



SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

© Institut biostatistiky a analýz

V. PARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

pokračování

BURGOVA METODA

nejpopulárnější metoda odhadu parametrů AR modelu z N vzorků

☑ předpokládá:

→ stacionární proces v širším slova smyslu

☑ využívá:

→ optimální dopřednou a zpětnou lineární predikci z hlediska minimální energie chybové posloupnosti;

☑ požaduje:

→ aby AR parametry splňovaly Levinsonovu rekurzi

BURGOVA METODA

✓ odhad hodnoty $x(nT_{vz})$:

→ dopřednou lin. predikcí: $\hat{x}(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_p(k)x(nT_{vz} - kT_{vz})$

→ zpětnou lin. predikcí: $\hat{x}(nT_{vz} - pT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_p^*(k)x(nT_{vz} + kT_{vz} - pT_{vz})$

✓ chyby odhadu:

→ dopřednou lin. predikcí: $e_p^f(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) - \hat{x}(nT_{vz})$

→ zpětnou lin. predikcí: $e_p^b(nT_{vz}) = x(nT_{vz} - pT_{vz}) - \hat{x}(nT_{vz} - pT_{vz})$

✓ energie chybové posloupnosti

$$E_p = \sum_{n=p}^{N-1} \left[|e_p^f(nT_{vz})|^2 + |e_p^b(nT_{vz})|^2 \right]$$

✓ chceme, aby byla splněna Levinsonova rekurze

$$a_p(k) = a_{p-1}(k) + a_p(p) \cdot a_{p-1}^*(p-k) = a_{p-1}(k) + K_p a_{p-1}^*(p-k)$$

($K_p = a_p(p)$ je koeficient odrazu v mřížkovém realizačním schématu prediktoru)

chceme,
aby byl
AR
model
stabilní

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

obecně:

$$a_k(k) = \frac{-\gamma_{yy}(k) + \sum_{r=1}^{k-1} a_{k-1}(r) \cdot \gamma_{yy}(k-r)}{E_{k-1}^f}$$

$$a_k(i) = a_{k-1}(i) + a_{k-1}(k-i) \cdot a_k(k)$$

$$E_k^f = \sigma_k^2 = [1 - a_k^2(k)] \cdot \sigma_{k-1}^2$$

BURGOVA METODA

- ☑ až se všechno podosazuje je

$$E_p = f(a_p(p), E_{p-1})$$

tohle známe z předchozí rekurze

- ☑ abychom E_p minimalizovali, derivujeme podle $a_p(p)$ a výsledek položíme roven nule, z toho pak je

$$a_i(i) = K_i = \frac{-2 \sum_{k=i}^{N-1} e_{i-1}^f(k) \cdot e_{i-1}^{b^*}(k-1)}{\sum_{k=i}^{N-1} \left(|e_{i-1}^f(k)|^2 + |e_{i-1}^{b^*}(k-1)|^2 \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

$|K_i(i)| \leq 1$... model je tedy opravdu stabilní

!!! HALELUJAH !!!

BURGOVA METODA

$$\hat{K}_i = \frac{-2 \sum_{k=i}^{N-1} e_{i-1}^f(k) \cdot e_{i-1}^{b*}(k-1)}{E_{i-1}^f + E_{i-1}^b}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

odhad celkové energie chyby
dokážeme jej také počítat
rekurzivně:

$$E_i = E_{i-1} \cdot (1 - |a_{i-1}(i-1)|^2) - |e_{i-1}^b(N-i)|^2 - |e_{i-1}^f(i)|^2$$

Andersonův vztah

odhad výkonového spektra podle pana Burga

$$\hat{P}_{xx}^{BU}(f) = \frac{T_{vz} \cdot \hat{E}_p}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_p(k) \cdot e^{-j2\pi f k T_{vz}} \right|^2}$$

BURGOVA METODA

☑ **výhody:**

- dobrá frekvenční rozlišovací schopnost;
- AR model je stabilní;
- dobře se to počítá

☑ **nevýhody:**

- štěpení spektrálních čar při velkém poměru signál/šum;
- parazitní vrcholy ve spektru při modelech vyšších řádů
- u harmonických signálů v šumu je odhad citlivý na počáteční fázi harmonického signálu – projevuje se to frekvenčním posunem

BURGOVA METODA

☑ jak na uvedené nevýhody?

