



# SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA ČASOVÝCH ŘAD



**prof. Ing. Jiří Holčík, CSc.**

**[holcik@iba.muni.cz](mailto:holcik@iba.muni.cz)**

© Institut biostatistiky a analýz

# VI. SPEKTRÁLNÍ ANALÝZA POMOCÍ METODY VLASTNÍCH ČÍSEL

# ZAČÍNÁME

AR(p) proces znehodnocený aditivním bílým šumem  $\equiv$  ARMA(p,p) proces;

**ted' bude ... periodický signál + bílý šum**

$$x(nT_{vz}) = 2 \cdot \cos(2\pi f_k T_{vz}) \cdot x(nT_{vz} - T_{vz}) - x(nT_{vz} - 2T_{vz})$$

tento systém generuje signál

$$x(nT_{vz}) = 2 \cdot \cos(2\pi f_k nT_{vz}) \text{ pro } n \geq 0$$

pokud jsou počáteční podmínky  $x(-1) = -1$  a  $x(-2) = 0$

# ZAČÍNÁME

obecně, signál skládající se z  $p$  harmonických složek splňuje diferenční rovnici

$$x(nT_{vz}) = -\sum_{m=1}^{2p} a_m x(nT_{vz} - mT_{vz}), \quad (\odot)$$

což odpovídá systému s přenosovou funkcí

$$H(z) = \frac{1}{1 + \sum_{m=1}^{2p} a_m z^{-m}} \quad (\otimes)$$

(Polynom  $A(z) = 1 + \sum a_m z^{-m}$  má  $2p$  kořenů na jednotkovém kruhu v místech, která odpovídají frekvencím harmonického signálu.)

# PRINCIP

- ☑ přepokládejme periodický signál + bílý šum  $w(nT)$   
 $\{E(|w(nT_{vz})|^2) = \sigma_w^2\}$

$$y(nT_{vz}) = x(nT_{vz}) + w(nT_{vz})$$

po dosazení za  $x(nT)$  z tohoto vztahu do (☯) máme

$$y(nT_{vz}) - w(nT_{vz}) = -\sum_{m=1}^{2p} a_m [y(nT_{vz} - mT_{vz}) - w(nT_{vz} - mT_{vz})]$$

$$\sum_{m=0}^{2p} a_m y(nT_{vz} - mT_{vz}) = \sum_{m=0}^{2p} a_m w(nT_{vz} - mT_{vz}), \quad a_0 \equiv 1$$

což představuje ARMA proces s identickými AR i MA parametry

$$\mathbf{y}^T \cdot \mathbf{a} = \mathbf{w}^T \cdot \mathbf{a} \quad (\text{🐶})$$

$$\mathbf{y}^T = [y(nT_{vz}), y(nT_{vz} - T_{vz}), \dots, y(nT_{vz} - 2pT_{vz})],$$

$$\mathbf{w}^T = [w(nT_{vz}), w(nT_{vz} - T_{vz}), \dots, w(nT_{vz} - 2pT_{vz})],$$

$$\mathbf{a}^T = [1, a_1, \dots, a_{2p-1}, a_{2p}],$$

# PRINCIP

- ☑ vynásobením obou stran (  ) vektorem  $\mathbf{y}$  a určením střední hodnoty

$$E(\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}^T) \cdot \mathbf{a} = E(\mathbf{y} \cdot \mathbf{w}^T) \cdot \mathbf{a} = E((\mathbf{x} + \mathbf{w}) \cdot \mathbf{w}^T) \cdot \mathbf{a}$$

$$\Gamma_{yy} \cdot \mathbf{a} = 0 + \sigma_w^2 \cdot \mathbf{a}$$

$(\Gamma_{yy} - \sigma_w^2 \cdot \mathbf{I}) \cdot \mathbf{a} = 0$  ... vlastní (charakteristická) rovnice

$\sigma_w^2$  je vlastní číslo autokorelační matice  $\Gamma_{yy}$ ;

$\mathbf{a}$  je vlastní vektor  $\Gamma_{yy}$  spojený s vlastním číslem  $\sigma_w^2$ ;

# PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

Mějme  $p$  náhodně fázově posunutých harmonických signálů s aditivním bílým šumem.

