INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

Analytická geometrie

Mgr. Veronika Švandová a Mgr. Zdeněk Kříž, Ph. D.

Obsah

1 Vektory - opakování

1.1 Teorie

V Úvodu do matematiky jste se seznámili s pojmem vektor a jeho základními vlastnostmi. Stručně si tuto oblast matematiky zopakujeme.

1.1.1 Pojem vektor a jeho souřadnice, umístění vektoru

Jistě si pamatujete, že vektory můžeme vnímat dvěma způsoby:

1) jako *uspořádané n-tice reálných čísel*, tj. prvky množiny $\mathbb{R}^n$,

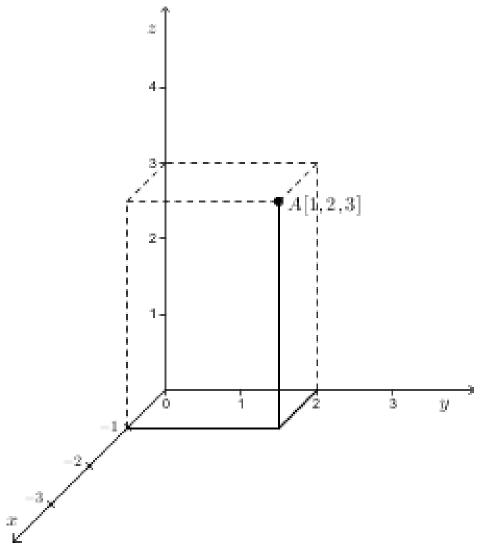
2) jako *orientované úsečky.*

Množinu $\mathbb{R}^n$ všech uspořádaných n-tic reálných čísel můžeme zapsat jako:

$$\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n); x_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, n\}. \tag{1}$$

Geometricky si prvky množiny $\mathbb{R}^n$ můžeme představovat dvojím způsobem. Buď jako **body**, nebo jako **vektory**.

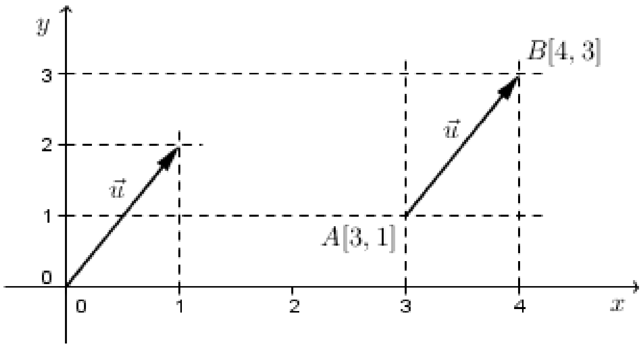
Body obvykle značíme velkými písmeny A, B, C, X, Y, apod. a jejich souřadnice píšeme do hranatých závorek, např. $A[a_1, a_2, \dots, a_n]$. Na obrázku (1) je znázorněn bod $A[1, 2, 3]$ v prostoru $\mathbb{R}^3$.



Obrázek 1: Souřadnice bodu $A[1, 2, 3]$ v prostoru $\mathbb{R}^3$

Naopak **vektory** obvykle zapisujeme malými písmeny se šipkou, např. $\vec{u} = (2, 3, 5)$ je vektor v prostoru $\mathbb{R}^3$. Obecně $\vec{u} = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ je vektor (uspořádaná n-tice) v prostoru $\mathbb{R}^n$. Reálná čísla $u_1, u_2, \dots, u_n$ nazýváme *souřadnice* (nebo též *složky*) *vektoru $\vec{u}$.*

Geometricky si lze vektor $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ představit v n-rozměrné kartézské soustavě souřadnic[1] jako **orientovanou úsečku** s počátečním bodem v počátku, tj. v bodě o souřadnicích $[0, 0, \ldots, 0]$, a s koncovým bodem o souřadnicích $[u_1, u_2, \ldots, u_n]$. Rovnoběžné posunutí této úsečky opět představuje tentýž vektor, jen s jiným *umístěním.* Vektor $\vec{u}$ si tedy také můžeme představit jako orientovanou úsečku vedoucí z nějakého bodu $A[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ do bodu $B[a_1 + u_1, a_2 + u_2, \ldots, a_n + u_n]$. Bod A pak nazýváme *počátečním* a bod B *koncovým bodem vektoru* $\vec{u}$. Protože volbu počátečního budu můžeme provést libovolně, má každý vektor nekonečně mnoho různých umístění.



Obrázek 2: Dvě různá umístění vektoru $u = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$

Jsou-li body A, B dány souřadnicemi $A[a_1, a_2, \ldots, a_n]$ a $B[b_1, b_2, \ldots, b_n]$, přičemž $a_1, a_2, \ldots, a_n$, $b_1, b_2, \ldots, b_n$ jsou reálná čísla a je-li vektor $\vec{u}$ určen orientovanou úsečkou $\overrightarrow{AB}$, nazývají se čísla

$$u_1 = b_1 - a_1 a\ u_2 = b_2 - a_2, \ldots, u_n = b_n - a_n \tag{2}$$

souřadnice vektoru $\vec{u}$. Zapisujeme $\vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$.

Je-li A počáteční bod a B koncový bod vektoru $\vec{u}$, píšeme $\vec{u} = \vec{AB} = B - A$, a souřadnice vektoru $\vec{u}$ získáme odečtením souřadnic bodu A od souřadnic bodu B. Ekvivalentně můžeme vztah (2) zapsat jako $B = A + \vec{u}$, tedy součet $A + \vec{u}$ interpretujeme jako bod $B = A + \vec{u} = [a_1 + u_1, a_2 + u_2, \ldots, a_n + u_n]$.

1.1.2 Operace s vektory

V Úvodu do matematiky jste se seznámili se dvěma operacemi s vektory - sčítání vektorů a násobení vektoru číslem. Zopakujme si, jak jsou tyto operace definovány.

Pro $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ nazveme *součtem vektorů* $\vec{u}$ a $\vec{v}$ vektor

$$\vec{u} + \vec{v} = (u_1 + v_1, u_2 + v_2, \ldots, u_n + v_n). \tag{3}$$

Pro $k \in \mathbb{R}, \vec{u} \in \mathbb{R}^n, \vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ nazveme *součinem čísla* k *s vektorem* $\vec{u}$ vektor

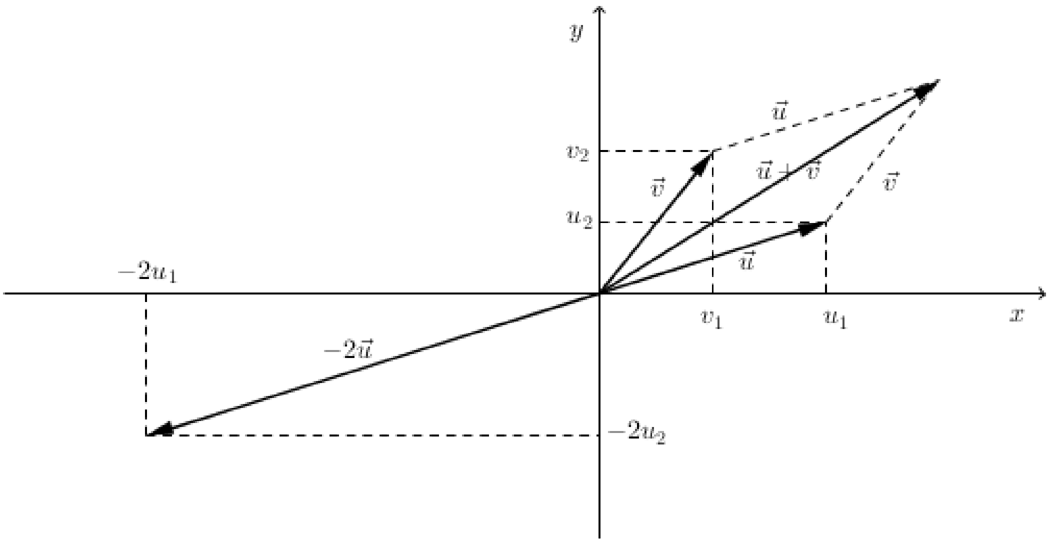
$$k \cdot \vec{u} = (k \cdot u_1, k \cdot u_2, \ldots, k \cdot u_n). \tag{4}$$

Vektory tedy **sčítáme** (resp. odečítáme) "**po složkách**"(je tedy logickou podmínkou, že sčítané vektory musí mít stejný počet souřadnic, stejný rozměr). Protože v jednotlivých složkách pracujeme se sčítáním reálných čísel, přenáší se **komutativita a asociativita sčítání** reálných

[1] Obvykle se zabýváme $n = 2$ (rovina) a $n = 3$ (klasický trojrozměrný prostor). Při grafickém znázorňování pak budeme souřadnicové osy označovat x, y (pro $n = 2$) a x, y, z (pro $n = 3$).