→ např. woknováním posloupnosti čtverců chyb

$$E_p^{WBU} = \sum_{n=p}^{N-1} w_p(nT_{vz}) \left[|e_p^f(nT_{vz})|^2 + |e_p^b(nT_{vz})|^2 \right]$$

potom

$$\hat{K}_i = \frac{-2 \sum_{k=i}^{N-1} w_{i-1}(kT_{vz}) \cdot e_{i-1}^f(kT_{vz}) \cdot e_{i-1}^{b*}(kT_{vz} - T_{vz})}{\sum_{k=i}^{N-1} w_{i-1}(kT_{vz}) \left(|e_{i-1}^f(kT_{vz})|^2 + |e_{i-1}^{b*}(kT_{vz} - T_{vz})|^2 \right)}, \quad i = 1, 2, \dots, p$$

umí se to, dělalo se to s Hammingovým oknem, parabolickým oknem, adaptivně, ...

SPEKTRÁLNÍ ODHAD S MAXIMÁLNÍ ENTROPIÍ (MEM)

- ☑ je založen na extrapolaci známého segmentu AK posloupnosti pro další hodnoty posunutí

máme $\{\gamma_{xx}(0), \gamma_{xx}(1), \dots, \gamma_{xx}(p)\}$

a jak určit $\{\gamma_{xx}(p+1), \gamma_{xx}(p+2), \dots\}$, aby výsledná matice zůstala semidefinitní

existuje nepřeberně možností

Burg – extrapolaci provést tak, aby extrapolovaná AK posloupnost měla maximální entropii, tzn. posloupnost má být co nejnáhodnější ze všech co mají určených $p+1$ prvních členů \Rightarrow funkce spektrální hustoty bude nejplošší

- ☑ takový odhad klade nejméně požadavků na neznámou posloupnost;
- ☑ maximální znáhodnění produkuje řešení s minimální chybou

SPEKTRÁLNÍ ODHAD S MAXIMÁLNÍ ENTROPIÍ (MEM)

obecná formulace pro určení AR spektra posloupnosti s maximální entropií vede na soustavu nelineárních rovnic

Y-W odhad je odhad s maximální entropií pouze v případě, že je analyzovaná AK posloupnost generována náhodným procesem s normálním rozložením;

Burgův odhad by byl odhad autokorelační posloupnosti identický s průběhem skutečné AK posloupnosti

NEPODMÍNĚNÁ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

$$E_p = \sum_{n=p}^{N-1} \left[\left| e_p^f(nT_{vz}) \right|^2 + \left| e_p^b(nT_{vz}) \right|^2 \right] =$$

$$= \sum_{n=p}^{N-1} \left[\left| x(nT_{vz}) + \sum_{k=1}^p a_p(k) \cdot x(nT_{vz} - kT_{vz}) \right|^2 + \left| x(nT_{vz} - pT_{vz}) + \sum_{k=1}^p a_p^*(k) \cdot x(nT_{vz} + kT_{vz} - pT_{vz}) \right|^2 \right]$$

až sem je to totéž jako u Burgovy metody, ale teď si nebudeme přát, aby koeficienty $a_p(k)$ splňovaly Levinsonovu rekurzi



metoda nejmenších čtverců na rovnici E_p se všemi koeficienty $a_p(k)$

NEPODMÍNĚNÁ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

$$\sum_{k=1}^p a_p(k).r_{xx}(l,k) = -r_{xx}(l,0); \quad l = 1,2,\dots,p$$

kde $r_{xx}(l,k)$ je cosi, čemu se říká autokorelace a je to definováno vztahem

$$r_{xx}(l,k) = \sum_{n=p}^{N-1} [x(nT_{vz} - kT_{vz}).x(nT_{vz} - lT_{vz}) + x(nT_{vz} - pT_{vz} + lT_{vz}).x(nT_{vz} - pT_{vz} + kT_{vz})],$$

