



SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD



prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.

holcik@iba.muni.cz

© Institut biostatistiky a analýz

V. PARAMETRICKÉ METODY ODHADU VÝKONOVÉHO SPEKTRA

pokračování



MA A ARMA MODELY

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

ARMA:

$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_k y(nT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=0}^q b_k x(nT_{vz} - kT_{vz}) \quad | \cdot y(nT_{vz} - mT_{vz}), E$$

$$E[y(nT_{vz})y(nT_{vz} - mT_{vz})] = -\sum_{k=1}^p a_k E[y(nT_{vz} - kT_{vz})y(nT_{vz} - mT_{vz})] + \sum_{k=0}^q b_k E[x(nT_{vz} - kT_{vz})y(nT_{vz} - mT_{vz})]$$

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=0}^q b_k \gamma_{xy}(mT_{vz} - kT_{vz})$$

$\gamma_{xy}(mT_{vz})$... vzájemná korelační posloupnost mezi $x(nT_{vz})$ a $y(nT_{vz})$

$$\gamma_{xy}(mT_{vz}) = E[y(nT_{vz})x(nT_{vz} + mT_{vz})] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} h(kT_{vz})x(nT_{vz} - kT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz})\right] =$$

předpokládáme kauzální filtr

$$= \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_{vz}) E[x(nT_{vz}) \cdot x(nT_{vz} + mT_{vz} + kT_{vz})] = \sum_{k=0}^{\infty} h(kT_{vz}) \gamma_{xx}(mT_{vz} + kT_{vz}) =$$

$$= h(-mT_{vz}) \cdot \sigma_x^2 = \begin{cases} 0, & m > 0 \\ \sigma_x^2 \cdot h(-mT_{vz}) & m \leq 0 \end{cases}$$

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

ARMA:

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \cdot \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) & m > q \\ -\sum_{k=1}^p a_k \cdot \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{q-m} h(kT_{vz}) \cdot b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{yy}(-mT_{vz}) & m < 0 \end{cases}$$

nelineární vztah mezi $\gamma_{yy}(mT_{vz})$ a parametry a_k a b_k

ZÁKLADNÍ VZTAHY MEZI PARAMETRY MODELU A AUTOKORELAČNÍ POSLOUPNOSTÍ

☑ opakování:

AR:

$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_k y((n-k)T_{vz}) + \sum_{k=0}^q b_k x((n-k)T_{vz})$$

$$b_0 = 1 a \gamma_{xx}(kT_{vz}) = \begin{cases} \sigma_x^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) & m > q \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sigma_x^2 \sum_{k=m}^q b_k h(kT_{vz} + mT_{vz}) & 0 \leq m \leq q \end{cases}$$

MA MODELY

☑ opakování:

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} 0 & m > q \\ \sigma_x^2 \sum_{k=0}^{q-m} b_k b_{k+m} & 0 \leq m \leq q \\ \gamma_{yy}(-mT_{vz}) & m < 0 \end{cases}$$

$$y_n = \sum_{m=0}^q b_m x_{n-m}$$

$$E\{x_n\} = 0$$

$$E\{x_{n+m} x_n\} = \begin{cases} \delta_x^2 & m = 0 \\ 0 & \text{jindy} \end{cases}$$

MA MODELY

$$B(z).B(z^{-1}) = D(z) = \sum_{m=-q}^q d_m z^{-m}$$

$$\begin{aligned} & (b_0 z^0 + b_1 z^1 + \dots + b_q z^q) \cdot (b_0 z^0 + b_1 z^{-1} + \dots + b_q z^{-q}) = \\ & = b_0^2 + b_0 b_1 z + \dots + b_0 b_q z^q + b_0 b_1 z^{-1} + b_1^2 + b_2 b_1 z + \dots + b_q b_1 z^{q-1} + \dots + \\ & \quad + b_0 b_q z^{-q} + b_1 b_q z^{-q+1} + b_2 b_q z^{-q+2} + \dots + b_q^2 = \\ & = \underbrace{(b_0 b_0 + b_1 b_1 + \dots + b_q b_q)}_{d_0} \cdot z^0 + \underbrace{(b_0 b_1 + b_1 b_2 + \dots + b_{q-1} b_q)}_{d_{-1}} \cdot z^{-1} + \\ & \quad + \underbrace{(b_1 b_0 + b_2 b_1 + \dots + b_q b_{q-1})}_{d_1} \cdot z^1 + \dots + (\dots) \cdot z^q \end{aligned}$$