čísel na sčítání vektorů. **Násobení** vektoru číslem provádíme rovněž "**po složkách**"(každou složku vektoru vynásobíme daným číslem k).

Geometrický význam operací je patrný z následujícího obrázku. Součet vektorů tvoří uhlopříčku rovnoběžníku vzniklého z těchto vektorů naznačeným způsobem. Součin čísla s vektorem je vektor, který je delší (pro $|k| > 1$) než původní vektor $\vec{u}$, nebo stejně dlouhý (pro $|k| = 1$), či kratší (pro $|k| \in (0,1)$) . Je-li $k < 0$, má vzniklý vektor opačný směr než vektor původní.



Obrázek 3: Geometrický význam operací s vektory. 1. kvadrant (vpravo) - součet vektorů, 3. kvadrant (vlevo) - násobení vektoru $\vec{u}$ číslem (-2).

2 Euklidovský prostor

2.1 Teorie

Euklidovský prostor $\mathbb{R}^n$ má následující vlastnosti:

- je v něm dána **metrika** (vzdálenost bodů),
- k vyjádření souřadnic bodů a vektorů zpravidla používáme **souřadnicové osy**, které jsou na sebe **kolmé** (ortogonální) a určené počátkem (bod $O[0,0,0,0,\dots]$) a tzv. jednotkovými vektory:

  $(1,0,0,0,\dots),(0,1,0,0,\dots),(0,0,1,0,\dots),(0,0,0,1,\dots),\dots,$
- speciálním způsobem je v něm definován **součin vektorů**.

Podívejme se na tyto vlastnosti podrobněji.

2.1.1 Velikost vektoru, vzdálenost bodů

Pro libovolný vektoru $\vec{u} \in \mathbb{R}^n, \vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ nazveme *velikostí (délkou) vektoru* $\vec{u}$ číslo

$$|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + \cdots + u_n^2}. \quad (1)$$

Nechť $A[a_1, a_2, \ldots, a_n], B[b_1, b_2, \ldots, b_n]$ jsou libovolné body z $\mathbb{R}^n$. Pak *(euklidovskou) vzdáleností bodů* A, B rozumíme velikost vektoru $\overrightarrow{AB}$ a značíme ji $|AB|$, tj.

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2 + \cdots + (b_n - a_n)^2}. \quad (2)$$

Příklad
Vzdálenost bodů $A[1, -3, 5]$ a $B[2, 4, 0]$ z $\mathbb{R}^3$ je

$$|AB| = |\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(2-1)^2 + (4+3)^2 + (0-5)^2} = \sqrt{1 + 49 + 25} = \sqrt{75} = \underline{\underline{(8,66)}}.$$

2.1.2 Skalární součin, úhel vektorů

Pro libovolné vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n, \vec{u} = (u_1, u_2, \ldots, u_n), \vec{v} = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ rozumíme *skalárním součinem vektorů* $\vec{u}$ a $\vec{v}$ číslo

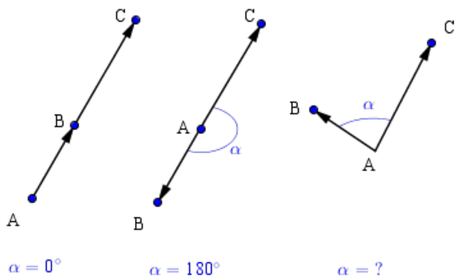
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 \cdot v_1 + u_2 \cdot v_2 + \cdots + u_n \cdot v_n = \sum_{i=1}^{n} u_i \cdot v_i. \quad (3)$$

Skalární součin tedy získáme tak, že vynásobíme jednotlivé složky příslušných vektorů. Protože složky vektorů jsou reálná čísla a násobení reálných čísel je komutativní, lze snadno odvodit, že $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$ (skalární součin je také komutativní).

A jaký je **geometrický význam** skalárního součinu? Pro skalární součin dvou vektorů platí:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}| \cdot \cos\alpha, \quad (4)$$

kde α je úhel, který tyto dva vektory svírají.



Obrázek 1: Geometrický význam skalárního součinu - odchylka vektorů. V prvních dvou případech je odchylka zřejmá. Ve třetím případě stačí pro nenulové vektory $\vec{u}, \vec{v}$ vyjádřit ze vzorce $cos\alpha$ (viz následující definice) a následně α.

Úhlem (odchylkou) dvou nenulových vektorů $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme úhel $\alpha \in \langle 0, \pi \rangle$ daný vztahem

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|}. \tag{5}$$

Uvedený vztah pro odchylku dvou vektorů využijeme např. v případě, že máme zadány body trojúhelníka a potřebujeme určit vnitřní úhly[2] .

Příklad
Odchylku vektorů $\vec{u} = (-1, 2, -2), \vec{v} = (3, 0, 1)$ získáme snadno dosazením do vzorce:

$$\cos\alpha = \frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}|\cdot|\vec{v}|} = \frac{(-1,2,-2)\cdot(3,0,1)}{|(-1,2,-2)|\cdot|(3,0,1)|} = \frac{-3+0-2}{\sqrt{1+4+4}\cdot\sqrt{9+0+1}} = \frac{-5}{3\sqrt{10}}$$

$$\alpha = \arccos\frac{-5}{3\sqrt{10}}$$

$$\alpha = \underline{\underline{121^\circ\,41'}}$$[3] .

Vztah (5) využijeme také v případě, máme-li určit, zda je odchylka mezi vektory speciální - a to 90°. Platí, že $\cos 90^\circ = 0$ a tedy je pro takové vektory skalární součin (podle (4)) roven 0. Pokud jste porozuměli, snadno si zapamatujete následující definici.

Dva vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ nazveme *kolmé (ortogonální)*, je-li

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = 0. \tag{6}$$

2.1.3 Vektorový součin

Nyní zavedeme tzv. vektorový součin $\vec{u}\times\vec{v}$ pro vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Avšak zdůrazněme, že vektorový součin (kvůli zjednodušení) definujeme pouze pro vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3$!

Pro libovolné vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^3, \vec{u} = (u_1, u_2, u_3), \vec{v} = (v_1, v_2, v_3)$ nazveme *vektorovým součinem vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$* (v tomto pořadí!) **vektor** $\vec{w}$ (a označujeme $\vec{u}\times\vec{v}$) pro který platí:

$$\vec{w} = \vec{u}\times\vec{v} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i\cdot\begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} + j\cdot\begin{vmatrix} u_3 & u_1 \\ v_3 & v_1 \end{vmatrix} + k\cdot\begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix} \tag{7}$$

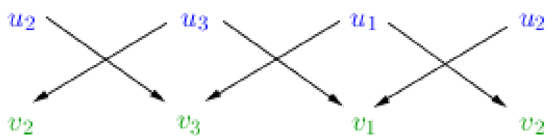
$$= (u_2v_3 - u_3v_2, u_3v_1 - u_1v_3, u_1v_2 - u_2v_1),$$

kde i, j, k jsou jednotkové vektory ve směru souřadnicových os x, y, z, $i = (1, 0, 0), j = (0, 1, 0), k = (0, 0, 1)$.

Uvedený vzorec pro vektorový součin si lze snadno zapamatovat pomocí následující pomůcky.

[2] V chemii nám vzorec může pomoci při určení velikostí vazebných úhlů.

[3] Podobně se počítá odchylka přímek a jiných útvarů, avšak v takovém případě se bere úhel v rozmezí $\langle 0^\circ, 90^\circ \rangle$ - viz (3).