$$0 \leq l,k \leq p$$

minimální energie predikční chyby je

$$E_p^{LS} = r_{xx}(0,0) + \sum_{k=1}^p a_p(k).r_{xx}(0,k)$$

$$\mathbf{R}_p \cdot \mathbf{A}_p = \mathbf{E}_p, \quad \text{kde}$$

LEVINSONŮV – DURBINŮV ALGORITMUS

dopředná lineární predikce

normální rovnice:

$$\sum_{k=0}^p a_p(k) \gamma_{yy}(lT_{vz} - kT_{vz}) = 0 \quad l=1,2,\dots,p; \quad a_p(0)=1$$

výsledná minimální MSE

$$E_p^f = \gamma_{yy}(0) + \sum_{k=1}^p a_p(k) \gamma_{yy}(-kT_{vz})$$

rozšířené normální rovnice:

$$\sum_{k=0}^p a_p(k) \gamma_{yy}(lT_{vz} - kT_{vz}) = \begin{cases} E_p^f & l=0 \\ 0 & l=1,2,\dots,p \end{cases}$$

NEPODMÍNĚNÁ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

$$\mathbf{A}_p = \begin{bmatrix} 1 \\ a_p(1) \\ \vdots \\ a_p(p) \end{bmatrix}; \quad \mathbf{R}_p = \begin{bmatrix} r_{xx}(0,0) & \cdots & r_{xx}(0,p) \\ \vdots & & \vdots \\ r_{xx}(p,0) & \cdots & r_{xx}(p,p) \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_p = \begin{bmatrix} E_p^{LS} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

konečně odhad výkonového spektra:

$$\hat{P}_{xx}^{LS}(f) = \frac{T_{vz} \cdot \hat{E}_p^{LS}}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_p(k) \cdot e^{-j2\pi f k T} \right|^2}$$

NEPODMÍNĚNÁ METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

počítání:

- ❖ Gaussovou eliminační metodou – $O(p^3)$
- ❖ dá se to zefektivnit [Marple] - $O(p^2)$

R_p se vyjádří jako součty a součiny Toeplitzových a Hankelových matic, ve skutečnosti pracnost asi o 20% vyšší než u Burga

zvýšení pracnosti se vrátí v lepších vlastnostech:

- ❖ je menší frekvenční posun, není štěpení spektrálních čar, nejsou parazitní vrcholy;
- ❖ model nemusí být stabilní – ale to nám v podstatě moc nevadí

