Statistické zpracování měření podle JCGM 100:2008

(„Evaluation of measurement data — Guide to the expression of uncertainty in measurement“)

Prezentace pro výukové účely

Výukový text pro F2180 a F2210

Přírodovědecká fakulta MU
Ústav fyzikální elektroniky

evropský sociální fond v ČR
EVROPSKÁ UNIE
MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY
OP Vzdělávání pro konkurenceschopnost

Co to znamená měřit?

(nejen) fyzikální veličinu

Měření:

proces experimentálního získávání jedné nebo více hodnot veličiny, které mohou být důvodně přiřazeny veličině (VIM) tzn. určování velikosti $\{x\}$ fyzikální veličiny x ve zvolené jednotce $[x]$.

Co to znamená měřit?

(nejen) fyzikální veličinu

Měření:

proces experimentálního získávání jedné nebo více hodnot veličiny, které mohou být důvodně přiřazeny veličině (VIM) tzn. určování velikosti $\{x\}$ fyzikální veličiny x ve zvolené jednotce $[x]$.

Příklad:

Měření délky kratší hrany listu papíru formátu $A4$. Přiložením pravítka získám hodnotu $l = 210\,mm$, čili $\{x\} = \{l\} = 210$, $[x] = [l] = mm$. Jednotka je důležitou součástí veličiny.

Co ovlivňuje měření?

náhodné a systematické vlivy

- Náhodné vlivy = změny ovlivňující hodnoty veličin nepředvídatelným způsobem, nelze je kompenzovat, ale při větším počtu pozorování se lze pokusit o statistický popis jejich charakteru.
- Systematické vlivy = jsou způsobeny určitými jevy, a za předpokladu dobré znalosti těchto jevů je lze odstranit korekcemi.

Co ovlivňuje měření?

konkrétněji

Vliv:

- dokonalost definice veličiny

Příklad:

Co ovlivňuje měření?
konkrétněji

Vliv:

- dokonalost definice veličiny

Příklad:

- do definice délky papíru jsme zahrnuli vliv teploty a vlhkosti, nezahrnuli jsme vliv prohnutí podložky pod papírem

Co ovlivňuje měření?

konkrétněji

Vliv:

- dokonalost definice veličiny
- konkrétní realizace veličiny

Příklad:

- do definice délky papíru jsme zahrnuli vliv teploty a vlhkosti, nezahrnuli jsme vliv prohnutí podložky pod papírem

Co ovlivňuje měření?

konkrétněji

Vliv:

- dokonalost definice veličiny
- konkrétní realizace veličiny

Příklad:

- do definice délky papíru jsme zahrnuli vliv teploty a vlhkosti, nezahrnuli jsme vliv prohnutí podložky pod papírem
- nastavení řezačky v papírnách

Co ovlivňuje měření?
konkrétněji

Vliv:

- dokonalost definice veličiny
- konkrétní realizace veličiny
- reprezentativnost vzorků

Příklad:

- do definice délky papíru jsme zahrnuli vliv teploty a vlhkosti, nezahrnuli jsme vliv prohnutí podložky pod papírem
- nastavení řezačky v papírnách

Co ovlivňuje měření?

konkrétněji

Vliv:

- dokonalost definice veličiny
- konkrétní realizace veličiny
- reprezentativnost vzorků

Příklad:

- do definice délky papíru jsme zahrnuli vliv teploty a vlhkosti, nezahrnuli jsme vliv prohnutí podložky pod papírem
- nastavení řezačky v papírnách
- jaké je rozložení délek v souboru papírů, z nichž si vybíráme jeden k měření?

Co ovlivňuje měření?
konkrétněji

Vliv:

- nedostatečná znalost vlivu prostředí

Příklad:

Co ovlivňuje měření?

konkrétněji

Vliv:

- nedostatečná znalost vlivu prostředí

Příklad:

- jak ovlivňuje vlhkost papír?

Co ovlivňuje měření?
konkrétněji

Vliv:

- nedostatečná znalost vlivu prostředí
- subjektivní vliv experimentátora

Příklad:

- jak ovlivňuje vlhkost papír?

Co ovlivňuje měření?

konkrétněji

Vliv:

- nedostatečná znalost vlivu prostředí
- subjektivní vliv experimentátora

Příklad:

- jak ovlivňuje vlhkost papír?
- je hrana papíru blíže levé nebo pravé čárce na měřidlu?

Co ovlivňuje měření?

konkrétněji

Vliv:

- nedostatečná znalost vlivu prostředí
- subjektivní vliv experimentátora
- rozlišení přístrojů

Příklad:

- jak ovlivňuje vlhkost papír?
- je hrana papíru blíže levé nebo pravé čárce na měřidlu?

Co ovlivňuje měření?
konkrétněji

Vliv:

- nedostatečná znalost vlivu prostředí
- subjektivní vliv experimentátora
- rozlišení přístrojů

Příklad:

- jak ovlivňuje vlhkost papír?
- je hrana papíru blíže levé nebo pravé čárce na měřidlu?
- pravítko má nejmenší velikost dílku na stupnici milimetr

Co ovlivňuje měření?

konkrétněji

Vliv:

- zkorigovanost přístroje s referenčním etalonem, přesnost hodnot použitých konstant

Příklad:

Co ovlivňuje měření?
konkrétněji

Vliv:

- zkorigovanost přístroje s referenčním etalonem, přesnost hodnot použitých konstant

Příklad:

- ukazuje vlhkoměr stejnou hodnotu jako referenční etalon (např. psychrometrický vlhkoměr Ahlborn)?

Co ovlivňuje měření?
konkrétněji

Vliv:

- zkorigovanost přístroje s referenčním etalonem, přesnost hodnot použitých konstant
- zjednodušení a předpoklady při měřeních a výpočtech

Příklad:

- ukazuje vlhkoměr stejnou hodnotu jako referenční etalon (např. psychrometrický vlhkoměr Ahlborn)?