$$d_m = \sum_{k=0}^{q-|m|} b_k b_{k+m} \quad \text{pro } |m| \leq q$$

MA MODELY

Tedy

$$\gamma_{yy}(mT) = \begin{cases} 0 & |m| > q \\ \sigma_x^2 d_m & |m| \leq q \end{cases}$$

metoda momentů

a výkonové spektrum

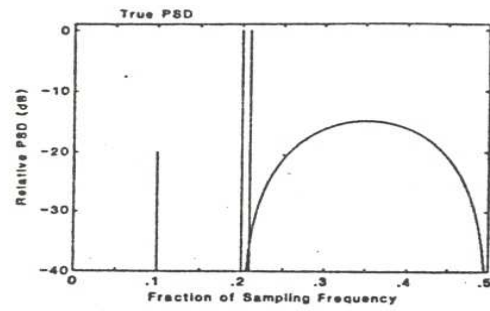
$$\Gamma_{yy}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^q \gamma_{yy}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}}$$

odhad spektra:

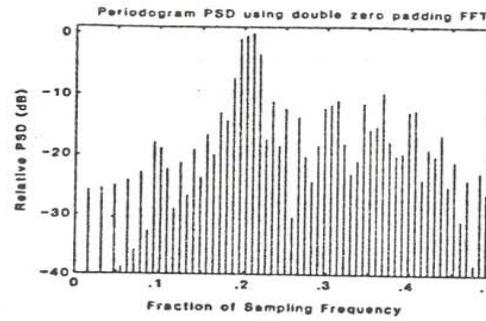
$$P_{yy}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^q r_{yy}(mT_{vz}) \cdot e^{-j2\pi f m T_{vz}}$$



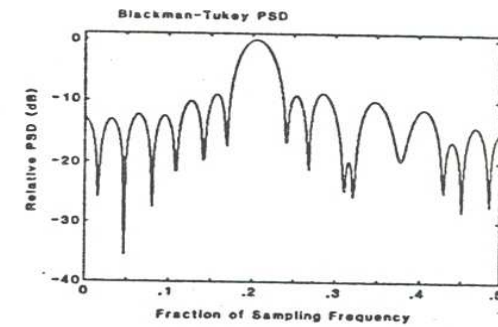
!!! A TO JE KLASIKA !!!



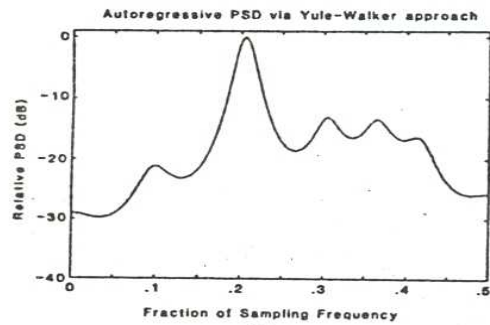
(a)



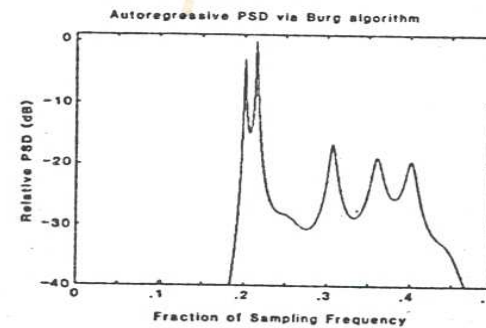
(b)



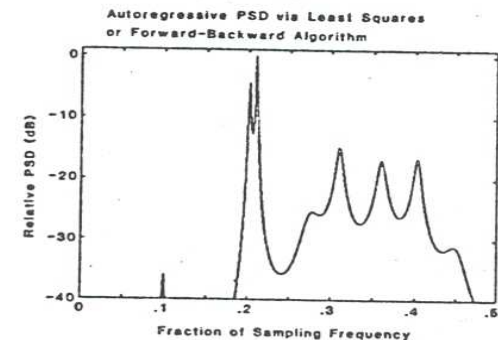
(c)