ILUSTRACE

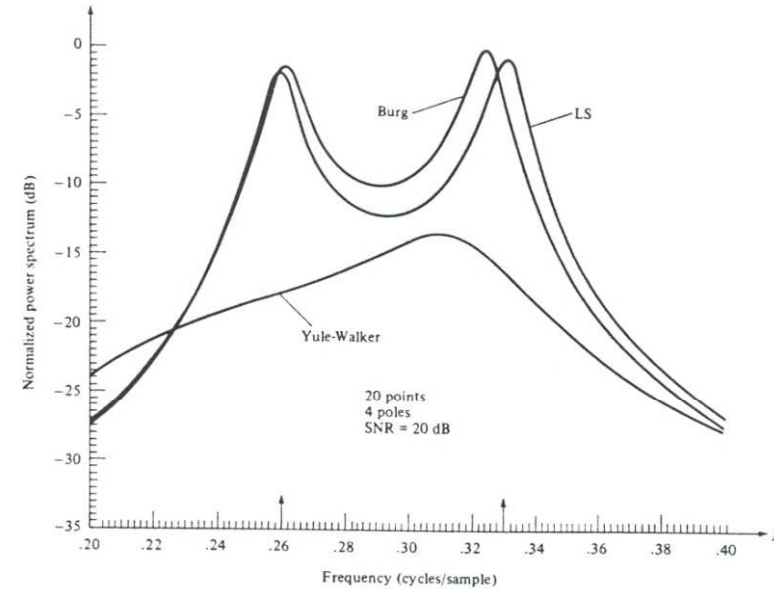
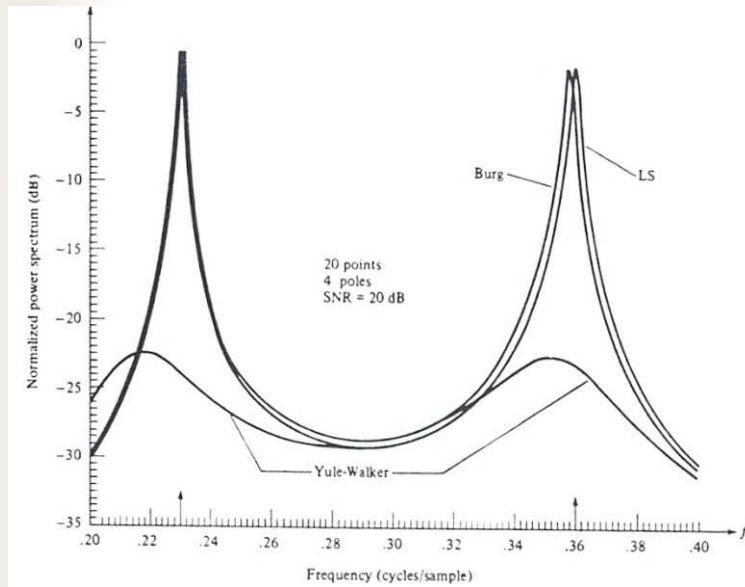
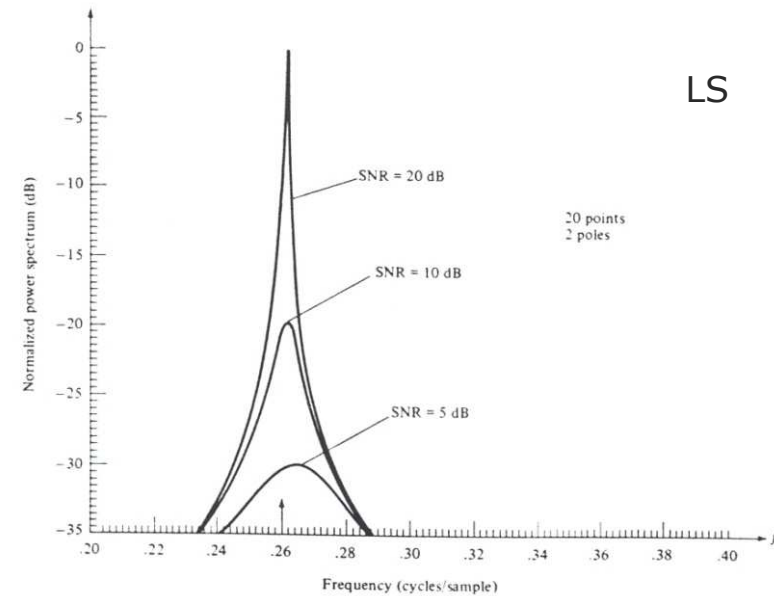


FIGURE 8.7 Comparison of AR spectrum estimation methods.



ILUSTRACE

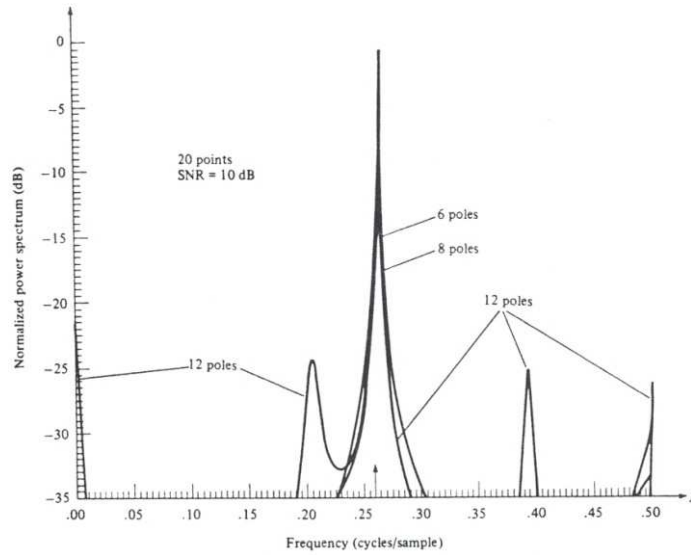


FIGURE 8.9 Effect of filter order on Burg method.