Co ovlivňuje měření?
konkrétněji

Vliv:

- zkorigovanost přístroje s referenčním etalonem, přesnost hodnot použitých konstant
- zjednodušení a předpoklady při měřeních a výpočtech

Příklad:

- ukazuje vlhkoměr stejnou hodnotu jako referenční etalon (např. psychrometrický vlhkoměr Ahlborn)?
- zanedbání vyšších řádů ve vzorcích, zanedbání prohnutí podložky pod papírem

Co ovlivňuje měření?
konkrétněji

Vliv:

- zkorigovanost přístroje s referenčním etalonem, přesnost hodnot použitých konstant
- zjednodušení a předpoklady při měřeních a výpočtech
- variace náhodně měřené veličiny

Příklad:

- ukazuje vlhkoměr stejnou hodnotu jako referenční etalon (např. psychrometrický vlhkoměr Ahlborn)?
- zanedbání vyšších řádů ve vzorcích, zanedbání prohnutí podložky pod papírem

Co ovlivňuje měření?
konkrétněji

Vliv:

- zkorigovanost přístroje s referenčním etalonem, přesnost hodnot použitých konstant
- zjednodušení a předpoklady při měřeních a výpočtech
- variace náhodně měřené veličiny

Příklad:

- ukazuje vlhkoměr stejnou hodnotu jako referenční etalon (např. psychrometrický vlhkoměr Ahlborn)?
- zanedbání vyšších řádů ve vzorcích, zanedbání prohnutí podložky pod papírem
- vlivem změn teploty, vlhkosti, ... v čase

Co je výsledkem měření?
(definice podle VIM)

to, co bychom rádi znali, je

Pravá hodnota

hodnota veličiny, která je ve shodě s definicí veličiny (veličina = vlastnost jevu, tělesa nebo látky, která má velikost, jež může být vyjádřena jako číslo a jednotka)

k dispozici však máme pouze naměřenou hodnotu veličiny:

naměřená hodnota veličiny

hodnota veličiny reprezentující výsledek měření (= soubor hodnot veličiny přiřazený měřené veličině společně s jakoukoliv další dostupnou relevantní informací)

Je naměřená hodnota veličiny totožná s pravou hodnotou veličiny?

filozofické přístupy k teorii měření

- Pravá hodnota veličiny je považována za jedinečnou a v praxi nepoznatelnou (dříve používaný chybový přístup).
- Následkem ve své podstatě neúplného množství podrobností v definici veličiny neexistuje jediná pravá hodnota veličiny, ale spíše soubor pravých hodnot veličin ve shodě s definicí. Tento je bohužel z principu a v praxi nepoznatelný. (nyní používaný nejistotový přístup)
- Další přístupy vesměs obcházejí pojem pravá hodnota veličiny a při určování jejich platnosti se opírají o pojem metrologická slučitelnost výsledků měření pro zhodnocování jejich validity („= je to v rámci chyby"“)

Chyba měření kontra nejistota měření
(definice v souladu s GUM a VIM)

chyba měření

naměřená hodnota veličiny minus referenční hodnota veličiny (referenční hodnota veličiny = hodnota veličiny používaná jako základ pro porovnávání s hodnotami veličin stejného druhu)

nejistota měření:

parametr přidružený k výsledku měření, který charakterizuje rozptýlení hodnot, jež by mohly být důvodně přisuzovány k měřené veličině

Příklad:

velikost kratší hrany listu papíru formátu A4: podle mezinárodního standardu ISO 216 (DIN 476) je rovna $l = 210\,\mathrm{mm}$ (konvenční hodnota veličiny). Je-li naměřená hodnota rovna $l_n = 209\,\mathrm{mm}$, je chyba $\delta = l_n - l = 1\,\mathrm{mm}$.
Pokud bychom měřili kus papíru náhodně ustřižený z formátu A4, tedy bychom neznali pravou hodnotu délky, je chyba z důvodu neznalosti pravé hodnoty měřené veličiny neurčitelná.
Nejistota je naopak určitelná, udává rozmezí (kolem odhadu pravé hodnoty), ve kterém leží měřená délka s pravděpodobností P a stupněm volnosti ν.

Chyby měření

Systematická chyba měření

systematická chyba měření

složka chyby měření, která v opakovaných měřeních zůstává konstantní nebo se mění předvídatelným způsobem
(hodnota odhadu systematické chyby měření se nazývá vychýlení měření (bias))

Poznámky:

- Referenční hodnotou veličiny pro systematickou chybu měření je pravá hodnota veličiny nebo naměřená hodnota veličiny etalonu (standardu) se zanedbatelnou nejistotou měření, nebo konvenční hodnota veličiny.
- Systematická chyba měření a její příčiny mohou být známé nebo neznámé. Ke kompenzaci známé systematické chyby měření může být aplikována korekce.
- Systematická chyba měření se rovná chybě měření minus náhodná chyba měření.

Chyby měření

Náhodná chyba měření

Náhodná chyba měření

složka chyby měření, která se v opakovaných měřeních mění nepředvídatelným způsobem

Poznámky:

- Referenční hodnotou veličiny pro náhodnou chybu měření je aritmetický průměr, který by se získal z nekonečného počtu opakovaných měření téže měřené veličiny.
- Náhodné chyby měření souboru opakovaných měření vytvářejí rozdělení, které může být celkově popsáno očekávanou střední hodnotou, o níž se obecně předpokládá, že je nulová, a jeho rozptylem.
- Náhodná chyba měření se rovná chybě měření minus systematická chyba měření.

Co tedy uvést jako výsledek měření?

pragmatická otázka

- Potřebuji odhad pravé hodnoty a nejistotu měření.
- Pokud je rozpětí pravých hodnot veličiny zamýšlených k reprezentaci měřené veličiny malé ve srovnání s nejistotou měření, naměřená hodnota veličiny může být považována za odhad v podstatě jedinečné pravé hodnoty veličiny a je často aritmetickým průměrem nebo mediánem jednotlivých naměřených hodnot veličiny získaných opakovanými měřeními. (VIM)
- Nejistotou bývá často například směrodatná odchylka měření (Gaussovo rozdělení s hladinou spolehlivosti 68,3%), případně doplněná o statistické vyhodnocení vlivu měřicího přístroje. (Podrobnosti v dalších kapitolách.)

Použitelnost následujících postupů:

měření v čase ustálených hodnot veličin

Následující postupy jsou použitelné pro zpracování měření veličin, jejichž hodnoty jsou v čase ustálené, například délek, objemů, hmotností, velikosti stejnosměrného proudu či napětí (nebo velikosti efektivních hodnot veličin pro střídavý proud ....) a u nichž se nevyžaduje jako výsledek měření graf.