Hodnoty autokorelační funkce jsou

$$\gamma_{yy}(0) = \sigma_w^2 + \sum_{i=1}^p P_i$$

$$\gamma_{yy}(k) = \sum_{i=1}^p P_i \cdot \cos 2\pi f_i k T_{vz}, \quad k \neq 0; \quad P_i = A_i^2 / 2 \text{ je}$$

průměrný výkon  $i$ -té sinusovky,  $A_i$  je její amplituda

# PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

☑ maticově

$$\begin{bmatrix} \cos 2\pi f_1 T_{vz} & \cos 2\pi f_2 T_{vz} & \dots & \cos 2\pi f_p T_{vz} \\ \cos 2\pi f_1 2T_{vz} & \cos 2\pi f_2 2T_{vz} & \dots & \cos 2\pi f_p 2T_{vz} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos 2\pi f_1 p T_{vz} & \cos 2\pi f_2 p T_{vz} & \dots & \cos 2\pi f_p p T_{vz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{yy}(1) \\ \gamma_{yy}(2) \\ \vdots \\ \gamma_{yy}(p) \end{bmatrix}$$

☑ známe-li frekvence  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , můžeme spočítat výkon jednotlivých harmonických složek, místo hodnot  $\gamma_{yy}(mT_{vz})$  použijeme odhady  $r_{yy}(mT_{vz})$ , známe-li výkony, určíme rozptyl šumu

$$\sigma_w^2 = r_{yy}(0) - \sum_{i=1}^p P_i$$



# PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

podle Pisarenka platí pro ARMA proces obsahující  $p$  harmonických složek v aditivním bílém šumu, že rozptyl  $\sigma_w^2$  odpovídá minimálnímu vlastnímu číslu autokorelační matice, pokud je rozměr autokorelační matice větší nebo roven  $(2p+1) \times (2p+1)$ .

Potom požadovaný vektor koeficientů ARMA modelu je dán vlastním vektorem náležejícím minimálnímu vlastnímu číslu.

Frekvence  $f_i$ ,  $i=1, \dots, p$  se určí řešením rovnice, dané položením jmenovatele ve vztahu (☠) rovno nule, kde koeficienty  $a_m$  jsou určeny vlastním vektorem spojeným s minimálním vlastním číslem.

# VLADIMIR FEDOROVICH PISARENKO

?

Ph.D.

Moskevská státní univerzita 1963

disertační práce:

Matematická klasifikace objektů

obor: Teorie pravděpodobnosti a  
stochastické procesy

školitel: Roland Lvovich Dobrushin

Pisarenko, V. F. *The retrieval of harmonics from a covariance function* Geophysics, J. Roy. Astron. Soc., vol. 33, pp. 347-366, 1973.



# PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

## PŘÍKLAD

Předpokládejme hodnoty AKF  $\gamma_{yy}(0)=3$ ,  $\gamma_{yy}(1)=1$  a  $\gamma_{yy}(2)=0$ . Proces obsahuje jeden harmonický signál v bílém šumu. Určete jeho frekvenci, výkon a rozptyl, tj. výkon šumu.

Řešení:

autokorelační matice je

$$\mathbf{R}_{yy} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

# PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

## PŘÍKLAD

její minimální vlastní číslo je rovno nejmenšímu kořenu charakteristického polynomu

$$g(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 3-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 7) = 0$$

$$\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 3 + \sqrt{2}, \lambda_3 = 3 - \sqrt{2} \Rightarrow \sigma_w^2 = \lambda_{\min} = 3 - \sqrt{2}$$

odpovídající charakteristický vektor má složky  $a_0=1$ ,  $a_1$ ,  $a_2$ , pro které platí

$$\begin{bmatrix} \sqrt{2} & 1 & 0 \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

# PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

## PŘÍKLAD

řešením získáme  $a_1 = -\sqrt{2}$  a  $a_2 = 1$

$$z^2 - \sqrt{2} + 1 = 0$$

$$z_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}} \pm j \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad |z_1| = |z_2| = 1, \quad \text{tj. leží na jednotkové kružnici}$$

$$z_1 = e^{j2\pi f_1 T_{vz}} = \frac{1}{\sqrt{2}} + j \frac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow f_1 \cdot T_{vz} = 1/8$$

výkon  $P_1 \cdot \cos(2\pi f_1 T_{vz}) = \gamma_{yy}(1) = 1 \Rightarrow P_1 = \sqrt{2}$ ,

proto

$$A = \sqrt{2P_1} = \sqrt{2 \cdot \sqrt{2}}$$

kontrola:  $\sigma_w^2 = \gamma_{yy}(0) - P_1 = 3 - \sqrt{2}$ , což souhlasí s  $\lambda_{\min}$ .