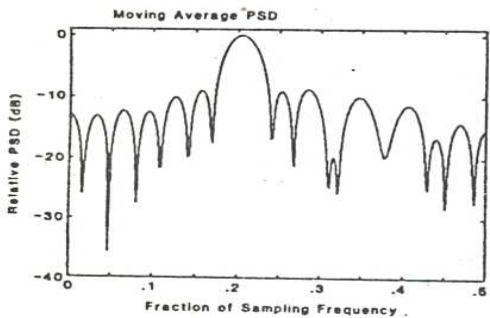
(d)



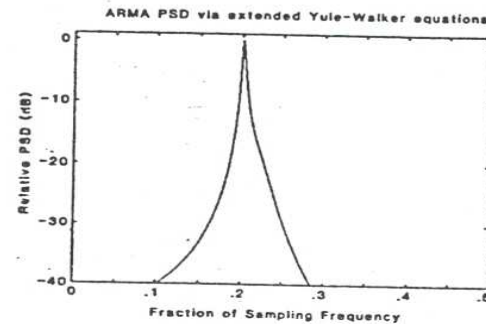
(e)



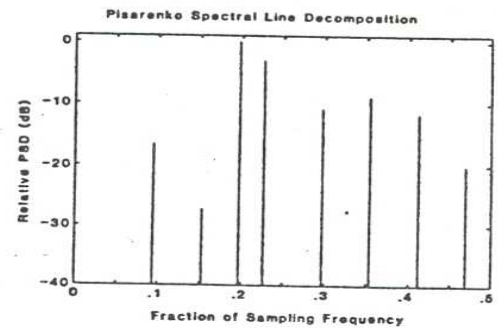
(f)



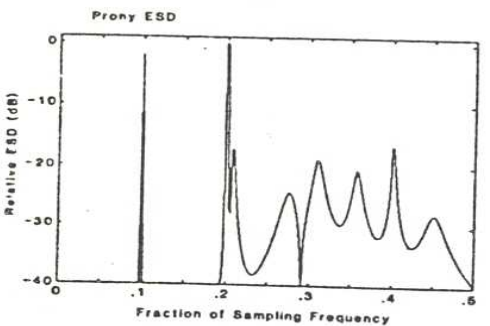
(g)



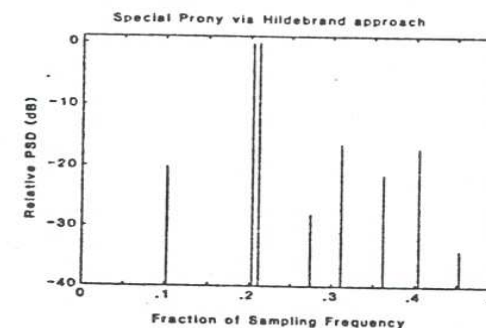
(h)



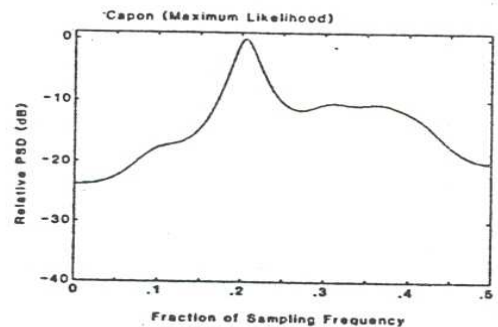
(i)



(j)



(k)



(l)

MA MODELY

ALTERNATIVA:

stanovení $\{b_k\}$ založené na aproximaci MA procesu
AR procesem vysokého řádu,
tj. $p \gg q$

v tom případě platí, že $B(z) = 1/A(z)$, resp.
 $B(z).A(z)=1$ a proto

$$\hat{a}_n + \sum_{k=1}^q b_k \cdot \hat{a}_{n-k} = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