Obrázek 2: Pomůcka pro vektorový součin

Z definice vektorového součinu lze snadno odvodit:

Jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ **lineárně závislé** (tj. tyto vektory mají stejný směr čili umístění těchto vektorů jsou rovnoběžná - tj. jeden vektor je násobkem druhého), je

$$\vec{w} = 0. \tag{8}$$

Naopak, jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ **lineárně nezávislé** (tj. tyto vektory nemají stejný směr čili žádné umístění jednoho vektoru není rovnoběžné s žádným umístěním druhého vektoru, je vektor $\vec{w}$ **nenulový**. Navíc platí, že vektor $\vec{w}$ má tyto vlastnosti:

1) vektor $\vec{w}$

$$\text{je kolmý} \tag{9}$$

k oběma vektorům $\vec{u}, \vec{v}$;

2) vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$ tvoří tzv. pravotočivou bázi[a] ;

3)
$$|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha, \tag{10}$$

kde α je odchylka vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$.[b]

[a] Viz níže - část Ad 2)

[b] Viz níže - část Ad 3)

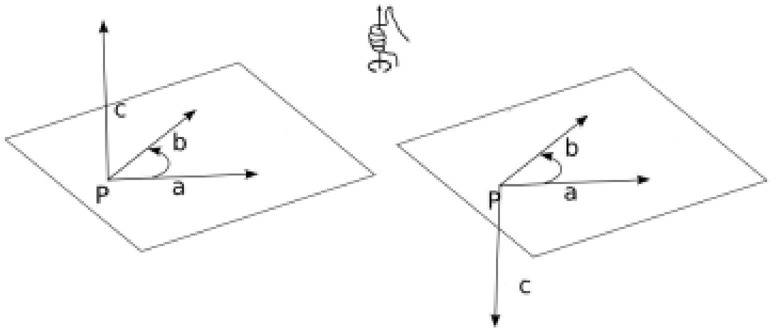
Ad 2) Pravotočivá báze (soustava) Mějme tři libovolné vektory v prostoru. Každá trojice vektorů, jejichž umístění neleží v jedné rovině, se nazývá *bází* v prostoru. Zvolíme si takové umístění těchto vektorů, aby jejich počáteční body byly identické.

Vezměme si vektory $\vec{u}, \vec{v}, \vec{w}$, kde $\vec{w} = \vec{u} \times \vec{v}$. Položíme-li pravou ruku na pomyslnou rovinu určenou vektory $\vec{u}, \vec{v}$ tak, aby pokrčené prsty ruky udávaly směr od vektoru $\vec{u}$ k $\vec{v}$ (nejkratším směrem), pak vztyčený palec směřuje do stejného poloprostoru jako vektor $\vec{w}$. V takovém případě se *báze* nazývá *pravotočivá*.

Pokud bychom vzali tři libovolné vektory, řekněme $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, kde $\vec{c} \neq \vec{a} \times \vec{b}$, pak by vztyčený palec mohl ukazovat do opačného poloprostoru než vektor $\vec{c}$. V takovém případě nazveme *bázi levotočivou*. Kdybyste místo pravé ruky teď použili ruku levou, tak její palec bude ukazovat do stejného poloprostoru jako vektor $\vec{c}$.

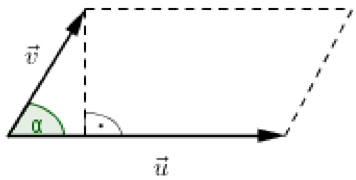
Na obrázku (3) vlevo tvoří vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ pravotočivou bázi, vpravo potom levotočivou.

Ad 3) Obsah rovnoběžníka Jsou-li vektory $\vec{u}, \vec{v}$ **lineárně nezávislé**, pak vzorec



Obrázek 3: Báze prostoru

$|\vec{w}| = |\vec{u}||\vec{v}| \sin \alpha$ udává **obsah rovnoběžníka**, jehož strany tvoří vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$.[4]



Obrázek 4: Obsah rovnoběžníka

2.1.4 Smíšený součin

Spojení vektorového a skalárního součinu se nazývá smíšený součin. Smíšený součin, stejně jako vektorový součin, definujeme pouze v prostoru (pro vektory $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$)!

Smíšeným součinem vektorů $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c} \in \mathbb{R}^3$ rozumíme **číslo**

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}. \tag{11}$$

Je-li $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3), \vec{b} = (b_1, b_2, b_3), \vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$, pak

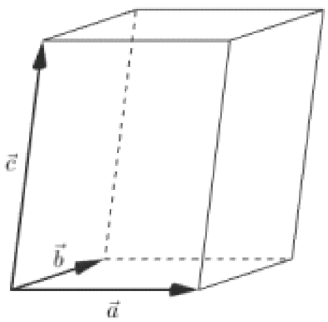
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}. \tag{12}$$

[4] Stačí si uvědomit, že pro obsah rovnoběžníka platí $S = |\vec{u}| \cdot v_a$, kde v_a je výška tohoto rovnoběžníka. Zároveň však platí, že $v_a = |\vec{v}| \sin \alpha$.

Absolutní hodnota smíšeného součinu vektorů

$$|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| \tag{13}$$

je rovna **objemu rovnoběžnostěnu**, který tyto tři vektory určují, je-li jejich umístění zvoleno tak, že mají společný počáteční bod.

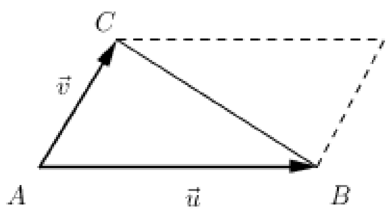


Obrázek 5: Objem rovnoběžnostěnu

2.2 Řešené příklady

Příklad 1. *Určete obsah trojúhelníka ABC, je-li:* $A[-1,-2,1], B[2,0,2]$ *a* $C[1,1,1]$.

Řešení. Vzpomeneme-li si na geometrický význam vektorového součinu, víme (podle (10)), že pro lineárně nezávislé vektory $\vec{u}, \vec{v}$ udává $|\vec{w}| = |\vec{u} \times \vec{v}|$ **obsah rovnoběžníka**, jehož strany tvoří vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Obsah trojúhelníka bude roven polovině obsahu rovnoběžníka:



$$S_\triangle = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$$

$$\vec{u} = \vec{AB} = (3,2,1), \vec{v} = \vec{AC} = (2,3,0)$$

$$\begin{array}{lcccc} \vec{u} \times \vec{v} : 2 & & 1 & 3 & 2 \\ & 3 & 0 & 2 & 3 \end{array}$$

$$\vec{u} \times \vec{v} = (-3, 2, 5).$$

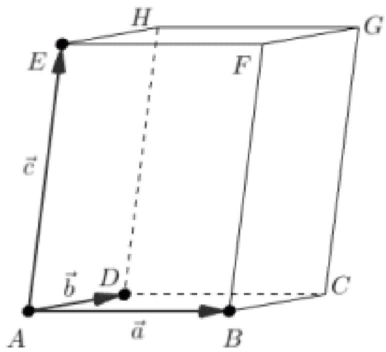
Velikost vektorového součinu vypočteme podle vzorce (1) určujícího velikost vektoru:

$$|\vec{u} \times \vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + 2^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 4 + 25} = \sqrt{38}$$

$$S_{\triangle} = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \underline{\underline{\frac{\sqrt{38}}{2}}}.$$

Příklad 2. *Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$, je-li: $A[1,2,1], B[7,3,0], D[-1,5,2]$ a $E[1,0,6]$.*

Řešení. Pro objem V rovnoběžnostěnu (podle (13)) platí: $|(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}|$, kde $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ jsou tři vektory se společným počátečním bodem. Pokud si nakreslíme obrázek znázorňující naši situaci a vyznačíme v něm zadané body, vidíme, že všechny tři vektory potřebné pro určení objemu můžeme snadno vypočítat ze zadaných bodů.



$$\vec{a} = \vec{AB} = (6, 1, -1), \vec{b} = \vec{AD} = (-2, 3, 1), \vec{c} = \vec{AE} = (0, -2, 5)$$

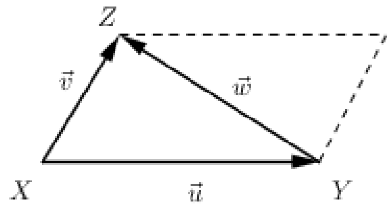
$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} \overset{(12)}{=} \begin{vmatrix} 6 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 5 \end{vmatrix} = 90 + 0 - 4 - 0 + 12 + 10 = 108$$

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |108| = \underline{\underline{108}}$$

Objem rovnoběžnostěnu je tedy roven 108.