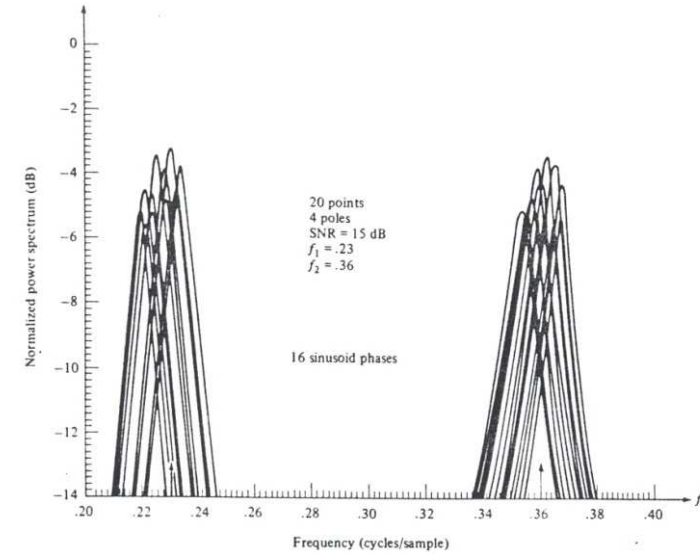
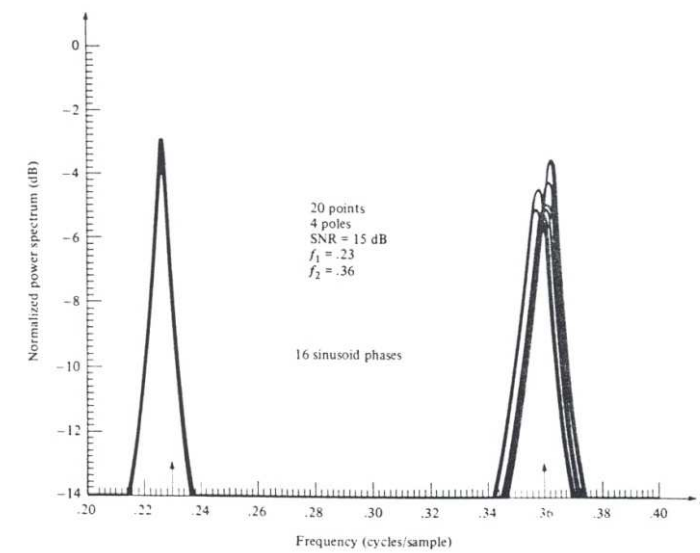
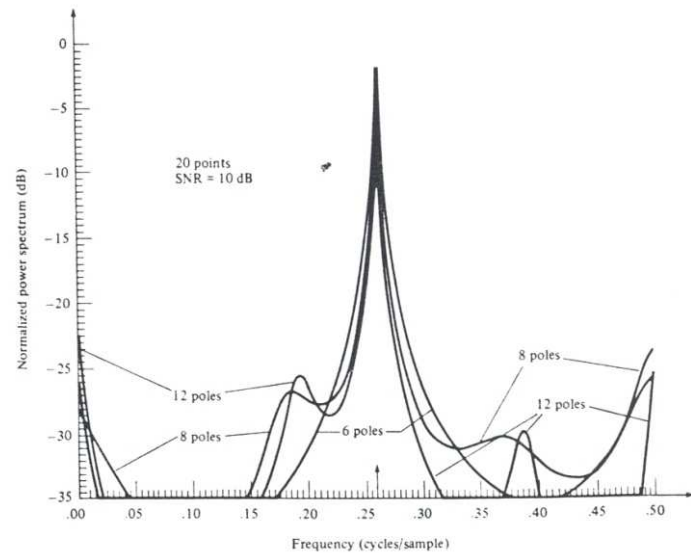


FIGURE 8.11 Effect of initial phase on Burg method.