# PISARENKOVA HARMONICKÁ DEKOMPOZICE

## PŘÍKLAD

- ☑ zbývá určit frekvence  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , - to vyžaduje znalost vlastního vektoru  $\mathbf{a}$  pro vlastní číslo  $\sigma_w^2$ ;
- ☑ protože jsme si již uvedli, že:  
pro ARMA proces skládající se z  $p$  sinusovek v aditivním bílém šumu je rozptyl  $\sigma_w^2$  roven nejmenšímu vlastnímu číslu matice  $\Gamma_{yy}$  za předpokladu, že rozměr  $\Gamma_{yy} \geq (2p+1) \times (2p+1)$  požadovaný vektor koeficientů ARMA systému je dán hodnotami vlastního vektoru odpovídajícímu nejmenšímu vlastnímu číslu - frekvence  $f_i$ ,  $1 \leq i \leq p$ , pak odpovídají kořenům polynomu, jehož koeficienty

# PRONYHO METODY

## **Gaspard Clair François Marie Riche, Baron de Prony**

(22.7.1755 – 29.7.1839)

zákony (rozumějme funkce)  
popisující expanzi plynů lze  
vyjádřit součtem exponenciál



navrhnul metodu na  
interpolaci naměřených  
hodnot na základě  
exponenciálního modelu  
interpolační funkce



Essai expérimental et analytique: sur les lois dilatabilité de fludes élastique et sur celles de la force expansive de la vapuer de l'alkool, à différentes températures. Journal de l'École Polytechnique, Floréal et Plairial, an III (1795), vol 1, cahier 22, 24-76

# PRONYHO METODY

předpokládejme, že vzorky signálu neobsahují šum a skládají se z  $p$  exponenciálních signálů

$$x(nT_{vz}) = \sum_{k=1}^p A_k \cdot e^{s_k n T_{vz}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

problém je určit  $A_k$  a  $s_k$  z daných  $N$  vzorků.

Potřebujeme nejméně  $2p$  hodnot  $x(nT_{vz})$  – problém je bohužel nelineární.

To co Prony vymyslel je, že výpočet  $A_k$  a  $s_k$  může být vzájemně oddělen a realizován řešením dvou soustav lineárních rovnic + řešení polynomiální rovnice.



# PRONYHO METODY

$$x(nT_{vz}) = \sum_{k=1}^p A_k \cdot e^{s_k n T_{vz}}, \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

$A_k$  i  $s_k$  jsou obecně komplexní a je-li  $x(nT_{vz})$  reálné,  
pak

$$\begin{aligned} A_k \cdot e^{s_k n T_{vz}} &= \frac{1}{2} |A_k| e^{j\Phi_k} \cdot e^{(\sigma_k + j\omega_k) n T_{vz}} + \frac{1}{2} |A_k| e^{-j\Phi_k} \cdot e^{-(\sigma_k + j\omega_k) n T_{vz}} = \\ &= A_k \cdot e^{\sigma_k n T_{vz}} \cdot \cos(\omega_k n T_{vz} + \Phi_k), \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \end{aligned}$$

protože součet komplexních exponenciál je homogenním řešením lineární diferenční rovnice, tak musí taková diferenční rovnice existovat

$$x(nT_{vz}) = \sum_{k=1}^p b_k x(nT_{vz} - mT_{vz}), \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

# PRONYHO METODY

pro koeficienty diferenční rovnice je

$$\sum_{k=1}^{p+1} b_k \cdot z^{k-1} = \prod_{k=1}^p (z - e^{s_k})$$

a to všechno vede k definici tří kroků Pronyho metody:

1. konstrukce a řešení lineární soustavy rovnic pro koeficienty  $b_k$ ;

$$\begin{bmatrix} x_N \\ \vdots \\ x_{2N-1} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} x_{N-1} & \cdots & x_0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{2N-2} & \cdots & x_{N-1} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}$$

# PRONYHO METODY

2. po určení koeficientů  $b_k$  stanovení kořenů rovnice

$$z^p + \sum_{k=1}^p b_k z^{k-1} = 0$$

$k$ -tý kořen je roven  $e^{s_k}$

3. z definiční rovnice  $x(nT_{vz}) = \sum_{k=1}^p A_k \cdot e^{s_k n T_{vz}}$ ,  $n = 0, 1, \dots, N-1$

pak můžeme definovat lineární soustavu  $p$  rovnic, ze které vypočítáme amplitudy  $A_k$ ;

**A TO JE ZÁKLADNÍ MYŠLÉNKA BARONA PRONYHO**

# PRONYHO METODY

z-transformace dané posloupnosti  $x(nT_{vz})$  je

$$X(z) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{k=1}^p A_k \cdot e^{s_k n T_{vz}} \cdot z^{-n}$$

výměnou součtů a sečtením geometrické řady je

$$\begin{aligned} X(z) &= \sum_{k=1}^p A_k \cdot \frac{1 - e^{s_k N T_{vz}} \cdot z^{-N}}{1 - e^{s_k T_{vz}} \cdot z^{-1}} = \dots \\ \dots &= \frac{\sum_{k=1}^p \left[ A_k (1 - e^{s_k N T_{vz}} \cdot z^{-N}) \prod_{j=1, j \neq k}^p (1 - e^{s_j T_{vz}} \cdot z^{-1}) \right]}{\prod_{k=1}^p (1 - e^{s_k T_{vz}} \cdot z^{-1})} \quad (:\cdot 1) \end{aligned}$$