Příklad 3. *Je dán trojúhelník XYZ, kde $X[0,1,4], Y[0,-2,1]$ a $Z[-3,-2,4]$. Vypočtěte obvod, obsah a velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníka.*

Řešení. Znázorníme si trojúhelník XZY. Vektory, které leží v jeho stranách, si označíme $\vec{u}, \vec{v}$ a $\vec{w}$.



Vektory snadno vypočteme:

$$\vec{u} = \vec{XY} = (0, -3, -3), \vec{v} = \vec{XZ} = (-3, -3, 0), \vec{w} = \vec{YZ} = (-3, 0, 3).$$

Pro **obvod trojúhelníka** bude platit:

$$o = |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}|.$$

Velikosti jednotlivých vektorů určíme posle vzorce (1):

$$|\vec{u}| = \sqrt{0^2 + (-3)^2 + (-3)^2} = \sqrt{0 + 9 + 9} = \sqrt{18}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2 + 0^2} = \sqrt{9 + 9 + 0} = \sqrt{18}$$

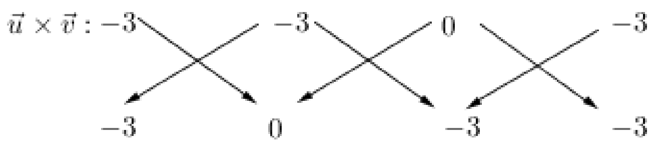
$$|\vec{w}| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9 + 0 + 9} = \sqrt{18}.$$

Dosazením do vzorce již snadno určíme obvod trojúhelníka:

$$o = |\vec{u}| + |\vec{v}| + |\vec{w}| = \sqrt{18} + \sqrt{18} + \sqrt{18} = 3\sqrt{18} = \underline{\underline{9\sqrt{2}}}.$$

Obsah trojúhelníka spočítáme (stejně jako v příkladu 1) jako polovinu obsahu příslušného rovnoběžníka, jehož strany tvoří vektory $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Podle vzorce (10) platí:

$$S_\triangle = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}|$$



$$\vec{u} \times \vec{v} = (-9, 9, -9).$$

$$|\vec{u} \times \vec{v}| \overset{(1)}{=} \sqrt{(-9)^2 + 9^2 + (-9)^2} = \sqrt{3 \cdot 9^2} = 9\sqrt{3}$$

$$S_\triangle = \frac{1}{2}|\vec{u} \times \vec{v}| = \underline{\underline{\frac{9\sqrt{3}}{2}}}.$$

Velikost vnitřních úhlů trojúhelníka bychom mohli určit podle vzorce (5) udávajícího úhel mezi jednotlivými vektory. Pokud jsme však byli při počítání předchozích částí pozorní, mohli jsme si povšimnout, že velikosti všech tří vektorů $\vec{u}, \vec{v}$ a $\vec{w}$ jsou si rovny. To znamená, že zadaný trojúhelník je rovnostranný. V rovnostranném trojúhelníku platí, že velikost všech vnitřních úhlů je rovna $\underline{\underline{60^\circ}}$.

2.3 Příklady k procvičení

2.3.1 Velikost vektoru, vzdálenost bodů, skalární součin a úhel vektorů

Příklad 1. *Vypočítejte velikost vektoru:*

a) $\vec{u} = (-4, 2)$

b) $\vec{u} = (4, -3, 5)$

Řešení. a) $|\vec{u}| = 2\sqrt{5}$

b) $|\vec{u}| = 5\sqrt{2}$

Příklad 2. *Určete vzdálenost bodů A a B:*

a) $A[1, 1], B[4, 2]$

b) $A[3, 1, -5], B[1, 2, -3]$

Řešení. a) $|AB| = \sqrt{10}$

b) $|AB| = 3$

Příklad 3. *Vypočítejte skalární součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$:*

a) $\vec{u} = (1, 2), \vec{v} = (-1, 1)$

b) $\vec{u} = (2, -1), \vec{v} = (1, 3)$

c) $\vec{u} = (1, 1, 3), \vec{v} = (2, 1, -1)$

d) $\vec{u} = (1, 0, 1), \vec{v} = (0, 2, -1)$

Řešení. a) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 1$

b) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$

c) $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

d) $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1$

Příklad 4. *Vypočítejte úhel (odchylku) vektorů $\vec{u}, \vec{v}$:*

a) $\vec{u} = (1, 1), \vec{v} = (-1, 1)$

b) $\vec{u} = (-2, 3), \vec{v} = (4, -6)$

c) $\vec{u} = (1, 1, -1), \vec{v} = (2, 1, 3)$

d) $\vec{u} = (0, 1, 2), \vec{v} = (3, 3, -1)$

Řešení. a) $\alpha = 90^\circ$

b) $\alpha = 180^\circ$

c) $\alpha = 90^\circ$

d) $\alpha = 84^\circ\, 6'\, 40''$

Příklad 5. *Určete vektor kolmý k vektoru $\vec{u}$:*

a) $\vec{u} = (1, -1)$

b) $\vec{u} = (-2, -5)$

Řešení. a) Např. (1,1), (-1,-1) - stačí prohodit souřadnice zadaného vektoru a u jedné z nich změnit znaménko. Tak bude skalární součin vektorů roven 0.

b) Např. (5,-2), (-5,2)

2.3.2 Vektorový součin

Příklad 6. *Určete vektor $\vec{w}$ kolmý ke dvěma vektorům $\vec{u}, \vec{v}$:*

a) $\vec{u} = (1, -1, 2), \vec{v} = (3, 1, 1)$

b) $\vec{u} = (1, 0, 1), \vec{v} = (-1, 3, 2)$

c) $\vec{u} = (1, -1, 3), \vec{v} = (0, 0, 1)$

Řešení. a) $\vec{w} = (-3, 5, 4)$

b) $\vec{w} = (1, 1, -1)$

c) $\vec{w} = (1, 1, 0)$

Příklad 7. *Vypočítejte obsah rovnoběžníka $KLMN$, jestliže znáte souřadnice vrcholů K, L, M. Vypočítejte souřadnice vrcholu N.*

a) $K[2, 0, 1], L[1, -1, 3], M[4, 2, 1]$

b) $K[1, 3], L[2, 0], M[4, -1]$

Řešení. a) $N[5, 3, -1], S = 4\sqrt{2}$

b) Abychom mohli užít vektorový součin, musíme převést úlohu do prostoru např. tak, že u všech bodů doplníme souřadnici $z = 0$. $N[3, 2], S = 5$

Příklad 8. *Vypočítejte obsah trojúhelníka ABC, je-li:*

a) $A[4, 0, -1], B[2, 4, -1]$ *a* $C[5, 3, 4]$

b) $A[2, -1], B[-1, 4]$ *a* $C[3, -2]$

c) $A[3, -6, 5], B[4, 8, 1]$ *a* $C[5, 22, -3]$

Řešení. a) $S_\triangle = 5\sqrt{6}$

b) $S_\triangle = 1$

c) A, B, C leží na přímce.

Příklad 9. *Je dán trojúhelník XYZ, kde $X[4, 1, 0], Y[4, -2, -3]$ a $Z[1, -2, 0]$. Vypočtěte obvod, obsah a velikosti vnitřních úhlů tohoto trojúhelníka.*

Řešení. $o = 9\sqrt{2}, S_\triangle = \dfrac{9}{2}\sqrt{3}, \alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$

2.3.3 Smíšený součin

Příklad 10. *Vypočtěte objem rovnoběžnostěnu $ABCDEFGH$, je-li:*

a) $A[2,3,-1], B[8,4,-2], D[0,6,0]$ *a* $E[2,1,4]$

b) $A[1,0,0], B[6,0,0], D[1,-4,0]$ *a* $E[1,0,5]$

Řešení. a) 108

b) 100

3 Geometrie v prostoru

3.1 Teorie

3.1.1 Parametrická rovnice přímky v prostoru

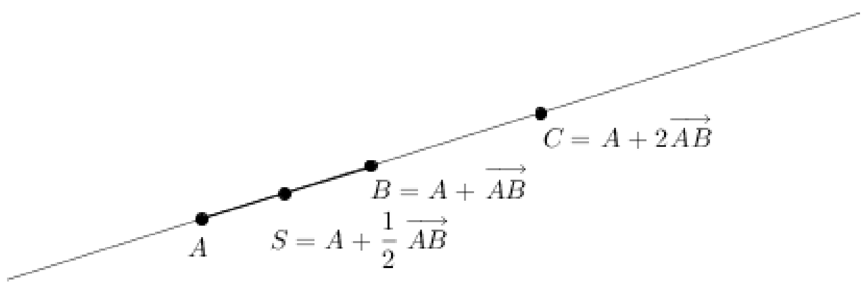
Každá přímka v prostoru $\mathbb{R}^3$ je jednoznačně určena dvěma různými body (označme je $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3]$), které na této přímce leží. Každý bod $X[x_1, x_2, x_3]$ přímky p dostaneme tak, že k bodu A přičítáme různé násobky vektoru $\vec{u} = \vec{AB}$, viz obr. (1).