MA MODELY

ALTERNATIVA:

protože $p \gg q$, můžeme odhad $\{b_k\}$ zpřesnit pomocí metody nejmenších čtverců

určíme kvadratickou chybu

$$e = \sum_{n=0}^p \left[\hat{a}_n + \sum_{k=0}^q b_k \cdot \hat{a}_{n-k} \right]^2 - 1, \quad \hat{a}_0 = 1; \hat{a}_k = 0 \text{ pro } k < 0$$

a tu minimalizujeme výběrem parametrů $\{b_k\}$

$$\hat{\mathbf{b}} = -\mathbf{R}_{aa}^{-1} \cdot \mathbf{r}_{aa}$$

kde

$$R_{aa}(|i-j|) = \sum_{n=0}^{p-|i-j|} \hat{a}_n \cdot \hat{a}_{n+|i-j|}, \quad \text{pro } i, j = 1, 2, \dots, q;$$

$$r_{aa}(i) = \sum_{n=0}^{p-i} \hat{a}_n \cdot \hat{a}_{n+i}, \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, q.$$

vymyslel to Durbin a ukázalo se, že je to přibližně odhad s maximální věrohodností, je-li proces normální

URČENÍ ŘÁDU MA MODELU

- ☑ pro vyjádření úzkých pásem je třeba hodně vysoký řád;
- ☑ intuitivně:

hodnoty odhadu autokorelační funkce musí rychle klesat k nule, protože $\gamma_{yy}(mT_{vz})=0$ pro $|m|>q$

test, zda $r_{yy}(mT_{vz})\rightarrow 0$ je založený na srovnávání $r_{yy}(qT_{vz})$ s rozptylem hodnot $r_{yy}(mT_{vz})$ pro $m<q$

URČENÍ ŘÁDU MA MODELU

☑ jinak:

založeno na testu „bělosti“ posloupnosti, která je výsledkem působení soustavy inverzní k odhadnutému MA modelu na analyzovanou posloupnost

☑ Akaiikovo informační kritérium

$$AIC = \ln \sigma_{wq}^2 + \frac{2q}{N}$$

ARMA MODELY

opět si stručně zopakujeme:

$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_k y((n-k)T_{vz}) + \sum_{k=0}^q b_k x((n-k)T_{vz})$$

$$\gamma_{xx}(kT_{vz}) = \begin{cases} \sigma_x^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = \begin{cases} -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) & m > q \\ -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sigma_x^2 \sum_{k=m}^q b_k h(kT_{vz} - mT_{vz}) & 0 \leq m \leq q \end{cases}$$

odhad
výkonového
spektra

$$\hat{P}_{yy}^{\text{ARMA}}(f) = \frac{\sigma_x^2 T_{vz} \left| 1 + \sum_{k=1}^q b_k \exp(-j2\pi f k T_{vz}) \right|^2}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k \exp(-j2\pi f k T_{vz}) \right|^2}$$

ARMA MODELY

ARMA(1,1):

$$h(kT_{vz}) = (-a_1)^k \cdot u(kT_{vz}) + b_1(-a_1)^{k-1} u((k-1)T_{vz})$$

$u(kT_{vz})$ je jednotkový impulz

$$\gamma_{yy}(0) = -a_1 \gamma_{yy}(-T_{vz}) + \sigma_x^2(1 + b_1^2 - a_1 b_1)$$

$$\gamma_{yy}(T_{vz}) = -a_1 \gamma_{yy}(0) + \sigma_x^2 b_1$$

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = -a_1 \gamma_{yy}(mT_{vz} - T_{vz}), \quad m \geq 2$$

mnoho teoretických postupů bez praktického významu, protože:

- jsou výpočetně příliš náročné (maticové operace, iterační optimalizační postupy);
- iterační optimalizace nezaručuje konvergenci řešení nebo konvergenci ke skutečně optimálnímu řešení;

proto **suboptimální postupy** :

- používají metody nejmenších čtverců \Rightarrow řešení soustavy lineárních rovnic;
- oddělený výpočet AR a MA parametrů

ARMA MODELY

METODA PRVNÍ

pro $m > q$ je $\gamma_{yy}(mT_{vz}) = f(a_k)$, resp. $f(\hat{a}_k)$

dosadíme γ_{yy} a řešíme p lineárních rovnic (pro modely vyšších řádů horší výsledky díky slabším odhadům $\gamma_{yy}(mT_{vz})$ pro větší m);

přeurčená soustava lineárních rovnic (pro $m > q$)