Odhad pravé hodnoty veličiny pro přímá měření

v čase ustálených hodnot veličin, dávají-li stále stejnou hodnotu

V takovémto případě stačí měřit pouze jednou.

Naměřená hodnota x

je přímo odhadem pravé hodnoty veličiny.

Příklady:

- Délka kratší hrany listu papíru A4 měřená školním pravítkem
- Hodnota proudu měřená analogovým ampérmetrem
- Hodnota napětí na monočlánku měřená digitálním voltmetrem
- všechna elektrická měření
- všechna měření, která dávají neustále stejné hodnoty

Odhad pravé hodnoty veličiny pro opakovaná přímá měření

Možné, ale málokdy užívané odhady pravé hodnoty veličiny

Modus

Nejčastěji se vyskytující hodnota v souboru naměřených hodnot

Odhad pravé hodnoty veličiny pro opakovaná přímá měření

Možné, ale málokdy užívané odhady pravé hodnoty veličiny

Modus

Nejčastěji se vyskytující hodnota v souboru naměřených hodnot

Příklad:

modus souboru „jehla, nit, náprstek, jehelníček, jehla, špendlík, nit, nit, nůžky“ je

Odhad pravé hodnoty veličiny pro opakovaná přímá měření

Možné, ale málokdy užívané odhady pravé hodnoty veličiny

Modus

Nejčastěji se vyskytující hodnota v souboru naměřených hodnot

Příklad:

modus souboru „jehla, nit, náprstek, jehelníček, jehla, špendlík, nit, nit, nůžky“ je „nit“

Odhad pravé hodnoty veličiny pro opakovaná přímá měření

Možné, ale málokdy užívané odhady pravé hodnoty veličiny

Modus

Nejčastěji se vyskytující hodnota v souboru naměřených hodnot

Příklad:

modus souboru „jehla, nit, náprstek, jehelníček, jehla, špendlík, nit, nit, nůžky" je „nit"

Medián

Hodnota, jež dělí řadu podle velikosti seřazených výsledků na dvě stejně početné poloviny. Je-li počet hodnot sudý, je mediánem průměr dvou hodnot ve středu řady.

Odhad pravé hodnoty veličiny pro opakovaná přímá měření

Možné, ale málokdy užívané odhady pravé hodnoty veličiny

Modus

Nejčastěji se vyskytující hodnota v souboru naměřených hodnot

Příklad:

modus souboru „jehla, nit, náprstek, jehelníček, jehla, špendlík, nit, nit, nůžky“ je „nit“

Medián

Hodnota, jež dělí řadu podle velikosti seřazených výsledků na dvě stejně početné poloviny. Je-li počet hodnot sudý, je mediánem průměr dvou hodnot ve středu řady.

Příklad:

medián souboru známek z fyziky „1;1;1;1;1;2;2;3;4“ je

Odhad pravé hodnoty veličiny pro opakovaná přímá měření

Možné, ale málokdy užívané odhady pravé hodnoty veličiny

Modus

Nejčastěji se vyskytující hodnota v souboru naměřených hodnot

Příklad:

modus souboru „jehla, nit, náprstek, jehelníček, jehla, špendlík, nit, nit, nůžky“ je „nit“

Medián

Hodnota, jež dělí řadu podle velikosti seřazených výsledků na dvě stejně početné poloviny. Je-li počet hodnot sudý, je mediánem průměr dvou hodnot ve středu řady.

Příklad:

medián souboru známek z fyziky „1;1;1;1;1;2;2;3;4“ je„1“,

Odhad pravé hodnoty veličiny pro opakovaná přímá měření

Možné, ale málokdy užívané odhady pravé hodnoty veličiny

Modus

Nejčastěji se vyskytující hodnota v souboru naměřených hodnot

Příklad:

modus souboru „jehla, nit, náprstek, jehelníček, jehla, špendlík, nit, nit, nůžky“ je „nit“

Medián

Hodnota, jež dělí řadu podle velikosti seřazených výsledků na dvě stejně početné poloviny. Je-li počet hodnot sudý, je mediánem průměr dvou hodnot ve středu řady.

Příklad:

medián souboru známek z fyziky „1;1;1;1;1;2;2;3;4“ je„1“, medián souboru známek z tělocviku „1;2;2;2;2;3;3;3;4;5“ je

Odhad pravé hodnoty veličiny pro opakovaná přímá měření

Možné, ale málokdy užívané odhady pravé hodnoty veličiny

Modus

Nejčastěji se vyskytující hodnota v souboru naměřených hodnot

Příklad:

modus souboru „jehla, nit, náprstek, jehelníček, jehla, špendlík, nit, nit, nůžky“ je „nit“

Medián

Hodnota, jež dělí řadu podle velikosti seřazených výsledků na dvě stejně početné poloviny. Je-li počet hodnot sudý, je mediánem průměr dvou hodnot ve středu řady.

Příklad:

medián souboru známek z fyziky „1;1;1;1;1;2;2;3;4“ je„1“, medián souboru známek z tělocviku „1;2;2;2;2;3;3;3;4;5“ je „2,5“.

Odhad pravé hodnoty veličiny pro opakovaná přímá měření

aritmetický průměr naměřených hodnoty $x_1, x_2, \ldots x_n$

Jako odhad pravé hodnoty veličiny použijeme aritmetický průměr n naměřených veličin:

Aritmetický průměr $\bar{x}$

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

Příklad:

Délka kratší hrany listu papíru A4 měřená posuvným měřítkem:

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
x_i[mm]	209.8	209.6	210.1	209.7	210.1	210.2	209.7	210.3	209.9	209.8

$n = 10$ $\bar{x} = 209,92\,\mathrm{mm} = 209,9\,\mathrm{mm}$

Složky nejistoty měření typu A (B)

Přesněji: složky nejistot, které jsou hodnoceny nebo vyhodnocovány postupem A (B)

Složky nejistoty vyhodnocované postupem A pokrývají jak náhodné chyby, tak i odchylky (systematické chyby). Postup vyhodnocení A je založen na statistické analýze dat. Základní je to, že vliv náhodných chyb nemůže být nikdy korigován, zatímco vliv odchylek (systematických chyb) korigován být může. Přístup v GUM vychází z toho, že veškeré odchylky (systematické chyby) mohou být korigovány a že jedinou složkou nejistoty odvozenou od těchto odchylek (systematických chyb) je tedy nejistota spojená s výše zmíněnou korekcí.
U nejistot vyhodnocovaných postupem A se předpokládá vždy normální rozdělení.