# PRONYHO METODY

$X(z)$  lze tedy vyjádřit pomocí poměru dvou polynomů

$$X(z) = \frac{C(z)}{B(z)} \quad (.:2)$$

srovnáním obou (.:) vztahů lze říci, že  $B(z)$  je polynom  $p$ -tého řádu s kořeny  $\exp(s_1 T_{vz})$ ,  $\exp(s_2 T_{vz})$ , ...,  $\exp(s_p T_{vz})$ ;

$$B(z) = 1 + \sum_{k=1}^p b_k \cdot z^{-k} = \prod_{k=1}^p (1 - e^{s_k T_{vz}} \cdot z^{-1})$$

po zjednodušení čitatele  $C(z)$  je polynom  $(N+p-1)$ -ho řádu definovaného

$$C(z) = \sum_{k=0}^{p-1} c_k \cdot z^{-k} + \sum_{k=0}^{p-1} c_{N+k} \cdot z^{-(N+k)}$$

# PRONYHO METODY

zatímco některé koeficienty polynomu  $C(z)$  ( $c_0, \dots, c_{p-1}$  a  $c_N, \dots, c_{N+p-1}$ ) závisí na neznámých amplitudách a pólech (nebo frekvencích), jiné koeficienty  $c_p, \dots, c_{N-1} \equiv 0$ ; protože  $X(z) \cdot B(z) = C(z)$ , je v časové oblasti

$$x(nT_{vz}) \otimes b_n = c_n,$$

což znamená

$$x(nT_{vz}) + \sum_{k=1}^p x(nT_{vz} - kT_{vz}) \cdot b_k = c_n, \quad n = 0, 1, \dots, N + p - 1$$

# PRONYHO METODY

protože dále jsou  $c_p, \dots, c_{N-1}$  nulové, středních  $N-p$  rovnic pro nulové pravé strany lze vyjádřit

$$\begin{bmatrix} x(pT_{vz}) & x(pT_{vz} - T_{vz}) & \dots & x(0) \\ x(pT_{vz} + T_{vz}) & x(pT_{vz}) & \dots & x(T_{vz}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x(NT_{vz} - T_{vz}) & x(NT_{vz} - 2T_{vz}) & \dots & x(NT_{vz} + pT_{vz} - T_{vz}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{☉})$$

$$\mathbf{X}_f \cdot \mathbf{b} = \mathbf{0}$$

kde  $i, j$ -tý prvek matice  $\mathbf{X}_f$  je  $x_{f i,j} = x(pT_{vz} + iT_{vz} - jT_{vz})$ ,  
 $i = 1, 2, \dots, N-p$ ;  $j = 1, 2, \dots, p+1$  a  $\mathbf{b} = [1, b_1, b_2, \dots, b_p]^T$

Je-li  $N=2p$ , pak máme právě dost rovnic k tomu určit  $b_1, b_2, \dots, b_p$ .

# PRONYHO METODY

Jakmile určíme  $b_k$ , známe polynom

$$B(z) = 1 + b_1 z^{-1} + b_2 z^{-2} + \dots + b_p z^{-p}$$

a řešením rovnice  $B(z) = 0$  dostaneme kořeny  $\exp(s_1 T_{vz})$ ,  $\exp(s_2 T_{vz})$ , ...,  $\exp(s_p T_{vz})$ ;

Koeficienty  $A_k$  jsou pak určeny řešením následujících  $p$  lineárních rovnic

$$\sum_{k=1}^p A_k \cdot e^{s_k n T_{vz}} = x(n T_{vz}), \quad n = 0, 1, \dots, p-1 \quad (\text{†})$$



# PRONYHO METODY

## SUMARIZACE ALGORITMU

1. vypočítat koeficienty  $b_k$  z (☉);
2. spočítat kořeny polynomu  $B(z)$  a tak určit  $e^{s_1 T_{vz}}, e^{s_2 T_{vz}}, \dots, e^{s_p T_{vz}}$ ;
3. určit amplitudy  $A_1, \dots, A_p$  z rovnice (☹);

# PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

## předpokládáme signál + aditivní šum

Nechť diskrétní funkce

$$\hat{x}_n = \sum_{k=1}^p b_k z_k^n, \quad n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (\Upsilon)$$

je modelem signálu, reprezentovaného naměřenými hodnotami  $x_0, \dots, x_{N-1}$ .