její řešení opět optimalizací metodou nejmenších čtverců

ARMA MODELY

METODA PRVNÍ

předpokládejme, že známe odhady autokorelační funkce až do zpoždění $M > p+q$

$$\begin{bmatrix} r_{yy}(q) & r_{yy}(q) & \cdots & r_{yy}(q-p+1) \\ r_{yy}(q+1) & r_{yy}(q) & \cdots & r_{yy}(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{yy}(M-1) & r_{yy}(M-2) & \cdots & r_{yy}(M-p) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_p \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} r_{yy}(q+1) \\ r_{yy}(q+2) \\ \vdots \\ r_{yy}(M) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{R}_{yy} \mathbf{a} = -\mathbf{r}_{yy}$$

protože \mathbf{R}_{yy} je rozměru $(M-q) \times p$ a $M-q > p$, lze použít metodu nejmenších $\square \square$;

výsledkem minimalizace je $\hat{\mathbf{a}} = -(\mathbf{R}_{yy}^T \mathbf{R}_{yy})^{-1} \mathbf{R}_{yy}^T \mathbf{r}_{yy}$

(může být použito i váhování k potlačení méně spolehlivých odhadů AK funkcí)

ARMA MODELY

METODA PRVNÍ

$$\hat{A}(z) = 1 + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k \cdot z^{-k}$$

analyzovanou sekvenci vyfiltrujeme FIR filtrem $\hat{A}(z)$ a dostaneme

$$v(nT_{vz}) = y(nT_{vz}) + \sum_{k=1}^p \hat{a}_k \cdot y(nT_{vz} - kT_{vz}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1;$$

kaskádní zapojení ARMA(p,q) [$H_{ARMA}(z) = B(z)/A(z)$] s AR(p) $H_{AR}(z) = \hat{A}(z)$ reprezentuje přibližně MA(q) proces s $H_{MA}(z) = B(z)$

ARMA MODELY

METODA PRVNÍ

z filtrované sekvence $v(nT_{vz})$ pro $p \leq n \leq N-1$ je $r_{vv}(mT_{vz})$, odhad výkonového spektra potom je

$$\hat{P}_{yy}^{MA}(f) = \sum_{m=-q}^q r_{vv}(mT_{vz}) \exp(-j2\pi f m T_{vz})$$

(opět můžeme „woknovat“ k potlačení méně spolehlivých odhadů autokorelačních funkcí nebo filtrace AR(q) oběma směry \Rightarrow dvě různé posloupnosti autokorelační funkce)

$$\hat{P}_{yy}^{ARMA}(f) = \frac{P_{vv}^{MA}(f)}{\left| 1 + \sum_{k=1}^p a_k \exp(-j2\pi f k T_{vz}) \right|^2}$$

ARMA MODELY

METODA DRUHÁ

vstupní/výstupní identifikace metodou nejmenších □ □

opakování:

$$\gamma_{yy}(mT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_k \gamma_{yy}(mT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=m}^q b_k \gamma_{xy}(mT_{vz} - kT_{vz})$$

nelinearita vztahu pro výpočet $\gamma_{yy}(mT_{vz})$ plyne z toho, že neznáme $\gamma_{xy}(mT_{vz} - kT_{vz})$, protože neznáme $x(nT_{vz})$

$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_k y(nT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=0}^q b_k x(nT_{vz} - kT_{vz})$$

ARMA MODELY

METODA DRUHÁ

$$y(nT_{vz}) = -\sum_{k=1}^p a_k y(nT_{vz} - kT_{vz}) + \sum_{k=1}^q b_k x(nT_{vz} - kT_{vz}) + x(nT_{vz}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\theta} + \mathbf{v}$$

$$\mathbf{y} = [y(0) \ y(T_{vz}) \ \dots \ y(NT_{vz} - T_{vz})]^T$$

$$\mathbf{v} = [x(0) \ x(T_{vz}) \ \dots \ x(NT_{vz} - T_{vz})]^T$$

$$\boldsymbol{\theta} = [-a_1 \ -a_2 \ \dots \ -a_p \ b_1 \ b_2 \ \dots \ b_q]^T$$