Složky nejistot vyhodnocované způsobem B jsou ty složky nejistot, které vznikají v důsledku náhodných chyb nebo odchylek, o kterých nejsme schopni získat přímé informace na základě místní realizace daného měření nebo které vznikají na základě náhodných chyb a odchylek v rámci jiných procesů měření, které ovšem mají s daným procesem měření nějakou souvislost (klasickým takovým případem je např. nejistota v důsledku kalibrace používaného měřidla).
Směrodatná odchylka nejistoty vyhodnocované způsobem B je pak počítána zpravidla na základě fyzikálně zdůvodněného rovnoměrného (trojúhelníkového, lichoběžníkového nebo normálního) **rozdělení.**

Vyhodnocení nejistot měření postupem A

Postup získání standardní nejistoty (n naměřených hodnot)

Mějme n naměřených hodnot, určeme z nich aritmetický průměr a poté směrodatnou odchylku aritmetického průměru $\bar{x}$, která je standardní nejistotou typu A:

Směrodatná odchylka výběrového průměru $\bar{x}$

$$u_A(x) = s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}}$$

Takto určená směrodatná odchylka odpovídá intervalu pokrytí pro hladinu pravděpodobnosti 68.27%.

Vyhodnocení nejistot měření postupem A

Postup získání standardní nejistoty (*n* naměřených hodnot)

Příklad:

Délka kratší hrany listu papíru A4 měřená posuvným měřítkem:

i	x_i [mm]	$(x_i - \bar{x})$ [mm]	$(x_i - \bar{x})^2$ [mm^2]
1	209.8	-0.1	0.01
2	209.6	-0.3	0.09
3	210.1	0.2	0.04
4	209.7	-0.2	0.04
5	210.1	0.2	0.04
6	210.2	0.3	0.09
7	209.7	-0.2	0.04
8	210.3	0.4	0.16
9	209.9	0.0	0.00
10	209.8	-0.1	0.01

$n = 10 \quad \bar{x} = 209{,}9\,\mathrm{mm} \quad \sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x}) = 0{,}2\,\mathrm{mm} \quad \sum_{i=1}^{10}(x_i - \bar{x})^2 = 0{,}52\,\mathrm{mm}^2$

nejistotu zaokrouhlujeme na jednu, nejvýše dvě platné číslice

$$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}{n(n-1)}} = 0{,}08\,\mathrm{mm}$$

výsledek je tvaru
$x = (209{,}9 \pm 0{,}1)\,\mathrm{mm} \quad (\mathrm{P} = 0{,}6827)$

„Odstranění hrubých chyb“

Algoritmus pro vyřazení hodnot „vybočujících z řady“

1. Určete aritmetický průměr $\bar{x}$ a směrodatnou odchylku aritmetického průměru $s(\bar{x})$.
2. Určete směrodatnou odchylku výběrového souboru podle vztahu
$$s(x) = \sqrt{n}.s(\bar{x}).$$
3. Určete hraniční body intervalu $\langle \bar{x} - 3s(x), \bar{x} + 3s(x) \rangle$ a vyškrtejte ty naměřené hodnoty, které leží **vně** tohoto intervalu.
4. postup opakujte tak dlouho, dokud všechny veličiny neleží uvnitř uvedeného intervalu

Tento postup eliminuje ze souboru naměřených hodnot ty hodnoty, které leží s pravděpodobností 99,73% vně širokého intervalu pokrytí, jsou tedy velmi vzdáleny od odhadu pravé hodnoty veličiny dané aritmetickým průměrem naměřených hodnot. Naměřit tyto hodnoty není tedy sice nemožné, ale krajně nepravděpodobné. (Ve starší interpretaci byly tyto hodnoty nazvány hrubými chybami měření a meze intervalu krajní chybou měření (jedné hodnoty, výběrového souboru).)

„Odstranění hrubých chyb“

Algoritmus pro vyřazení hodnot „vybočujících z řady“

Příklad:

Délka kratší hrany listu papíru A4 měřená posuvným měřítkem:

První hledání hrubé chyby

i	x_i [mm]	$(x_i - \bar{x})$ [mm]	$(x_i - \bar{x})^2$ [mm^2]
1	209.8	0.2	0.04
2	209.6	0.0	0.00
3	210.1	0.5	0.25
4	206.7	-2.9	8.41
5	210.1	0.5	0.25
6	210.2	0.6	0.36
7	209.7	0.1	0.01
8	210.3	0.7	0.49
9	209.9	0.3	0.09
10	209.8	0.2	0.04

$n = 10 \quad \bar{x} = 209,6\,\mathrm{mm} \quad \sum_{i=1}^{10} \ldots = 0,2\,\mathrm{mm} \quad \sum_{i=1}^{10} \ldots = 9.94\,\mathrm{mm}^2$

$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} = 0,3\,\mathrm{mm} \quad s(x) = \sqrt{n}s(\bar{x}) = 0,6\,\mathrm{mm}$

v intervalu $\langle \bar{x} - 3s(x), \bar{x} + 3s(x)\rangle = \langle 207.8, 211.4\rangle\,\mathrm{mm}$
neleží hodnota číslo 4, tuto škrtneme

Druhé hledání hrubé chyby

i	x_i [mm]	$(x_i - \bar{x})$ [mm]	$(x_i - \bar{x})^2$ [mm^2]
1	209.8	-0.1	0.01
2	209.6	-0.3	0.09
3	210.1	0.2	0.04
5	210.1	0.2	0.04
6	210.2	0.3	0.09
7	209.7	-0.2	0.04
8	210.3	0.4	0.16
9	209.9	0.0	0.00
10	209.8	-0.1	0.01

$n = 9 \quad \bar{x} = 209,9\,\mathrm{mm} \quad \sum_{i=1}^{10} \ldots = 0,4\,\mathrm{mm} \quad \sum_{i=1}^{10} \ldots = 0,48\,\mathrm{mm}^2$

$s(\bar{x}) = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2}{n(n-1)}} = 0,08\,\mathrm{mm} \quad s(x) = \sqrt{n}s(\bar{x}) = 0,24\,\mathrm{mm}$

v intervalu $\langle \bar{x} - 3s(x), \bar{x} + 3s(x)\rangle = \langle 209.2, 210.6\rangle\,\mathrm{mm}$
leží všechny hodnoty,
výsledek je $x = (209,9 \pm 0,1)\,\mathrm{mm}\ (\mathrm{P} = 0,6827)$

Vyhodnocení nejistot měření postupem B

Na co aplikovat tento postup?