ILUSTRACE

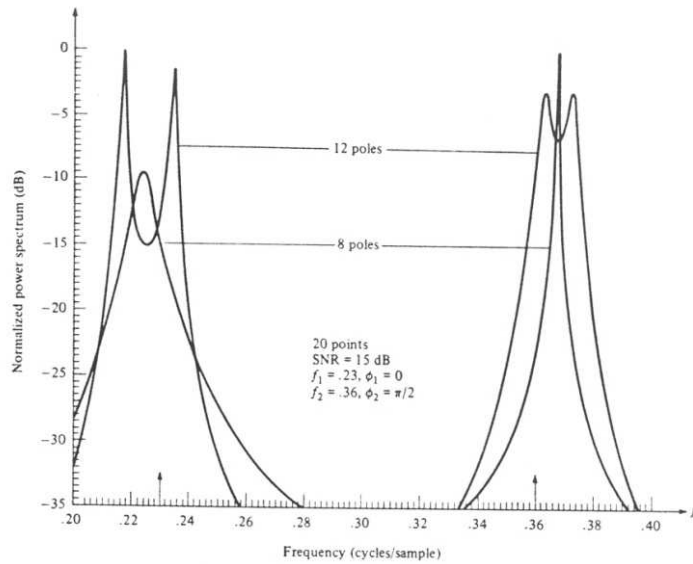
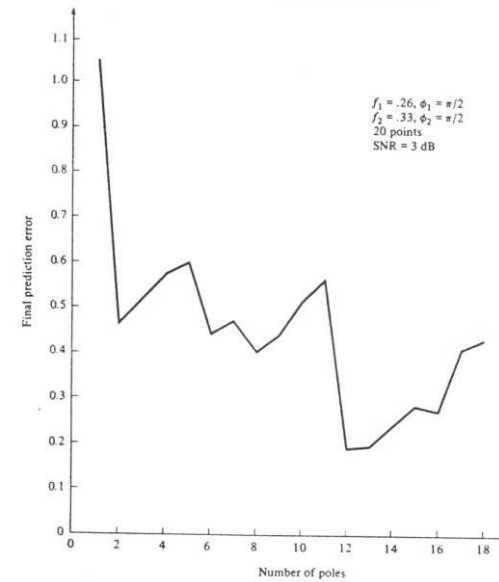
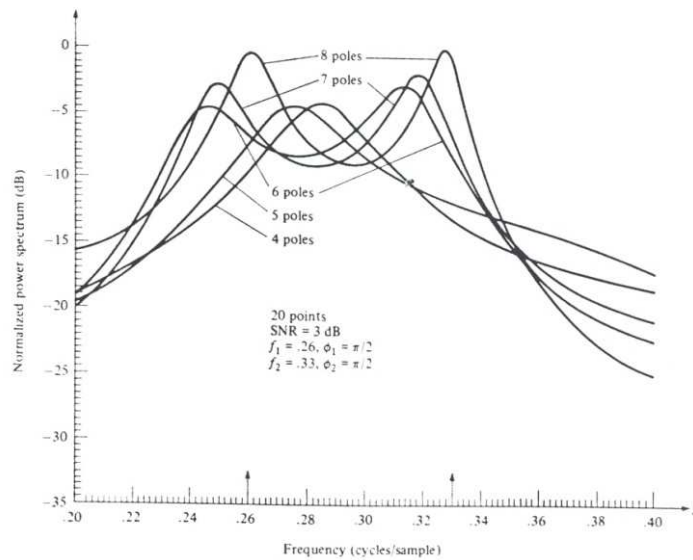
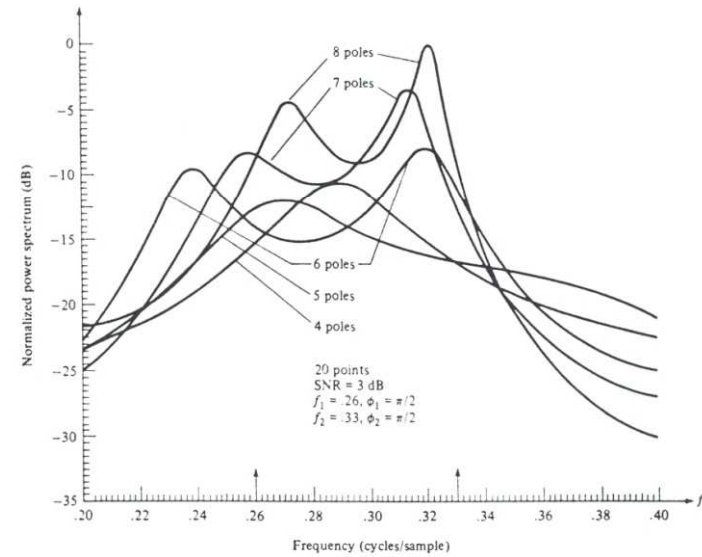