Místo dvou bodů můžeme přímku také určit jedním bodem a nenulovým vektorem $\vec{u}$ - přímku vyjádříme tzv. parametrickou rovnicí.

Rovnice

$$X = A + t\vec{u}; \quad t \in \mathbb{R} \tag{1}$$

se nazývá *parametrická rovnice* nebo také *parametrické vyjádření přímky* p. Vektor $\vec{u}$ se nazývá *směrový vektor* přímky p, proměnná $t \in \mathbb{R}$ se nazývá *parametr*.



Obrázek 1: Parametrická rovnice přímky

Parametrickou rovnici (1) můžeme rozepsat po souřadnicích - dosazením $X[x, y, z], A[a_1, a_2, a_3], u = (u_1, u_2, u_3)$ získáme vyjádření souřadnic bodů X této přímky v závislosti na parametru t:

$$p: \begin{array}{rcccl} x & = & a_1 & + & tu_1 \\ y & = & a_2 & + & tu_2 \\ z & = & a_3 & + & tu_3 \end{array}; \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Je-li přímka p zadána dvěma různými body A, B, lze parametrickou rovnici snadno získat dosazením souřadnic bodů X a A a vektoru $\vec{u} = \vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$. Pro různé hodnoty parametru t dostáváme různé body přímky - např. pro $t = 1$ bod $X = A + \vec{AB} = B$.

Omezíme-li t na interval $\langle 0, 1\rangle$, dostaneme *parametrickou rovnici úsečky*. Střed úsečky AB dostaneme pro hodnotu $t = \frac{1}{2}$:

$$S = A + \frac{1}{2}\vec{AB} = A + \frac{1}{2}(B - A) = A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}A = \frac{A + B}{2}.$$ [5]

3.1.2 Vzájemná poloha dvou přímek v prostoru

V prostoru $\mathbb{R}^3$, stejně jako v $\mathbb{R}^n, n \geqslant 3$, mohou mít dvě různé přímky p, q následující vzájemnou polohu:

1) Pokud jejich směrové vektory jsou **lineárně závislé** (jeden je násobkem druhého), přímky p a q jsou *rovnoběžné*, přičemž
   - pokud **nemají žádný společný bod** ($p \cap q = \emptyset$), jsou *rovnoběžné různé* (značíme $p \parallel q$),
   - pokud **mají všechny body společné** ($p \cap q = p$), jsou *rovnoběžné totožné* (značíme $p = q$).
2) Pokud jejich směrové vektory **nejsou lineárně závislé** (jeden není násobkem druhého), přímky p a q *nejsou rovnoběžné* (značíme $p \nparallel q$), přičemž
   - pokud **nemají žádný společný bod** ($p \cap q = \emptyset$), jsou *mimoběžné*,
   - pokud **mají právě jeden společný bod** ($p \cap q = P$), jsou *různoběžné*. Speciálním případem různoběžných přímek jsou *přímky kolmé* (svírající úhel 90°, označujeme je $p \perp q$).

Odchylkou dvou přímek se směrovými vektory $\vec{u}, \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ rozumíme úhel $\alpha \in \langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$ daný vztahem

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}. \tag{3}$$ [a]

[a] Odchylka přímek se tedy počítá podobně, jako odchylka vektorů (viz (5)), avšak v čitateli zlomku je absolutní hodnota. To zajišťuje, že odchylka přímek je v intervalu $\langle 0, \frac{\pi}{2}\rangle$, zatímco odchylka vektorů v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$.

3.1.3 Parametrická rovnice roviny v prostoru

Každá rovina v prostoru $\mathbb{R}^3$ je jednoznačně určena:

[5] K určení souřadnic středu S si stačí uvědomit, že musí platit $|AS| = |BS| = \frac{1}{2}|AB|$.

- **třemi** svými různými **body** (označme je $A[a_1, a_2, a_3], B[b_1, b_2, b_3], C[c_1, c_2, c_3]$), které neleží na jedné přímce.

  Body A, B, C neleží na jedné přímce právě tehdy, když vektory $\vec{AB}, \vec{AC}$ jsou **lineárně nezávislé**.

- **dvěma** různými **přímkami**, které nejsou mimoběžné.

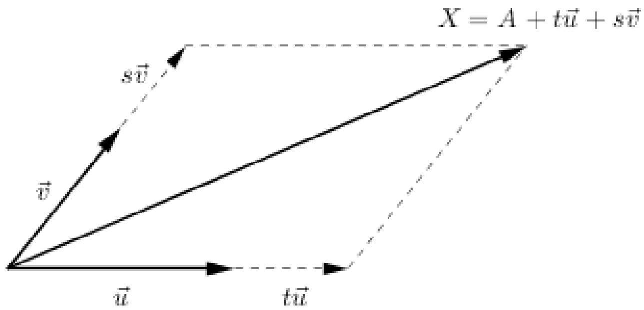
- jedním **bodem** a **dvěma** různými nenulovými **vektory**, které jsou **lineárně nezávislé** (jeden není násobkem druhého).

Každý bod $X[x_1, x_2, x_3]$ roviny $\rho = ABC$ dostaneme tak, že k bodu A přičítáme různé násobky nenulových vektorů $\vec{u} = \vec{AB}$ a $\vec{v} = \vec{AC}$ (tedy přičítáme nějakou lineární kombinaci vektorů $\vec{AB}$ a $\vec{AC}$), viz obr. (2).

Rovnice

$$X = A + t\vec{u} + s\vec{v}; \quad t, s \in \mathbb{R} \tag{4}$$

se nazývá *parametrická rovnice* nebo také *parametrické vyjádření roviny* $\rho = ABC$, kde $B = A + u$ a $C = A + v$. Vektory $\vec{u}, \vec{v}$ se nazývají *směrové vektory* roviny ρ, proměnné $t, s \in \mathbb{R}$ se nazývají *parametry*.



Obrázek 2: Parametrická rovnice roviny

Parametrickou rovnici (4) můžeme rozepsat po souřadnicích - dosazením $X[x, y, z], A[a_1, a_2, a_3], u = (u_1, u_2, u_3), v = (v_1, v_2, v_3)$ získáme vyjádření souřadnic bodů X této roviny v závislosti na parametrech t, s:

$$\rho: \begin{array}{ccccccc} x & = & a_1 & + & tu_1 & + & sv_1 \\ y & = & a_2 & + & tu_2 & + & sv_2 \\ z & = & a_3 & + & tu_3 & + & sv_3 \end{array}; \quad t, s \in \mathbb{R}. \tag{5}$$

Je-li rovina ρ zadána třemi různými body A, B, C, lze parametrickou rovnici snadno získat dosazením souřadnic bodů X a A a vektorů $\vec{u} = \vec{AB} = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3), \vec{v} = \vec{AC} = (c_1 - a_1, c_2 - a_2, c_3 - a_3)$. Pro různé hodnoty parametrů t, s dostáváme různé body roviny.

3.1.4 Obecná rovnice roviny v prostoru

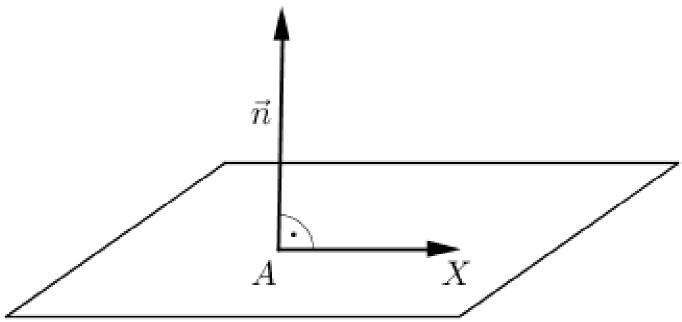
Obecná rovnice roviny je další způsob vyjádření roviny v prostoru. Obecná rovnice roviny v prostoru je podobná obecné rovnici přímky v rovině.