Neobvyklejšími zdroji nejistot, které jsou vyhodnocovány přístupem B – tedy metodami hodnocení nejistot jinými, než je statistická analýza řady měření, jsou:

1. měřidla a etalony kalibrované v jiných laboratořích,
2. fyzikální konstanty používané při výpočtu výsledné uváděné hodnoty,
3. vlivy prostředí, které nemohou být statisticky vyšetřeny,
4. možné odlišnosti v uspořádání měřidel a realizaci měřicího procesu,
5. nedostatek rozlišovací schopnosti měřidla.

Vyhodnocení nejistot měření postupem B

Jak konkrétně postupovat?

1. Zpracováváme jednotlivé zdroje nejistoty, jichž je m, $m \geq 1$.
2. Je-li známa maximální odchylka j-tého zdroje nejistoty z_{jmax}, určí se příslušná nejistota jako

Nejistota příslušná j-tému zdroji nejistoty

$$u_{Bj}(x) = \frac{z_{jmax}}{k},$$

kde $k = \sqrt{3}$ pro rovnoměrné rozdělení, $k = 3$ pro normální rozdělení ...

Vyhodnocení nejistot měření postupem B

Jak konkrétně postupovat?

3. všechny nejistoty spojíme ve výslednou nejistotu

Výsledná standardní nejistota typu B

$$u_B(x) = \sqrt{\sum_{j=1}^{m} A_j^2 u_{Bj}^2(x)},$$

kde $u_{Bj}(x)$ jsou jednotlivé nejistoty příslušné jednotlivým zdrojům nejistot a A_j jsou jejich součinitelé citlivosti (odhaduje si je statistik sám).

Takto vytvořená nejistota má charakter standardní odchylky a lze ji sloučit s nejistotou typu A do výsledné kombinované nejistoty.

Vyhodnocení nejistot měření postupem B

Jak konkrétně postupovat?

Příklad:

Délka kratší hrany listu papíru A4 měřená posuvným měřítkem:
Zdroje nejistoty:

1. nejistota spojená s rozlišovací schopností měřidla: maximální odchylka prvního zdroje nejistoty z_{1max} je dána velikostí jednoho dílku $z_{1max} = 0.1\,\mathrm{mm}$, za předpokladu rovnoměrného rozdělení je tato nejistota $u_{B1}(l) = \frac{z_{1max}}{\sqrt{3}} = 0.06\,\mathrm{mm}$
2. celková osobní chyba obsluhy (čtení ze stupnice, stisk, další vlivy) je odhadnuta na $\delta = 0.075\,\mathrm{mm}$, za předpokladu rovnoměrného rozdělení je nejistota spojená s obsluhou $u_{B2}(l) = \frac{\delta}{\sqrt{3}} = 0.04\,\mathrm{mm}$
3. předpokládáme stejné součinitele citlivosti $A_1 = A_2 = 1$

Pro výslednou standardní nejistotu typu B dostaneme:

$$u_B(l) = \sqrt{\sum_{j=1}^{2} A_j^2 u_{Bj}^2(l)} = \sqrt{0.06^2 + 0.04^2}\,\mathrm{mm} = 0.07\,\mathrm{mm},$$

Kombinované nejistoty

Spojení nejistot typu A a B

Kombinovaná nejistota

$$u_C(x) = \sqrt{u_A^2(x) + u_B^2(x)},$$

kde $u_A(x)$ je standardní nejistota typu A a $u_B(x)$ je standardní nejistota typu B.

Takto vytvořená nejistota je standardní, pravá hodnota leží v intervalu pokrytí $\langle \bar{x} - u_C(x), \bar{x} + u_C(x) \rangle$ s pravděpodobností 68,27%.

Kombinované nejistoty

Spojení nejistot typu A a B

Příklad:

Délka kratší hrany listu papíru A4 měřená posuvným měřítkem:

- Standardní nejistota typu A byla určena z devíti měření (po „odstranění hrubých chyb“ jako směrodatná odchylka aritmetického průměru (viz příklad 4)
- Standardní nejistota typu B byla určena započtením nejistoty spojené s rozlišovací schopností měřidla a celkové osobní chyby obsluhy (viz příklad 4)

Pro výslednou standardní kombinovanou nejistotu dostaneme:

$$u_C(l) = \sqrt{u_A(l)^2 + u_B(l)^2} = \sqrt{0,08^2 + 0,07^2}\,\mathrm{mm} = 0,11\,\mathrm{mm}$$

Rozšířené nejistoty

Rozšíření intervalu pokrytí na zvolenou hladinu spolehlivosti

Rozšířená nejistota

$$U_C(x) = k_r u_C(x),$$

kde $u_C(x)$ je standardní kombinovaná nejistota a k_r je koeficient rozšíření.

Pro rozšířené nejistoty používáme jako koeficienty rozšíření koeficienty pro Gaussovo rozdělení, takže

$k_r = 1{,}960$ pro P=0,95

$k_r = 3$ pro P=0,9973 (krajní nejistota)

Rozšířené nejistoty

Rozšíření intervalu pokrytí na zvolenou hladinu spolehlivosti

Příklad:

Délka kratší hrany listu papíru A4 měřená posuvným měřítkem: Výsledná standardní kombinovaná nejistota je rovna $u_C(l) = 0,11\,\mathrm{mm}$, tato hodnota je určena pro hodnotu spolehlivosti $P = 0.6827$.
Tuto nejistotu lze rozšířit pro zvolené hladiny spolehlivosti vynásobením koeficientem rozšíření:

$k_r = 1{,}960$ pro P=0,95: $U_C(l) = 1,960 \cdot 0,11\,\mathrm{mm} = 0,2156\,\mathrm{mm}$

$k_r = 3$ pro P=0,9973 : $U_C(l) = 3 \cdot 0,11\,\mathrm{mm} = 0,33\,\mathrm{mm}$. (krajní nejistota)

Stručný zápis výsledku měření

Udává se i hladina spolehlivosti

Zápis výsledku:

$$x = (\bar{x} \pm U_C(x))\,\mathrm{j} \quad (\mathrm{P} = \ldots)$$

Výsledek se zaokrouhlí na jednu, nejvýše dvě platné číslice rozšířené nejistoty měření, odhad pravé hodnoty naměřené veličiny se zaokrouhlí na stejným způsobem jako nejistota měření.