Hodnoty  $b_k, z_k$  jsou obecně komplexní

$$b_k = A_k \cdot e^{j\Phi_k}$$

$$z_k = e^{(\sigma_k + j2\pi f_k)T_{vz}}$$

$A_k$  je amplituda,  $\Phi_k$  počáteční fáze,  $\sigma_k$  koeficient tlumení a  $f_k$  frekvence oscilací,  $T_{vz}$  je vzorkovací perioda

# PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

cílem je nalézt  $\{A_k, \Phi_k, \sigma_k, f_k\}$  a  $p$  takové, že je minimalizována chyba

$$e = \sum_{n=0}^{N-1} |x_n - \hat{x}_n|^2$$

je to těžce nelineární problém nejmenších čtverců, který lze řešit iteračně postupným zlepšováním počátečního odhadu.

pokusme se aplikovat Pronyho postup, poskytující suboptimální řešení, které sice nezaručuje nalezení globálního minima, ale poskytuje dostatečně přijatelné řešení

# PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

**tedy ještě jednou a trochu jinak:**

vztah ( 'Y' ) představuje homogenní řešení lineární  
diferenční rovnice s konstantními parametry.  
Jakými? To určíme!

definujme polynom

$$\Psi(z) = \prod_{k=1}^p (z - z_n) = \sum_{i=0}^p a_i \cdot z^{p-i}, \quad a_0 = 1$$

z ( 'Y' ) jeden způsob jak vyjádřit odhad  $\hat{x}_{n-m}$  je

$$\hat{x}_{n-m} = \sum_{s=1}^p b_s \cdot z_s^{n-m}, \quad \text{pro } 0 \leq n - m \leq N - 1$$

# PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

vynásobením  $a_m$  a sečtením přes posledních  $p+1$  součinů

$$\sum_{m=0}^p a_m \hat{x}_{n-m} = \sum_{s=1}^p b_s \cdot \sum_{m=0}^p a_m z_s^{n-m}, \quad p \leq n \leq N-1$$

po substituci  $z_s^{n-m} = z_s^{n-p} \cdot z_s^{p-m}$  je

$$\sum_{m=0}^p a_m \hat{x}_{n-m} = \sum_{s=1}^p b_s z_s^{n-p} \cdot \sum_{m=0}^p a_m z_s^{p-m} = 0$$

Ta nula plyne z toho, že poslední suma je právě hodnota polynomu  $\Psi(z_s)$ , tj. pro jeden jeho kořen.

$$\hat{x}_n = - \sum_{m=1}^p a_m \cdot \hat{x}_{n-m}$$

# PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

$$x_n = \hat{x}_n + e_n \quad n = 0, 1, \dots, N-1$$

po dosazení za  $\hat{x}_n$  je

$$\begin{aligned} x_n &= -\sum_{m=1}^p a_m \cdot \hat{x}_{n-m} + e_n = \\ &= -\sum_{m=1}^p a_m \cdot x_{n-m} + \sum_{m=0}^p a_m \cdot e_{n-m}, \quad p \leq n \leq N-1 \end{aligned}$$

když  $\hat{x}_{n-m} = x_{n-m} - e_{n-m}$

**a co takhle Pisarenko?!**

to nám poskytuje alternativní model (součet exponenciál + aditivní šum) pomocí ARMA systému AR a MA parametry na rozdíl od Pisarenka nejsou koeficienty  $a_i$  omezeny tak, aby kořeny měly jen jednotkový modul (automaticky jen harmonické složky)

# PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

minimalizace  $\sum_{n=p}^{N-1} |e_n|^2$  vede k soustavě nelineárních

rovníc, proto alternativa (rozšířená Pronyho metoda):

když

$$\varepsilon_n = \sum_{m=0}^p a_m e_{n-m}, \quad p \leq n \leq N-1$$

pak

$$x_n = - \sum_{m=0}^p a_m x_{n-m} + \varepsilon_n$$

to pak vede k minimalizaci  $\varepsilon_n \Rightarrow$  pouze AR model  $\Rightarrow$  linearita ( $\varepsilon_n$  je určena MA procesem řízeným chybou aproximace  $e_n$ )

# PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

$\varepsilon_n$  je rozdíl mezi  $x_n$  a jeho lineární predikcí  $p$ -tého řádu, zatímco

$e_n$  je rozdíl mezi  $x_n$  a jeho exponenciální aproximací

řád  $p$  je určen nějakým způsobem pro určení řádu AR procesu (modelu)



# PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

určíme koeficienty  $a_m$  AR procesu  $\Rightarrow$  najdeme kořeny AR polynomu a problém se redukuje na řešení soustavy lineárních rovnic s neznámými koeficienty

$b_m$

$$\mathbf{b} = \hat{\mathbf{x}}$$

kde

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ z_1 & z_2 & \dots & z_p \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ z_1^{N-1} & z_2^{N-1} & \dots & z_p^{N-1} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_p \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} \hat{x}_0 \\ \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_{N-1} \end{bmatrix}$$

minimalizace nejmenšími  $\square\square$  vede na řešení

$$\mathbf{b} = \left( \mathbf{H}^T \mathbf{H} \right)^{-1} \mathbf{H}^T \hat{\mathbf{x}} \quad (\ast)$$

# PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

při řešení pomůže, když víme, že

$$\Theta_H^{-1} \cdot \Theta^{-1} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \cdots & \gamma_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ \gamma_{p1} & \cdots & \gamma_{pp} \end{bmatrix}, \quad \text{kde } \gamma_{ij} = \frac{(z_i^* \cdot z_j)^N - 1}{z_i^* \cdot z_j - 1}$$

parametry  $A_i$ ,  $\Phi_i$ ,  $a_i$  a  $f_i$  pak určíme

$$A_i = |b_i|$$

$$\Phi_i = \text{arctg}(\text{Im}b_i/\text{Re}b_i)$$

$$a_i = \ln|z_i|/T_{vz}$$

$$f_i = \text{arctg}(\text{Im}z_i/\text{Re}z_i)/2\pi T_{vz}$$

# PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

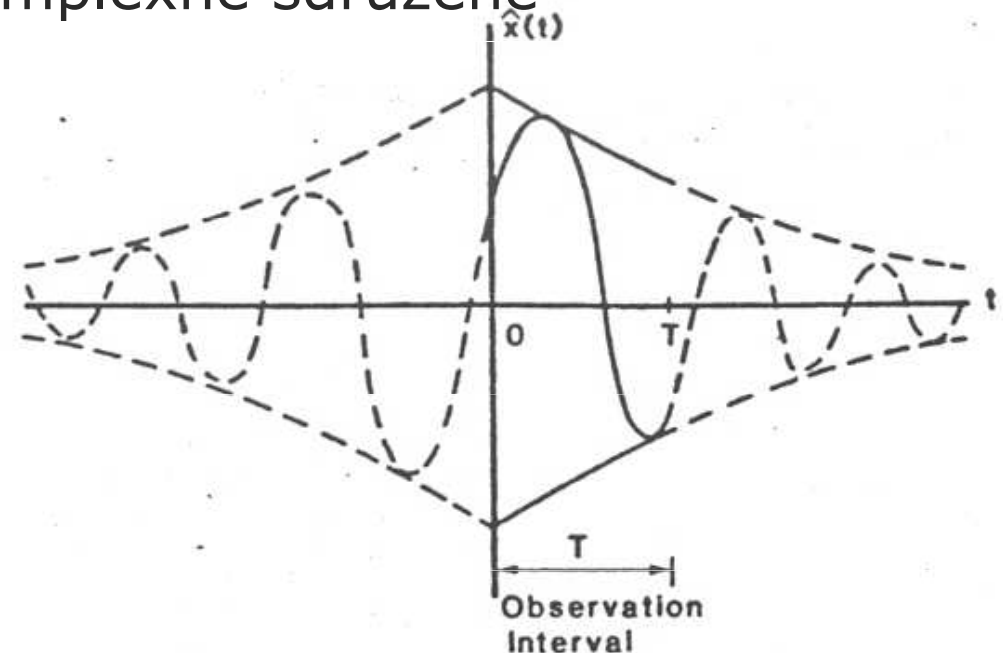
## Pronyho metoda užitečná při analýze přechodných dějů

omezíme-li se na tlumené reálné sinusovky, pak

$$\hat{x}(t) = \sum_{k=1}^p A_k e^{\alpha_k |t|} \cdot e^{j(2\pi f_k t + \Phi_k)} \quad (\text{☎})$$

pro reálné  $x(t)$  požadujeme komplexně sdružené  
 $e^{j(2\pi f_k t + \Phi_k)}$  a  $e^{-j(2\pi f_k t + \Phi_k)}$  ;

dále předpokládáme, že  
koeficienty tlumení jsou  
záporné, tj. exponenciály  
jsou tlumené (je-li  $\alpha=0$ ,  
jsou sinusovky tak jak mají  
být)



# PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

protože vztah (☎) má v tom případě konečnou energii, jeho spektrální hustota je rovna FT tohoto vztahu

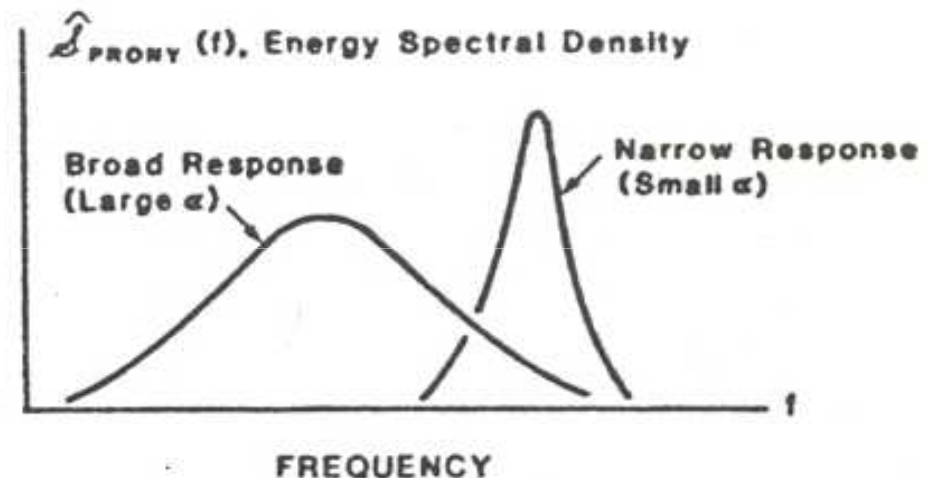
$$\hat{S}_{\text{prony}}(f) = |\hat{X}(f)|^2$$