Rovnice

$$ax + by + cz + d = 0, \quad a, b, c, d \in \mathbb{R}, \tag{6}$$

kde alespoň jedno z čísel a, b, c je nenulové, se nazývá *obecná rovnice roviny*. Vektor $\vec{n} = (a, b, c)$, který je kolmý ke všem vektorům ležícím v rovině, nazýváme *normálovým vektorem* této roviny.

Normálový vektor je kolmý ke všem vektorům ležícím v rovině, speciálně tedy ke směrovým vektorům roviny. Toho se využívá při převodu zadané parametrické rovnice roviny na obecnou - vektor $\vec{n}$ získáme jako vektorový součin vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$. Koeficient d pak zjistíme snadno dosazením souřadnic kteréhokoli bodu ležícího v rovině.



Obrázek 3: Obecná rovnice roviny

3.1.5 Obecná rovnice přímky v prostoru

Přímku v prostoru lze zadat i jako průsečnici dvou různoběžných rovin.

Rovnice

$$p: \begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0 \end{array} \; ; \quad h\begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix} = 2 \tag{7}$$

se nazývají *obecnými rovnicemi přímky*[a] .

[a] Symbol h značí hodnost matice soustavy rovnic. Platí-li $h(A) = 2$, je splněna podmínka, že roviny jsou různoběžné a tudíž mají průsečnici.

Připomeňme, že obecná rovnice přímky v rovině je tvaru $ax + by + c = 0$. V prostoru nám jedna obecná rovnice pro přímku nestačí, potřebujeme dvě[6] .

[6] Obecně v prostoru dimenze n ($n = 2$ rovina, $n = 3$ prostor) lze útvar dimenze k ($k = 1$ přímka, $k = 2$ rovina) vyjádřit pomocí $n - k$ obecných rovnic. Útvar dimenze o jedno menší, než je dimenze prostoru, tj. útvar dimenze $k = n - 1$ se nazývá *nadrovina* (v rovině je to přímka, v prostoru rovina). Nadrovinu lze vždy vyjádřit jednou obecnou rovnicí tvaru $a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n + a = 0$.

3.2 Řešené příklady

3.2.1 Přímka v prostoru

Příklad 1. *Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD, je-li: $A[2,-5,-2], B[0,-3,0], C[4,1,2]$ a $D[-1,-2,1]$.*

Řešení. Určíme směrové vektory obou přímek:

$$\vec{AB} = (-2,2,2), \vec{CD} = (-5,-3,-1).$$

Směrové vektory nejsou lineárně závislé, a proto přímky AB a CD **nejsou rovnoběžné**.

Nyní potřebujeme určit počet společných bodů těchto přímek. Sestavíme jejich parametrické rovnice:

$$p: \begin{array}{rcrcr} x & = & 2 & - & 2t \\ y & = & -5 & + & 2t \\ z & = & -2 & + & 2t \end{array} ; \quad t \in \mathbb{R} \qquad q: \begin{array}{rcrcr} x & = & 4 & - & 5s \\ y & = & 1 & - & 3s \\ z & = & 2 & - & s \end{array} ; \quad s \in \mathbb{R}.$$

Souřadnice průsečíku musí vyhovovat jak parametrickým rovnicím přímky AB, tak parametrickým rovnicím přímky CD. Musí tedy platit:

$$p \cap q: \begin{array}{rcrcrcr} 2 & - & 2t & = & 4 & - & 5s \\ -5 & + & 2t & = & 1 & - & 3s \\ -2 & + & 2t & = & 2 & - & s \end{array}.$$

Po úpravě dostaneme soustavu tří lineárních rovnic o dvou neznámých:

$$\begin{array}{rcrcr} 5s & - & 2t & = & 2 \\ 3s & + & 2t & = & 6 \\ s & + & 2t & = & 4 \end{array}.$$

Tuto soustavu můžeme řešit Gaussovou eliminační metodou. Nebo sečtením prvních dvou rovnic dostáváme:

$$(1) + (2) : 8s = 8 \quad \Rightarrow \quad s = 1.$$

Dosazením hodnoty proměnné s do první rovnice (můžeme zvolit i druhou rovnici) dostáváme $t = \frac{3}{2}$.

Hodnoty proměnných t, s dosadíme do třetí rovnice: $1 + 3 = 4$.

Pokud získáme, stejně jako v našem příkladu, platnou rovnost, bude mít daná soustava právě jedno řešení - průsečík P přímek AB a CD. Přímky tedy budou **různoběžné**[7] .

Souřadnice průsečíku získáme dosazením parametru $t = \frac{3}{2}$ do parametrických rovnic přímky AB, nebo také dosazením parametru $s = 1$ do parametrických rovnic přímky CD. Pokud budeme počítat správně, vyjdou souřadnice průsečíku P v obou případech stejně: $\underline{\underline{P[-1,-2,1]}}$.

Příklad 2. *Určete, zda jsou přímky AB a CD z příkladu 1 kolmé.*

Řešení. Abychom určili zda jsou zadané přímky kolmé, stačí zjistit, zda svírají úhel 90°. To lze určit pomocí odchylky směrových vektorů $\vec{AB} = (-2, 2, 2), \vec{CD} = (-5, -3, -1)$. Podle vzorce (6) platí, že dva vektory jsou kolmé, je-li jejich skalární součin roven nule. Určíme tedy skalární součin daných vektorů:

$$(-2, 2, 2) \cdot (-5, -3, -1) = 10 - 6 - 2 = 2 \neq 0$$

Dané směrové vektory tedy nejsou kolmé, proto **nejsou kolmé** ani **přímky** AB a CD.

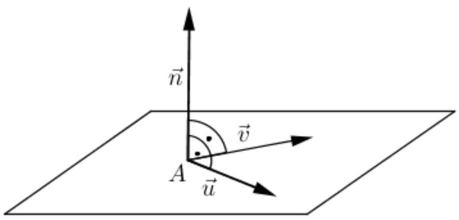
3.2.2 Rovina v prostoru

Příklad 3. *Napište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem*

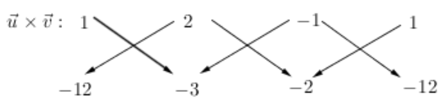
a) $A[2, 3, 1]$ *a má směrové vektory* $\vec{u} = (-1, 1, 2)$ *a* $\vec{v} = (-2, -12, -3)$.

b) $M[1, 2, 3]$ *a je kolmá na vektor* $\vec{u} = (3, 2, 1)$.

Řešení. a) Pokud je vektor $\vec{u}$ kolmý k rovině, znamená to, že je jejím normálovým vektorem a v tomto případě snadno určíme obecnou rovnici roviny.



Vektor $\vec{n}$ tedy získáme jako vektorový součin (podle (7)) vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$:



$\vec{n} = (-3+24, -4-3, 12+2) = (21, -7, 14)$. K určení obecné rovnice roviny můžeme vzít vektor $\frac{1}{7}\vec{n}$, který je také k dané rovině kolmý: $\vec{n_1} = (3, -1, 2)$.

Zapíšeme obecnou rovnici roviny (označme si ji ρ) a dosadíme do ní souřadnice vektoru $\vec{n_1}$:

$$\rho: \begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ 3x & - & y & + & 2z & + & d & = & 0 \end{array}.$$

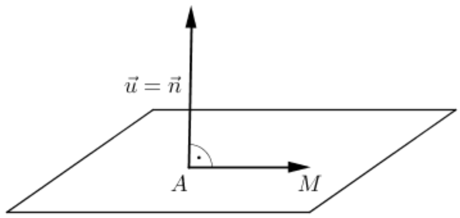
Koeficient d zjistíme dosazením souřadnic bodu A ležícího v rovině:

[7] Pokud bychom dostali neplatnou rovnost, byly by přímky mimoběžné.

$$A \in \rho: \begin{array}{ccccccccc} 3\cdot 2 & - & 3 & + & 2\cdot 1 & + & d & = & 0 \\ & & & & & & d & = & -5 \end{array}.$$

Hledaná obecná rovnice roviny tedy je $\underline{\underline{3x - y + 2z - 5 = 0}}$.

b) Platí, že normálový vektor $\vec{n}$ je kolmý ke směrovým vektorům roviny.