Všechny příklady odpovídají měření délky kratší hrany listu papíru A4 posuvným měřítkem:

Příklad:

$$l = (209,9 \pm 0,1)\,\mathrm{mm} \quad (\mathrm{P} = 0,6827)$$
$$l = (209,9 \pm 0,2)\,\mathrm{mm} \quad (\mathrm{P} = 0,95)$$
$$l = (209,9 \pm 0,3)\,\mathrm{mm} \quad (\mathrm{P} = 0,9973)$$

Podrobný zápis výsledku měření

Bilanční tabulka pro přímo měřenou veličinu

Obecná podoba bilanční tabulky pro přímo měřenou veličinu

veličina X;X	odhad x;x	standardní nejistota $u_q(x)$	typ rozdělení	koeficient citlivosti A_q	příspěvek ke standardní nejistotě $A_q u_q(x)$; standardní nejistota $u(x) = \sqrt{\sum_{q=1}^{m} A_q^2 u_q^2(x)}$
X	x	$u_1(x)$	podle situace	A_1	$A_1 u_1(x)$
		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
		$u_q(x)$		A_q	$A_q u_q(x)$
		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
		$u_m(x)$		A_m	$A_m u_m(x)$
X	x	–		–	$u(x)$

Podrobný zápis výsledku měření

Bilanční tabulka

Příklad bilanční tabulky – délka kratší hrany papíru formátu A4

veličina $X;l$	odhad $x;l[mm]$	standardní nejistota $u_q(l)$	typ rozdělení	koeficient citlivosti A_q	příspěvek ke standardní nejistotě $u_q(l)$; standardní nejistota $u(l)$ [mm]
$\bar{d}$	209,92	0,08	normální	1	0,08
měřidlo	$\pm 0,00$	0,06	rovnoměrné	1	0,06
obsluha	$\pm 0,00$	0,04	rovnoměrné	1	0,04
d	209,92	–	–	–	0,11

Závislost nepřímo měřené veličiny na přímo měřených veličinách

Odhad hodnoty veličiny

Odhad hodnoty nepřímo měřené veličiny

Nechť nepřímo měřená veličina y závisí na přímo měřených veličinách $x_1, x_2, \ldots, x_p$, $p \geq 1$

$$y = f(x_1, x_2, \ldots, x_p).$$

Pak odhad hodnoty nepřímo měřené veličiny určíme jako

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p),$$

kde $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p$ jsou odhady přímo měřených veličin.

Závislost nepřímo měřené veličiny na přímo měřených veličinách

Odhad hodnoty veličiny

Příklad:

Plocha listu papíru určená z velikosti hran, které byly určeny posuvným měřítkem:

$$y = f(x_1, x_2) \Rightarrow S = l_1 \cdot l_2 \quad p = 2.$$

Odhady jednotlivých rozměrů jsou $\bar{l}_1 = 209{,}9\,\mathrm{mm}$ (viz předchozí příklady) a $\bar{l}_2 = 297{,}0\,\mathrm{mm}$. Pak odhad hodnoty nepřímo měřené veličiny určíme jako

$$\bar{y} = f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_p) \Rightarrow \bar{S} = \bar{l}_1 \cdot \bar{l}_2.$$

Číselně:

$$\bar{S} = 209{,}9\,\mathrm{mm} \cdot 297{,}0\,\mathrm{mm} = 62340{,}3\,\mathrm{mm}^2.$$

Zákon šíření nejistoty

Určení nejistoty nepřímo měřené veličiny

Zákon šíření nejistoty

Nechť nepřímo měřená veličina y závisí na přímo měřených veličinách $x_1, x_2, \dots, x_p$, $p \geq 1$

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_p).$$

Nechť tyto veličiny mají standardní kombinované nejistoty $u_C(x_1), u_C(x_2), \dots, u_C(x_p)$. Pak nejistota nepřímo měřené veličiny lze určit jako

$$u_C(y) = \sqrt{\sum_{k=1}^{p} \left(\frac{\partial f}{\partial x_k}\right)^2_{[x_1=\bar{x}_1, x_2=\bar{x}_2, \dots, x_p=\bar{x}_p]} u_C^2(x_k)},$$

kde $\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_p$ jsou odhady přímo měřených veličin. (Derivace funkce f podle zvolené proměnné x_k jsou parciální, čili při tomto derivování považujeme ostatní proměnné $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_p$ za konstanty.)

Zákon šíření nejistoty
Určení nejistoty nepřímo měřené veličiny

Příklad

Plocha listu papíru určená z velikosti hran, které byly určeny posuvným měřítkem:
$y = f(x_1, x_2) \Rightarrow S = l_1 \cdot l_2 \quad p = 2.$
Odhady jednotlivých rozměrů jsou $\overline{l}_1 = 209{,}9\,\mathrm{mm}$ (viz předchozí příklady)
a $\overline{l}_2 = 297{,}0\,\mathrm{mm}$, nejistoty jsou $u_C(l_1) = 0{,}1\,\mathrm{mm}$ (viz předchozí příklady)
a $u_C(l_2) = 0{,}2\,\mathrm{mm}$,
Pak nejistota nepřímo měřené veličiny lze určit jako

$$u_C(S) = \sqrt{\left(\frac{\partial S}{\partial l_1}\right)^2_{[l_1=\overline{l}_1, l_2=\overline{l}_2]} u_C^2(l_1) + \left(\frac{\partial S}{\partial l_2}\right)^2_{[l_1=\overline{l}_1, l_2=\overline{l}_2]} u_C^2(l_2)} = \sqrt{\overline{l}_2^2 u_C^2(l_1) + \overline{l}_1^2 u_C^2(l_2)}$$

číselně

$$u_C(S) = \sqrt{297{,}0^2 \cdot 0{,}1^2 + 209{,}9^2 \cdot 0{,}2^2}\,\mathrm{mm}^2 = 51{,}4\,\mathrm{mm}^2.$$

Všechny následující vztahy byly odvozeny výpočtem podle zákona šíření nejistot. Jejich výsledný tvar je tak jednoduchý, že je výhodné si ho zapamatovat a používat při zpracování konkrétních měření.