kde

$$X(f) = \sum_{k=1}^p A_k \exp(j\Theta_k) \frac{2\alpha_k}{\alpha_k^2 + [2\pi(f - f_k)]^2}$$

spektrum je lineárně úměrné energii, nikoliv jako u AR modelů, kde je úměrné (nelineárně) výkonu

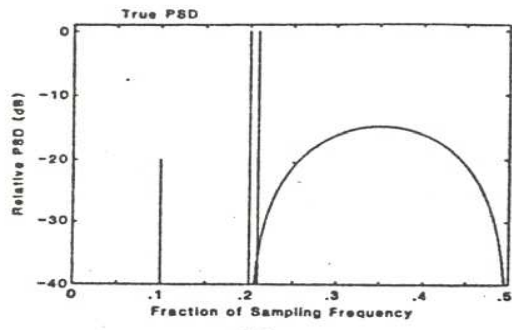
Ize produkovat spektra s úzkými či širokými laloky – závisí na koeficientech tlumení (šířka pásma pro -3dB je  $\alpha/\pi$  [Hz])



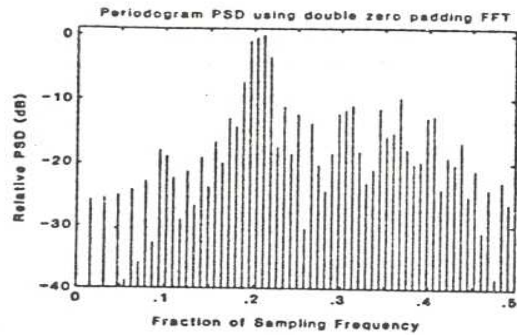
# PRONYHO METODA NEJMENŠÍCH ČTVERCŮ

## PROBLÉMY

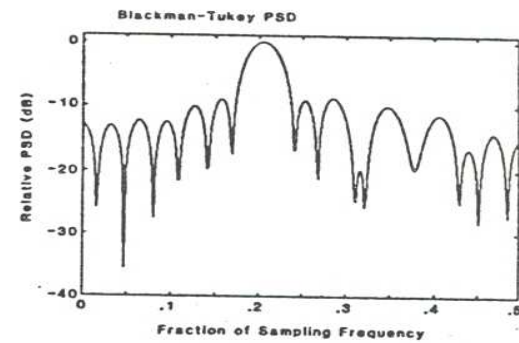
- ☑ počet exponenciál  $\sim$  řád AR systému – protože je třeba určit  $2p$  parametrů, max. řád by měl být  $p_{\max} \leq N/2$ , zatímco u AR modelů je možné  $p > N/2$ ;
- ☑ přítomnost šumu ovlivňuje přesnost Pronyho odhadů;
- ☑ šum může způsobit, že koeficienty tlumení jsou moc velké;



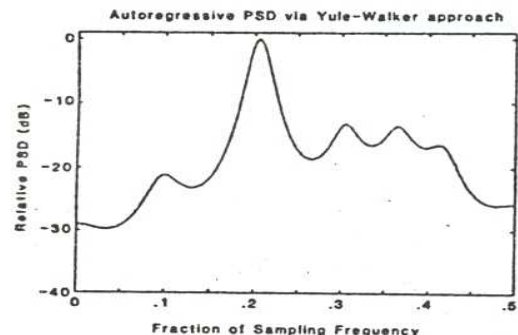
(a)



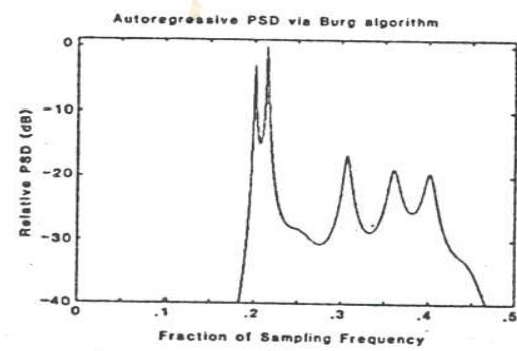
(b)



