); \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \right)$$

$$95\% \text{ IS} = (D, H) = \left(123,4 - \frac{14,0}{\sqrt{100}} t_{1-0,05/2}(99); 123,4 + \frac{14,0}{\sqrt{100}} t_{1-0,05/2}(99) \right)$$

$$95\% \text{ IS} = (D, H) = (120,6; 126,2)$$

Šířka intervalu spolehlivosti

→ Co ovlivňuje šířku intervalu spolehlivosti?

$$100(1 - \alpha)\% \text{ IS pro } \mu = (D, H) = \left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1); \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \right)$$

1. **Velikost vzorku** – s rostoucí velikostí vzorku je IS užší (máme více informace a odhad je přesnější), zároveň se kvantily t rozdělení blíží kvantilům standardizovaného normálního rozdělení.
2. Variabilita náhodné veličiny
3. Spolehlivost, kterou požadujeme

Šířka intervalu spolehlivosti

→ Co ovlivňuje šířku intervalu spolehlivosti?

$$100(1 - \alpha)\% \text{ IS pro } \mu = (D, H) = \left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1); \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \right)$$

1. Velikost vzorku
2. **Variabilita náhodné veličiny** – čím náhodná veličina vykazuje větší variabilitu, tím je IS pro odhad střední hodnoty širší, tedy odhad je méně přesný.
3. Spolehlivost, kterou požadujeme

Šířka intervalu spolehlivosti

→ Co ovlivňuje šířku intervalu spolehlivosti?

$$100(1 - \alpha)\% \text{ IS pro } \mu = (D, H) = \left(\bar{X} - \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1); \bar{X} + \frac{s}{\sqrt{n}} t_{1-\alpha/2}(n-1) \right)$$

1. Velikost vzorku
2. Variabilita náhodné veličiny
3. **Spolehlivost, kterou požadujeme** – chceme-li mít větší jistotu, že náš IS pokrývá neznámou střední hodnotu, IS musí být samozřejmě širší, stačí-li nám menší spolehlivost, bude užší. Standardně se používá 95% IS (ale také 90% anebo 99%)

Poznámka 1

- Lze vytvořit i IS pro odhad parametru σ , který je založen na již zmíněné statistice K .

$$K = \frac{n-1}{\sigma^2} s^2 \sim \chi^2(n-1)$$

- Lze vytvořit i IS pro odhad podílu dvou parametrů σ_1 a σ_2 (pomocí F statistiky). Ten lze použít pro hodnocení homogenity rozptylů dvou výběrů, která je jedním z předpokladů v testování hypotéz.

Poznámka 2

→ Velmi důležitý je i IS pro odhad střední hodnoty rozdílu dvou náhodných veličin.

$$\left. \begin{array}{l} X \sim N(\mu_1, \sigma_1^2) \\ Y \sim N(\mu_2, \sigma_2^2) \end{array} \right\} \left. \begin{array}{l} \bar{X} \sim N(\mu_1, \frac{\sigma_1^2}{n_1}) \\ \bar{Y} \sim N(\mu_2, \frac{\sigma_2^2}{n_2}) \end{array} \right\} \bar{X} - \bar{Y} \sim N(\mu_1 - \mu_2, \frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2})$$

→ **Známe-li σ_1 a σ_2** , provedeme standardizaci a pak odvodíme 100(1- α)% IS:

$$1 - \alpha = P(\bar{X} - \bar{Y} - z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X} - \bar{Y} + z_{1-\alpha/2} \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1} + \frac{\sigma_2^2}{n_2}})$$

→ **Neznáme-li σ_1 a σ_2** , použijeme statistiky K_1 a K_2 , abychom se zbavili σ_1 a σ_2 , výsledná statistika má opět Studentovo t rozdělení.

$$1 - \alpha = P(\bar{X} - \bar{Y} - t_{1-\alpha/2}(v) \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} \leq \mu_1 - \mu_2 \leq \bar{X} - \bar{Y} + t_{1-\alpha/2}(v) \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}})$$

Příklad

→ Radiofrekvenční ablace tkáně slinivky břišní u prasat. Sledujeme vliv typu chlazení okolních struktur (A – žádné, B – průplach vodou) na největší rozměr nekrózy. Zajímá nás rozdíl v efektu obou typů chlazení a jeho 95% IS.

$$\begin{array}{llll} n_A = 18 & \bar{x}_A = 25,1 \text{ mm} & SD_A = s_A = 0,8 & SE_A = 0,8 / \sqrt{18} = 0,19 \text{ mm} \\ n_B = 17 & \bar{x}_B = 21,8 \text{ mm} & SD_B = s_B = 2,4 & SE_B = 2,4 / \sqrt{17} = 0,58 \text{ mm} \end{array}$$

→ Dosadíme do vzorce s použitím příslušného t kvantilu: $t_{0,975}(v) = 2,03$

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P(\bar{x}_A - \bar{x}_B - t_{1-\alpha/2}(v) \sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}} \leq \mu_A - \mu_B \leq \bar{x}_A - \bar{x}_B + t_{1-\alpha/2}(v) \sqrt{\frac{s_A^2}{n_A} + \frac{s_B^2}{n_B}}) \\ &= P(3,3 - t_{0,975}(v) \sqrt{\frac{0,8^2}{18} + \frac{2,4^2}{17}} \leq \mu_A - \mu_B \leq 3,3 + t_{0,975}(v) \sqrt{\frac{0,8^2}{18} + \frac{2,4^2}{17}}) \\ &= P(2,1 \leq \mu_A - \mu_B \leq 4,5) \end{aligned}$$

Poznámka 3

➔ Interval spolehlivosti počítá pouze s variabilitou danou náhodným výběrem, nepočítá se zdroji systematického zkreslení.