FIGURE 8.13 Line splitting in Burg method.



KOMENTÁŘE K ILUSTRACÍM

☑ parazitní vrcholy

pokud by byl analyzovaný proces přesně typu AR(p), pak koeficienty modelu

$$\hat{a}_p(i) = \begin{cases} a_p(i) & i = 1, 2, \dots, p \\ 0 & i = p + 1, \dots, n \end{cases}$$

protože to tak není $\hat{a}_p(i) \neq 0$ pro $i > p \Rightarrow$ existuje $n-p$ pólů navíc; pokud jsou tyto nadbytečné póly v blízkosti jednotkové kružnice, projeví se ve spektru

doporučení: řád modelu by neměl být větší než $N/2$; N je počet vzorků v záznamu

☑ fázová závislost

- u AR modelů klesá s délkou posloupnosti;
- různá pro různé odhady (u Burgova odhadu je až 16 %);
- pomáhá woknování;

KOMENTÁŘE K ILUSTRACÍM

☑ štěpení spektrálních čar

u Burgova algoritmu, když je:

- vysoký SNR;
- počáteční fáze sinové složky je rovna lichému násobku 45° ;
- doba záznamu je taková, že obsahuje lichý počet čtvrtin periody harmonické složky;
- AR parametrů je velký počet ve srovnání s počtem vzorků v sekvenci \Rightarrow roste-li počet vzorků relativně vůči řádu modelu, štěpení vrcholů se omezuje;
- vysvětluje se tím, že Burgův algoritmus optimálně neminimalizuje chybu

KOMENTÁŘE K ILUSTRACÍM

☑ citlivost na šum

stejnosečná složka a lineární trend znehodnocuje spektrum na nízkých kmitočtech – **odstranit předem !!!**

zobecnění problému:

$y_n = x_n + w_n$ a necht' je w_n bílý šum s rozptylem σ_w^2 a je nekorelovaný s x_n ;

pak výkonové spektrum

$$\hat{P}_y(f) = \frac{T_{vz} \cdot \sigma_x^2}{\left| 1 + \sum_i a_p(i) \cdot e^{-j2\pi f i T_{vz}} \right|^2} + \sigma_w^2 T_{vz}$$

$$\hat{P}_y(f) = \frac{T_{vz} \cdot \sigma_x^2}{A(z) \cdot A^*(1/z^*)} + \sigma_w^2 T_{vz} = \frac{[\sigma_x^2 + \sigma_w^2 A(z) \cdot A^*(1/z^*)] T_{vz}}{A(z) \cdot A^*(1/z^*)}$$

!!! tohle už ale není přenosová funkce AR, alébrž ARMA !!!