Zapíšeme obecnou rovnici roviny (označme si ji ρ) a dosadíme do ní souřadnice vektoru $\vec{n} = \vec{u}$:

$$\rho: \begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ 3x & + & 2y & + & z & + & d & = & 0 \end{array}.$$

Koeficient d zjistíme dosazením souřadnic bodu M ležícího v rovině:

$$M \in \rho: \begin{array}{ccccccccc} 3\cdot 1 & + & 2\cdot 2 & + & 1\cdot 3 & + & d & = & 0 \\ & & & & & & d & = & -10 \end{array}.$$

Hledaná obecná rovnice roviny tedy je $\underline{\underline{3x + 2y + z - 10 = 0}}$.

Příklad 4. *Vypočítejte vzdálenost bodu $A[3, 0, -2]$ od roviny $\rho: 3x - 2y + z = 21$*[8] .

Řešení. Postup řešení:

- Bodem A povedeme přímku p kolmou k rovině ρ.
- Určíme průsečík P přímky p a roviny ρ.
- Určíme vzdálenost $|A\rho| = |AP|$.[9]

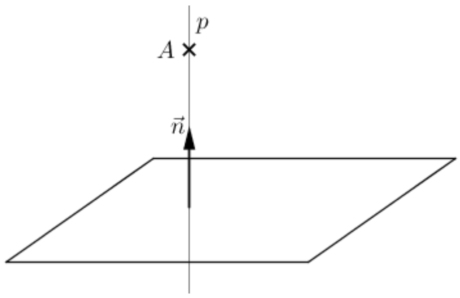
Protože normálový vektor roviny $\vec{n} = (3, -2, 1)$ je kolmý k této rovině, bude zároveň směrovým vektorem přímky p: $\vec{u} = (3, -2, 1)$.

Přímku p vyjádříme (podle (2)) parametricky (pomocí vektoru $\vec{u}$ a bodu A ležícího na přímce):

$$p: \begin{array}{ccccc} x & = & 3 & + & 3t \\ y & = & & - & 2t \\ z & = & -2 & + & t \end{array}; \quad t \in \mathbb{R}.$$

[8] Takového příkladu se využívá i v chemii při určování interakce atomu (bod) s π-systémem aromatického cyklu (ten tvoří rovinu).

[9] Analogicky lze příklad řešit dosazením do vzorce určujícího vzdálenost bodu od roviny: $|A\rho| = \dfrac{|aa_1 + ba_2 + ca_3 + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$



Určíme průsečík P přímky p a roviny ρ (dosazením x, y, z z vyjádření přímky do rovnice roviny):

$$p \cap \rho: \quad \begin{array}{rcl} 3(3+3t) - 2(-2t) + (-2+t) & = & 21 \\ 9 + 9t + 4t - 2 + t & = & 21 \\ 14t & = & 14 \\ t & = & 1 \end{array}.$$

Souřadnice průsečíku P získáme dosazením hodnoty t do parametrického vyjádření přímky p:

$$p: \begin{array}{ccrcrcr} x & = & 3 & + & 3 & = & 6 \\ y & = & & - & 2 & & \\ z & = & -2 & + & 1 & = & -1 \end{array} \quad ; \quad P[6, -2, -1].$$

Nyní určíme (podle (2)) vzdálenost bodu bodu A od roviny ρ:

$$|A\rho| = |AP| = \sqrt{(6-3)^2 + (-2-0)^2 + (-1+2)^2} = \sqrt{9+4+1} = \underline{\underline{\sqrt{14}}}.$$

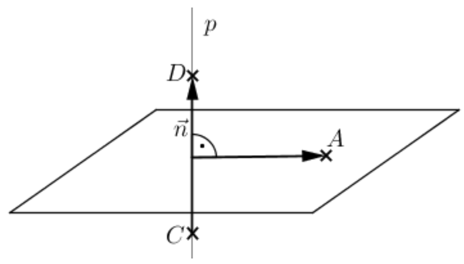
Příklad 5. *Vypočítejte vzdálenost bodu $A[-5, 1, -5]$ od přímky p procházející body $C[-1, 4, 3], D[0, 2, 4]$.*

Řešení. Postup řešení:

- Bodem A povedeme rovinu ρ kolmou k přímce p - vybereme takovou, které prochází bodem A.
- Určíme průsečík P přímky p a roviny ρ (určíme-li rovnici roviny obecně a rovnici přímky parametricky, bude se nám úloha snadno počítat).
- Určíme vzdálenost $|Ap| = |AP|$.

Směrový vektor přímky p, $\vec{CD} = (1, -2, 1)$, je zároveň normálovým vektorem roviny ρ: $\vec{n} = (1, -2, 1)$.

Rovinu ρ vyjádříme (podle (6)) obecně:



$$\rho: \begin{array}{ccccccccc} ax & + & by & + & cz & + & d & = & 0 \\ x & - & 2y & + & z & + & d & = & 0 \end{array}$$

$$A \in \rho: \begin{array}{ccccccccc} -5 & - & 2 \cdot 1 & - & 5 & + & d & = & 0 \\ & & & & & & d & = & 12 \end{array}$$

$$\rho: x - 2y + z \ + 12 = 0.$$

Přímku p vyjádříme (podle (2)) parametricky (pomocí vektoru $\vec{CD}$ a např. bodu C ležícího na této přímce):

$$p: \begin{array}{ccccc} x & = & -1 & + & t \\ y & = & 4 & - & 2t \\ z & = & 3 & + & t \end{array} ; \quad t \in \mathbb{R}.$$

Určíme průsečík P přímky p a roviny ρ (dosazením x, y, z z vyjádření přímky do rovnice roviny):

$$p \cap \rho: \begin{array}{rcr} (-1+t) - 2(4-2t) + (3+t) + 12 & = & 0 \\ -1 + t - 8 + 4t + 3 + t + 12 & = & 0 \\ 6t & = & -6 \\ t & = & -1 \end{array}.$$

Souřadnice průsečíku P získáme dosazením hodnoty t do parametrického vyjádření přímky p:

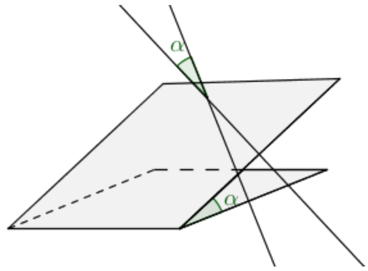
$$p: \begin{array}{ccccccc} x & = & -1 & + & (-1) & = & -2 \\ y & = & 4 & - & 2(-1) & = & 6 \\ z & = & 3 & + & (-1) & = & 2 \end{array} ; \quad P[-2, 6, 2].$$

Nyní určíme (podle (2)) vzdálenost bodu bodu A od přímky p:

$$|Ap| = |AP| = \sqrt{(-2+5)^2 + (6-1)^2 + (2+5)^2} = \sqrt{9+25+49} = \underline{\underline{\sqrt{83}}}.$$

Příklad 6. *Vypočtěte úhel, který svírají roviny ρ a σ, je-li $\rho : z - 3 = 0, \sigma : 2y + 2z - 1 = 0$.*

Řešení. Úhel, který svírají roviny, bude stejný jako úhel, který svírají kolmice na tyto roviny.



Směrové vektory těchto kolmic budou odpovídat normálovým vektorům zadaných rovin. Ty snadno určíme z obecných rovnic rovin: $\vec{n_\rho} = (0, 0, 1), \vec{n_\sigma} = (0, 2, 2)$.

Odchylku rovin pak spočítáme podle vzorce (3) pro odchylku přímek (kolmic):

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|(0,0,1) \cdot (0,2,2)|}{|(0,0,1)| \cdot |(0,2,2)|} = \frac{|0+0+2|}{\sqrt{0+0+1} \cdot \sqrt{0+4+4}} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \arccos\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\alpha = \underline{\underline{45^\circ}}.$$

Příklad 7. *V chemii můžeme zjišťovat, zda u aromatických cyklů dochází k tzv. stacking interakcím, tj. matematicky je třeba posoudit, zda jsou roviny jader rovnoběžné. Vyřešme tedy podobný úkol. Rozhodněte, zda dané roviny jsou rovnoběžné, kolmé, nebo splývající.*

a) $\rho : 2x - y + 3z - 1 = 0, \sigma : 4x - 2y + 6z - 2 = 0.$

b) $\rho : x - 4y + 2z = 0, \sigma : 2x + 3y + 5z - 1 = 0.$

c) $\rho : x + 2y + 3z - 1 = 0, \sigma : 2x + 4y + 6z + 2 = 0.$

Řešení. a) Určíme normálové vektory obou rovin:

$$\vec{n_\rho} = (2, -1, 3), \vec{n_\sigma} = (4, -2, 6).$$

Vidíme, že $\vec{n_\sigma} = 2\vec{n_\rho}$, proto jsou dané roviny **rovnoběžné** (buď různé, nebo totožné).