➔ Příklady:

➔ Měření krevního tlaku může být systematicky zkresleno starým měřidlem („technical bias“).

➔ Měření krevního tlaku může být systematicky zkresleno tím, že se do studie přihlásí pouze určitá skupina osob („selection bias“).

Neparametrické metody pro konstrukci IS

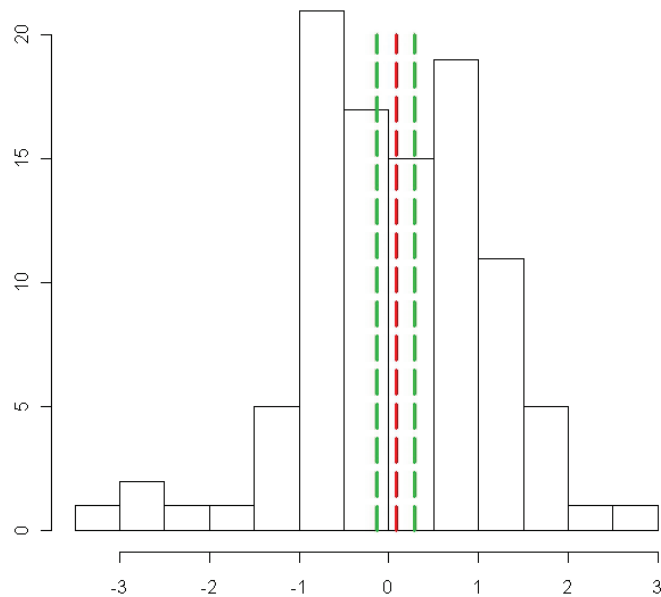
- ➔ Variabilitu výběrového průměru lze odhadnout i pomocí neparametrických metod:
- ➔ **Bootstrap** – je založen na principu opakovaného vzorkování naměřených dat s vrácením, kdy pro vytvoření nového vzorku dat může být každý prvek použit více než jednou, právě jednou anebo není použit vůbec (ovšem se zachováním celkové velikosti souboru n i velikosti jednotlivých skupin).
- ➔ **Jackknife** – opakovaný výpočet sledované charakteristiky je prováděn vždy s vynecháním právě jednoho pozorování. Tento postup nám stejně jako v případě metody bootstrap poskytuje představu o rozsahu hodnot, ve kterých se námi sledovaná charakteristika může pohybovat, budeme-li považovat naměřená data za reprezentativní vzorek z cílové populace.

Příklad

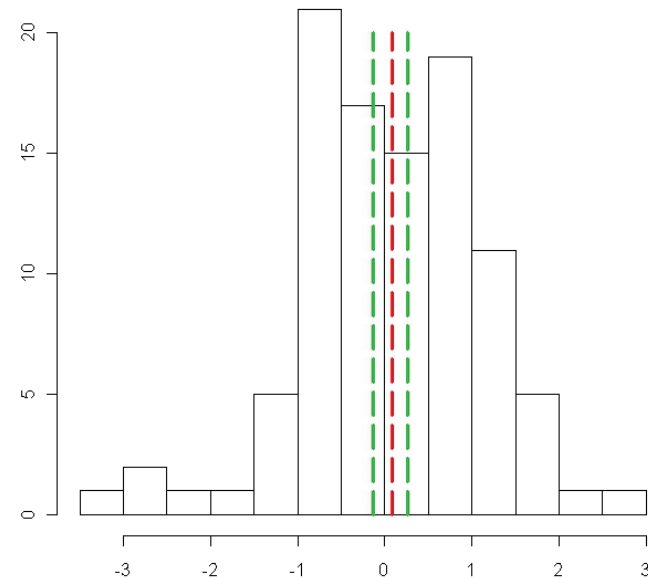
- Máme náhodný výběr o velikosti $n = 100$ z $N(0,1)$. Vytvoříme 95% IS pro průměr pomocí směrodatné chyby a pomocí metody bootstrap (1000 bootstrap vzorků).

$$\bar{x} = 0,079$$

$$(d, h) = (-0,126; 0,284)$$



$$(d, h) = (-0,133; 0,264)$$



Poděkování...

Rozvoj studijního oboru „Matematická biologie“ PŘF MU Brno je finančně podporován prostředky projektu ESF č. CZ.1.07/2.2.00/07.0318 „Víceoborová inovace studia Matematické biologie“ a státním rozpočtem České republiky