Nejistota pro nepřímo měřenou veličinu $y = x_2 \pm x_1$

kde x_1, x_2 jsou přímo měřené veličiny

Nejistota rozdílu a součtu přímo měřených veličin

Ze zákona šíření chyb vyplyne

$$u_c(y) = \sqrt{u_c^2(x_1) + u_c^2(x_2)},$$

kde $u_c(x_1)$, $u_c(x_2)$, jsou standardní kombinované nejistoty přímo měřených veličin x_1, x_2.

Příklad: určení nejistoty vzdálenosti ze dvou naměřených poloh

Určení vzdálenosti konce svislé trubice od kapiláry v Mariottově láhvi ze dvou naměřených poloh: konec svislé trubice $d_2 = (153,2 \pm 0,2)\,\mathrm{mm}$, poloha středu kapiláry $d_1 = (91,8 \pm 0,4)\,\mathrm{mm}$, výsledný odhad vzdálenosti $\bar{d} = \bar{d}_2 - \bar{d}_1 = 61,4\,\mathrm{mm}$, standardní nejistota $u_c(d) = \sqrt{u_c^2(d_2) + u_c^2(d_1)} = \sqrt{0,2^2 + 0,1^2}\,\mathrm{mm} = 0,2\,\mathrm{mm}$.

Nejistota pro nepřímo měřenou veličinu $y = A \cdot x$

kde A je konstanta a x je přímo měřená veličina

Nejistota konstantního násobku přímo měřené veličiny

Ze zákona šíření chyb vyplyne

$$u_C(y) = A \cdot u_C(x),$$

kde $u_c(x)$ je standardní kombinovaná nejistota přímo měřené veličiny x. Zavedeme-li relativní (standardní) nejistotu jako podíl (standardní) nejistoty a odhadu měřené veličiny:

$$r_{(c)}(x) = \frac{u_{(C)}(x)}{\bar{x}},$$

pak z předchozího vztahu plyne, že relativní nejistota určení veličiny y je stejná jako relativní nejistota určení veličiny x.

Nejistota pro nepřímo měřenou veličinu $y = A \cdot x$

kde A je konstanta a x je přímo měřená veličina

Příklad: měření teploty pomocí termočlánku a voltmetru

Při připojení dvojitého termočlánku k voltmetru platí pro termoelektrické napětí:

$$U = \beta(t_1 - t_2),$$

kde β je Seebekův koeficient. Pokud je jeden konec termočlánku typu K ($\beta = 42\,\frac{\mu\mathrm{V}}{^\circ\mathrm{C}}$) ponořen do směsi ledu a vody ($t_2 = 0\,^\circ\mathrm{C}$ přesně) a naměříme-li na koncích termočlánku napětí $U = (3,45 \pm 0,06)\,\mathrm{mV}$, je teplota prostředí, v němž se nachází druhý konec termočlánku, $t_1 = \frac{1}{\beta}U$.
Odhad hodnoty teploty je $\bar{t}_1 = \frac{1}{42.10^{-6}} 3,45.10^{-3}\,^\circ\mathrm{C} = 82,14\,^\circ\mathrm{C}$, relativní nejistoty napětí i teploty jsou $r_C(t_1) = r_C(U) = \frac{0,06}{3,45} = 0,017$, odkud absolutní nejistota měření teploty je $u_c(t_1) = r_c(t_1)\bar{t}_1 = 0,017 \cdot 82,14\,^\circ\mathrm{C} = 1,43\,^\circ\mathrm{C}$.
Výsledek je tvaru

$$t_1 = (82 \pm 1)\,^\circ\mathrm{C}$$

Nejistota pro nepřímo měřenou veličinu $y = x_1 \cdot x_2$, $y = \frac{x_1}{x_2}$

kde x_1, x_2 jsou přímo měřené veličiny

Nejistota součinu a podílu přímo měřených veličin

Ze zákona šíření chyb vyplyne

$$r_c(y) = \sqrt{r_c^2(x_1) + r_c^2(x_2)},$$

kde $r_c(x_1)$, $r_c(x_2)$, jsou relativní standardní nejistoty přímo měřených veličin x_1, x_2.

Nejistota pro nepřímo měřenou veličinu $y = x_1 \cdot x_2$, $y = \frac{x_1}{x_2}$ kde x_1, x_2 jsou přímo měřené veličiny

Příklad: Určení odporu rezistoru

Na rezistoru bylo naměřeno napětí $U = (12,32 \pm 0,03)\,\mathrm{V}$ a protékal jím proud $I = (40,2 \pm 0,1)\,\mathrm{mA}$. Z těchto hodnot lze určit odpor jako

$$R = \frac{U}{I}.$$

Odhad pravé hodnoty odporu $\bar{R} = \frac{12{,}32}{40{,}2.10^{-3}}\,\Omega = 306,47\Omega$, relativní nejistotu měření odporu určíme jako $r_c(R) = \sqrt{r_c^2(U) + r_c^2(I)} = \sqrt{\left(\frac{0{,}03}{12{,}32}\right)^2 + \left(\frac{0{,}1}{40{,}2}\right)^2} = 0,003$. Absolutní nejistotu měření odporu určíme jako $u_c(R) = r_c(R)\bar{R} = 0,003 \cdot 306,47\,\Omega = 0,9\,\Omega$. Výsledek je tvaru

$$R = (306,6 \pm 0,9)\,\Omega.$$

Nejistota pro nepřímo měřenou veličinu $y = x^n$

kde x je přímo měřená veličina a n je reálné číslo

Nejistota mocniny přímo měřené veličiny

Ze zákona šíření chyb vyplyne

$$r_c(y) = n \cdot r_c(x),$$

kde $r_c(x)$ je relativní standardní nejistota přímo měřené veličiny x, n je reálné číslo, čili relativní nejistota nepřímo měřené veličiny je v tomto případě n násobkem relativní nejistoty přímo měřené veličiny.