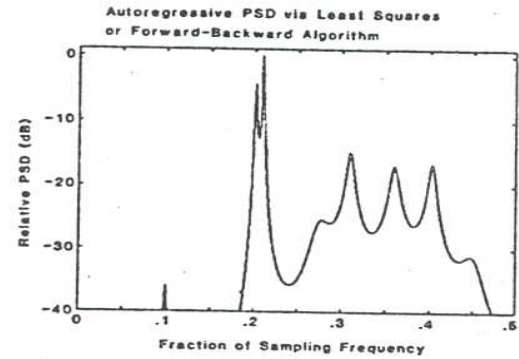
(c)



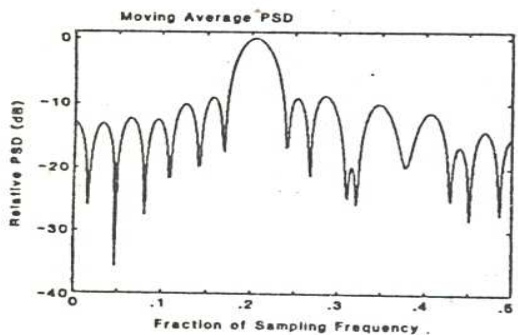
(d)



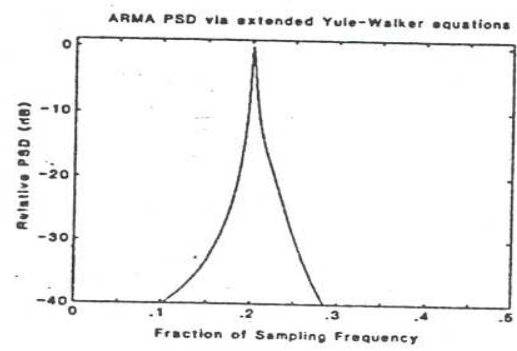
(e)



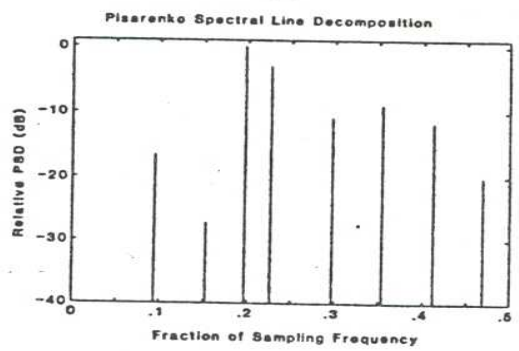
(f)



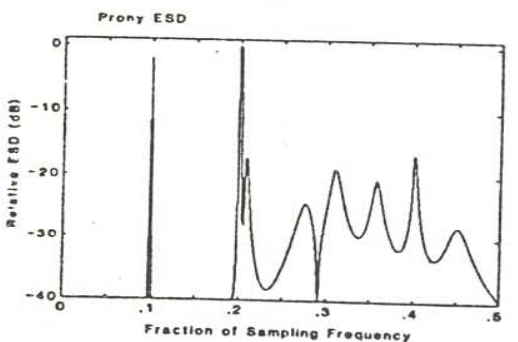
(g)



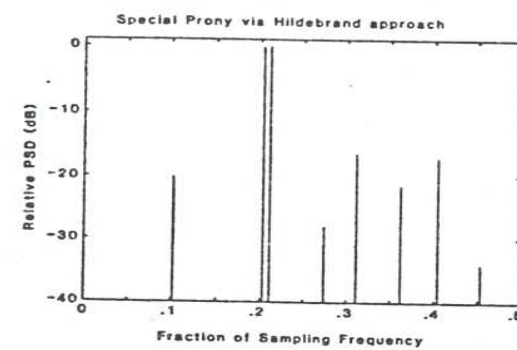
(h)



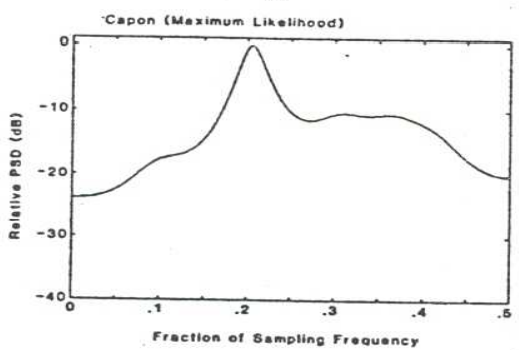
(i)



(j)



(k)



(l)

# PRONYHO METODA PRO VÝPOČET SPEKTRÁLNÍCH ČAR

## VÝHODY OPROTI PISARENKOVI

- ☑ nejsou třeba odhady autokorelačních funkcí;
- ☑ vyskytuje se méně falešných spektrálních čar díky možnému lepšímu odhadu řádu (?);
- ☑ odhady frekvencí a výkonů mají menší chyby;
- ☑ jednodušší výpočet (dvě lineární soustavy + nalezení kořenů polynomu  $x$  výpočet komplexních vlastních čísel)

**A JE TO!**