Porovnáme-li koeficienty d v obecných rovnicích rovin, zjistíme, že $d_\sigma = 2d_\rho$ (protože $-2 = 2(-1)$). To znamená, že roviny jsou **totožné**[10] .

b) Určíme normálové vektory obou rovin:

$$\vec{n_\rho} = (1, -4, 2), \vec{n_\sigma} = (2, 3, 5).$$

[10] Pokud by koeficienty d nebyly stejným násobkem jako normálové vektory rovin, byly by roviny rovnoběžné různé.

Vidíme, že $\vec{n_\sigma} \neq k\vec{n_\rho}, k \in \mathbb{R}$, proto dané roviny nejsou rovnoběžné, což znamená, že jsou **různoběžné**.

Pokud by roviny byly kolmé, muselo by platit, že skalární součin jejich normálových vektorů je roven nule. Ověřme tedy

$$\vec{n_\rho} \cdot \vec{n_\sigma} = (1, -4, 2) \cdot (2, 3, 5) = 2 - 12 + 10 = 0.$$

To znamená, že roviny jsou **kolmé** ($\rho \perp \sigma$).

c)

$$\vec{n_\rho} = (1, 2, 3), \vec{n_\sigma} = (2, 4, 6).$$

Vidíme, že $\vec{n_\sigma} = 2\vec{n_\rho}$, proto jsou dané roviny **rovnoběžné** (buď různé, nebo totožné).

Porovnáme-li koeficienty d v obecných rovnicích rovin, zjistíme, že $d_\sigma \neq 2d_\rho$ (protože $2 \neq 2(-1)$). To znamená, že roviny jsou **rovnoběžné různé**.

3.2.3 Přímka a rovina v prostoru

Příklad 8. *Nalezněte úhel, který spolu svírají přímky p a q, je-li:*

$$p: \begin{array}{ccccccccc} x & + & y & - & z & - & 1 & = & 0 \\ 2x & + & 3y & - & z & + & 1 & = & 0 \end{array},$$

$$q: \begin{array}{ccccccccc} 3x & - & y & - & z & + & 2 & = & 0 \\ 2x & + & y & & & & & = & 0 \end{array}.$$

Řešení. Určíme směrové vektory obou přímek. Přímku p resp. q si lze představit jako průsečnici dvou rovin uvedených v obecné rovnici dané přímky. Směrový vektor přímky je kolmý k normálovým vektorům rovin z příslušné obecné rovnice. Proto jej můžeme snadno vypočítat pomocí vektorového součinu (podle (7)):

$$\vec{u_p} = (1, 1, -1) \times (2, 3, -1) = (2, -1, 1),$$

$$\vec{u_q} = (3, -1, -1) \times (2, 1, 0) = (1, -2, 5),$$

Úhel, který přímky svírají určíme podle úhlu, který svírají jejich směrové vektory, tj. podle (3):

$$\cos\alpha = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{|(2, -1, 1) \cdot (1, -2, 5)|}{|(2, -1, 1)| \cdot |(1, -2, 5)|} = \frac{|2 + 2 + 5|}{\sqrt{4 + 1 + 1} \cdot \sqrt{1 + 4 + 25}}$$

$$= \frac{9}{\sqrt{6}\sqrt{6 \cdot 5}} = \frac{9}{6\sqrt{5}} = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$\alpha = \frac{3\sqrt{5}}{10}$$

$$\alpha = \underline{\underline{47^\circ\, 52'}}.$$

3.3 Příklady k procvičení

3.3.1 Přímka v prostoru

Příklad 1. *Určete vzájemnou polohu přímek AB a CD. V případě, že jsou různoběžné, určete jejich průsečík a posuďte, zda jsou kolmé případně určete jejich odchylku. Souřadnice bodů A, B, C, D jsou:*

a) $A[5, 2, -7], B[7, 1, -6], C[1, -1, 0]$ *a* $D[3, -2, 1]$

b) $A[1, 2, -1], B[3, 0, 1], C[2, -1, 2]$ *a* $D[5, -6, 7]$

c) $A[3, 1, 1], B[1, 2, 2], C[5, 0, 0]$ *a* $D[-1, 3, 3]$

d) $A[1, 0, -1], B[2, 1, 1], C[1, 2, -2]$ *a* $D[0, -1, 2]$

Řešení. a) rovnoběžné různé

b) různoběžné, průsečík $P[-1, 4, -3], \alpha = 12^\circ\, 16'$

c) rovnoběžné totožné

d) mimoběžné

3.3.2 Rovina v prostoru

Příklad 2. *Napište obecnou rovnici roviny, která prochází bodem:*

a) $A[2, -2, 1]$ *a má směrové vektory* $\vec{u} = (-1, 1, 3)$ *a* $\vec{v} = (-2, 2, 0)$.

b) $M[4, 2, 7]$ *a je kolmá na vektor* $\vec{u} = (5, -1, 1)$.

Řešení. a) $x + y = 0$

b) $5x - y + z - 25 = 0$

Příklad 3. *Vypočítejte vzdálenost bodu:*

a) $A[3, 2, -1]$ *od roviny* $\rho : 2x - 6y + 3z - 1 = 0$.

b) $A[7, -3, 3]$ *od přímky p procházející body* $C[1, -3, -3], D[4, 3, 3]$.

Řešení. a) $\frac{10}{7}$

b) $|Ap| = 6$

Příklad 4. *Vypočtěte úhel, který svírají roviny ρ a σ, je-li* $\rho : -x+2y+z+5 = 0, \sigma : x+y+2z+7 = 0$.

Řešení. $\alpha = 60^\circ$

Příklad 5. *Rozhodněte, zda dané roviny jsou rovnoběžné, kolmé, nebo splývající.*

a) $A[3, 2, -1]$ *od roviny* $\rho : 2x - 6y + 3z - 1 = 0$.

b) $A[7, -3, 3]$ *od přímky p procházející body* $C[1, -3, -3], D[4, 3, 3]$.

Řešení. a) $\frac{10}{7}$

b) $|Ap| = 6$

Příklad 6. *Rozhodněte, zda dané roviny jsou rovnoběžné, kolmé, nebo splývající.*

a) $\rho : 2x - y + 3z - 1 = 0, \sigma : 4x - 2y + 6z - 2 = 0.$

b) $\rho : x - 4y + 2z = 0, \sigma : 2x + 3y + 5z - 1 = 0.$

c) $\rho : x + 2y + 3z - 1 = 0, \sigma : 2x + 4y + 6z + 2 = 0.$

Řešení. a) různoběžné, nejsou kolmé

b) rovnoběžné různé

c) rovnoběžné totožné

3.3.3 Přímka a rovina v prostoru

Příklad 7. *Nalezněte úhel, který spolu svírají přímky p a q, je-li:* $p : \begin{array}{ccccccc} x & + & 2y & - & z & = & 1 \\ x & - & y & & & = & 0 \end{array},$

$$q : \begin{array}{ccccccc} 3x & - & y & - & z & = & -1 \\ 3x & - & 4y & + & 2z & = & 8 \end{array}.$$

Řešení. $\alpha = 25^\circ\, 50'$

Literatura

[1] http://vydavatelstvi.vscht.cz/katalog/uid_isbn-978-80-7080-656-2/anotace/

[2] Kočandrle, M. a L. Boček - Matematika pro gymnázia: Analytická geometrie

[3] http://user.mendelu.cz/marik/am/prezentace.pdf

[4] http://maths.cz/clanky/analyticka-geometrie-skalarni-soucin.html

[5] http://www.karlin.mff.cuni.cz/katedry/kdm/diplomky/jan_koncel/index.php

[6] Hlaváček, Dolanský - Sbírka řešených příkladů z vyšší matematiky II. díl

[7] Petáková - Matematika: příprava k maturitě a k přijímacím zkouškám na vysoké školy

[8] Horák, Janyška - Analytická geometrie

[9] http://mathonline.fme.vutbr.cz/download.aspx?id_file=1118

[10] http://www.studopory.vsb.cz/studijnimaterialy/MatematikaI/18_MI_KAP