KOMENTÁŘE K ILUSTRACÍM

☑ citlivost na šum – pokračování

Ize si pomoci:

1. použitím ARMA odhadu (o tom se dozvíme později);
2. odfiltrováním šumu (nejdříve je potřeba určit vlastnosti šumu);
3. použitím AR odhadu vyššího řádu

za tím je Woldova dekompozice

vzhledem k doporučení omezujícímu štěpení vrcholů (řád menší než polovina počtu vzorků), nelze řád modelu zvyšovat bezhlavě;

4. kompenzovat odhad AK funkce nebo reflexních koeficientů vzhledem k šumu

MODEL SIGNÁLU PRŮCHODEM LINEÁRNÍ SOUSTAVOU

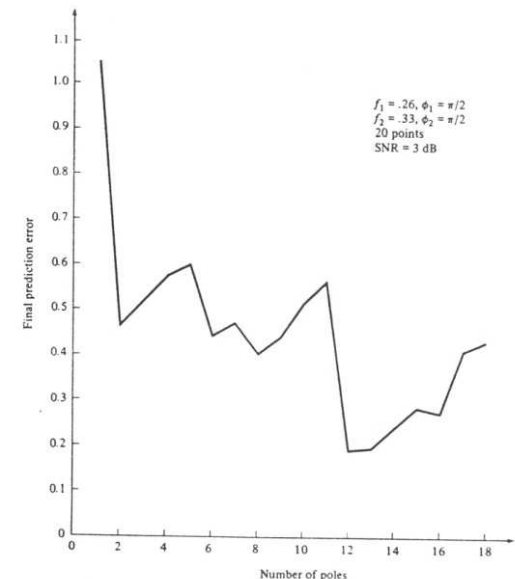
- ☑ dekompoziční teorém (Wold 1938)
 - jakýkoliv ARMA nebo MA proces může být jednoznačně reprezentován AR modelem max. ∞ řádu;
 - jakýkoliv ARMA nebo AR proces lze reprezentovat MA modelem max. ∞ řádu;



je nám jedno, co použijeme za model, jen by měl mít co nejméně parametrů, které se snadno počítají

URČENÍ ŘÁDU AR MODELU

- ☑ řád nebývá znám apriori, je třeba jej odhadnout – je-li nízký – spektrum se vyhlazuje, je-li vysoký – zvýšený výskyt parazitních detailů
 - ➔ první možnost – zvyšovat řád, dokud predikční chyba nebude minimální
 - ☐ všechny LMS metody mají teoreticky monotónně klesající chybu
- $E_i = E_{i-1}[1 - |a_i(i)|^2] \dots$ Y.-W. metoda



URČENÍ ŘÁDU AR MODELU

→ kritéria, která vykazují extrém se zvyšováním řádu modelu

konečná predikční chyba

(final prediction error – FPE) – Akaike

$$\text{FPE}_p = E_p \cdot \frac{N+p+1}{N-(p+1)} \quad N \text{ je počet vzorků}$$

zlomek roste s $p \rightarrow N$, protože roste neurčitost odhadu E_p ;
paráda na umělých datech čistých AR procesů; na reálných datech příliš malé

Akaikovo informační kritérium (AIC)

pro normální rozložení

$\text{AIC}_p = \ln(E_p) + 2(p+1)/N$, někdy $\ln(E_p) + 2p/N$;
druhý člen vyjadřuje cenu použití zbytečných AR koeficientů;
AIC je statisticky nekonzistentní odhad; pravděpodobnost chyby odhadu řádu nejde k nule, když $N \rightarrow \infty$

URČENÍ ŘÁDU AR MODELU

→ kritéria, která vykazují extrém se zvyšováním řádu modelu

minimalizace délky popisu (Rissanenovo informační kritérium)
(minimization of the description length – MDL)

$$\text{MDL}_p = N \cdot \ln(E_p) + p \cdot \ln(N)$$

je statisticky konzistentní;

kritérium AR přenosu (Parzenovo kritérium)

(criterion AR transfer – CAT)

$$\text{CAT}_p = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^p \frac{1}{\hat{E}'_k} - \frac{1}{\hat{E}_p}, \quad \hat{E}'_k = \frac{N}{N-k} \cdot \hat{E}_k$$

- pro krátké posloupnosti nefunguje nic; $p \in \langle N/3; N/2 \rangle$;
- pro harmonický proces v šumu – FPE a AIC – malé p , je-li SNR vysoký;