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} y_{-1} & y_{-2} & \dots & y_{-p} & x_{-1} & x_{-2} & \dots & x_{-q} \\ y_0 & y_{-1} & \dots & y_{-p+1} & x_0 & x_{-1} & \dots & x_{-q+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{N-2} & y_{N-3} & \dots & y_{N-p-1} & x_{N-2} & x_{N-3} & \dots & x_{N-q-1} \end{bmatrix}$$

matice vstupních/výstupních dat o rozměru $N \times (p+q)$



ARMA MODELY

METODA DRUHÁ



minimalizace nejmenšími $\square \square$



$$\hat{\Theta} = (\mathbf{H}^T \cdot \mathbf{H})^{-1} \cdot \mathbf{H}^T \cdot \mathbf{y}$$

počáteční podmínky $y_{-p}, \dots, y_{-1}, x_{-q}, \dots, x_{-1}$ buď specifikovat nebo nulové

odhad hodnot vstupního šumového signálu z analyzované posloupnosti AR modelem vysokého řádu

ARMA MODELY

METODA TŘETÍ

(už tu částečně byla)

$$\frac{B(z)}{A(z)} = \frac{1}{C(z)}, \quad \text{kde } C(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k z^{-k}$$

koeficienty $\{c_k\}$ se určí nějakým AR algoritmem a z nich $\{a_k\}$ a $\{b_k\}$

$$\hat{C}(z) = 1 + \sum_{k=1}^M \hat{c}_k z^{-k}, \quad M \geq p + q$$

je-li $p > q$, pak $\frac{\hat{B}(z)}{\hat{A}(z)} = \frac{1}{\hat{C}(z)}$,

nebo v časové oblasti $\sum_{k=0}^q \hat{b}_k \cdot \hat{c}_{n-k} = \hat{a}_n, \quad n = 1, 2, \dots; \hat{b}_0 = 1$

ARMA MODELY

METODA TŘETÍ

protože by mělo platit $a_n = 0$ pro $n > p$, je

$$\sum_{k=0}^q \widehat{b}_k \cdot \widehat{c}_{n-k} = 0, \quad \text{pro } n = p+1, p+2, \dots, p+q$$

$$\begin{bmatrix} \widehat{c}_p & \widehat{c}_{p-1} & \cdots & \widehat{c}_{p+1-q} \\ \widehat{c}_{p+1} & \widehat{c}_p & \cdots & \widehat{c}_{p+2-q} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \widehat{c}_{p+q-1} & \widehat{c}_{p+q-2} & \cdots & \widehat{c}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \widehat{b}_1 \\ \widehat{b}_2 \\ \vdots \\ \widehat{b}_q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \widehat{c}_{p+1} \\ \widehat{c}_{p+2} \\ \vdots \\ \widehat{c}_{p+q} \end{bmatrix}$$

po určení $\{\widehat{b}_1, \widehat{b}_2, \dots, \widehat{b}_q\}$ se spočítají $\{\widehat{a}_1, \widehat{a}_2, \dots, \widehat{a}_p\}$ z

$$\sum_{k=0}^q \widehat{b}_k \cdot \widehat{c}_{n-k} = \widehat{a}_n, \quad \text{pro } n = 1, 2, \dots, p; \widehat{c}_0 = 1$$

ARMA MODELY

METODA TŘETÍ

což je maticově

$$\begin{bmatrix} \hat{a}_1 \\ \hat{a}_2 \\ \vdots \\ \hat{a}_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{c}_1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \hat{c}_2 & \hat{c}_1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{c}_p & \hat{c}_{p-1} & \hat{c}_{p-2} & \cdots & \hat{c}_{p-q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ \hat{b}_1 \\ \vdots \\ \hat{b}_q \end{bmatrix}$$

URČENÍ ŘÁDŮ ARMA MODELU

$$AIC(p, q) = \ln \hat{\sigma}_{wpq}^2 + \frac{2(p + q)}{N}, \quad \hat{\sigma}_{wpq} \text{ je odhad rozptylu vstupní chybové posloupnosti}$$

dodatečné kritérium:

posouzení bělosti posloupnosti po inverzní filtraci analyzované posloupnosti navrženou ARMA soustavou

odhad p

$$R'_{yy} = \begin{bmatrix} r_{yy}(q) & r_{yy}(q-1) & \cdots & r_{yy}(q-p+1) \\ r_{yy}(q+1) & r_{yy}(q) & \cdots & r_{yy}(q-p+2) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ r_{yy}(q+p-1) & r_{yy}(q+p-2) & \cdots & r_{yy}(q) \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} \text{rozšířené} \\ \text{modifikované} \\ \text{Y.-W. rovnice} \end{array}$$

$\det(R'_{yy})=0$, pokud je rozměr modelu větší než řád analyzovaného procesu