Nejistota pro nepřímo měřenou veličinu $y = x^n$

kde x je přímo měřená veličina a n je reálné číslo

Příklad: Určení výšky věže z doby volného pádu

Pokud neuvažujeme odpor prostředí, souvisí výška věže s dobou volného pádu vztahem

$$h = \frac{1}{2} g t^2,$$

kde tíhové zrychlení je potřeba zvolit podle zeměpisné polohy a nadmořské výšky, v níž stojí věž (naše volba $g = 9{,}81\,\mathrm{m.s^{-2}}$ přesně). Doba volného pádu byla určena jako $t = (3{,}6 \pm 0{,}3)\,\mathrm{s}$. Odhad pravé hodnoty výšky věže určíme jako $\bar{h} = \frac{1}{2} \cdot 9{,}81 \cdot 3{,}6^2\,\mathrm{m} = 63{,}57\,\mathrm{m}$. Relativní nejistota měření výšky je stejná jako relativní chyba měření druhé mocniny času (viz funkce typu $y = A \cdot x$) a je tedy rovna dvojnásobku relativní chyby měření času:
$r_c(h) = 2 r_c(t) = 2 \cdot \frac{0{,}3}{3{,}6} = 0{,}17$. Příslušná absolutní nejistota určení výšky věže je
$u_c(h) = r_c(h) \bar{h} = 0{,}17 \cdot 63{,}57\,\mathrm{m} = 10{,}81\,\mathrm{m}$. Výsledek měření je tvaru

$$h = (64 \pm 11)\,\mathrm{m}.$$

Z tohoto příkladu je vidět, že veličinu, která se vyskytuje ve vztahu v mocnině vyššího řádu, musíme naměřit s co největší přesností.

Nejistota pro nepřímo měřenou veličinu y

počítaná pomocí výše uvedených pravidel

Nejistota pro obecnou veličinu – postup

- Nejprve určeme absolutní standardní nejistotu všech součtů, rozdílů a lineárních kombinací, které se nacházejí ve vztahu pro nepřímo měřenou veličinu y.
- Dopočítejme k těmto absolutním standarním nejistotám nejistoty relativní.
- Sestavme vztah pro výslednou relativní nejistotu tak, že relativní nejistoty všech veličin, které se nacházejí ve vztahu ve tvaru součinu či podílu, umocníme na druhou a sečteme, výsledný součet odmocníme.
- V tomto výsledném součtu relativních nejistot nahradíme každou relativní nejistotu veličiny x^n n-násobkem relativní nejistoty veličiny $r_c(x)$ ($r_c(x^n) \rightarrow n \cdot r_c(x)$)

Nejistota pro nepřímo měřenou veličinu y

počítaná pomocí výše uvedených pravidel

Příklad: Určení tíhového zrychlení z periody matematického kyvadla

Pro periodu matematického kyvadla platí vztah $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$, kde l je délka matematického kyvadla a g je tíhové zrychlení. Pro tíhové zrychlení tedy platí $g = \frac{4\pi^2 l}{T^2}$. Perioda byla získána odečtem z časového průběhu průchodů kuličky mezi optickými závorami, odečtený časový interval $t_2 - t_1$ pokrýval deset period. Celkem tedy

$$g = \frac{4 \cdot 100\pi^2 l}{(t_2 - t_1)^2}.$$

- Absolutní standardní nejistota měření hodnot času byla odhadnuta stejnou hodnotou, a to $u_c(t_1) = u_c(t_2)$. Podle zákona šíření nejistoty (vztah pro rozdíl veličin), platí pro absolutní standardní nejistotu měření časového intervalu $u_c(\Delta t) = \sqrt{2}u_c(t_1)$.
- Příslušná relativní standarní nejistota se určí jako $r_c(\Delta t) = \frac{\sqrt{2}u_c(t_1)}{\bar{t}_2 - \bar{t}_1}$.
- Vztah pro výslednou relativní standardní nejistotu (součiny a podíly veličin) je $r_c(g) = \sqrt{r_c^2(l) + r_c^2((\Delta t)^2)}$.
- Nahrazením výrazu $r_c((\Delta t)^2)$ výrazem $2 \cdot r_c(\Delta t)$ získáme výsledný vztah pro relativní nejistotu

$$r_c(g) = \sqrt{r_c^2(l) + 4 \cdot r_c^2(\Delta t)}.$$

Zápis výsledku měření

Poté, co výše uvedeným postupem určíme odhad hodnoty pravé hodnoty $\bar{y}$, relativní standardní nejistotu měření $r_c(y)$ a absolutní standardní nejistotu měření $u_c(y) = r_c(y) \cdot \bar{y}$, rozšíříme případně tuto nejistotu na požadovanou hladinu spolehlivosti $U_C(y) = k_r \cdot u_c(y)$ a výsledek zapíšeme jako

Zápis výsledku:

$$x = (\bar{y} \pm U_C(y))\,\mathrm{j} \quad (\mathrm{P} = ...)$$

Příklad: určení plochy listu papíru formátu A4 z délek hran

$$S = (62340 \pm 51)\,\mathrm{mm} \quad (\mathrm{P} = 0,6827)$$

Podrobný zápis výsledku měření

Bilanční tabulka pro nepřímo měřenou veličinu

Obecná podoba bilanční tabulky

veličina $X_q;Y$	odhad $x_q;y$	standardní nejistota $u_q(x)$	typ rozdělení	koeficient citlivosti A_q	příspěvek ke standardní nejistotě $u_q(y) = A_q u_q(x)$; standardní nejistota $u(y) = \sqrt{\sum_{q=1}^{m} u_q^2(y)}$
X_1	x_1	$u_1(x)$	podle situace	A_1	$u_1(y)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
X_q	x_q	$u_q(x)$		A_q	$u_q(y)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
X_m	x_m	$u_m(x)$		A_m	$u_m(y)$
Y	y	–		–	$u(y)$

Podrobný zápis výsledku měření

Bilanční tabulka pro nepřímo měřenou veličinu

Bilanční tabulka pro měření plochy listu papíru formátu A4

veličina l_q;S	odhad $l_q[\mathrm{mm}]$;$S[\mathrm{mm}^2]$	standardní nejistota $u_q(l)[\mathrm{mm}]$	typ rozdělení	koeficient citlivosti A_q	příspěvek ke standardní nejistotě $u_q(l) = A_q u_q(l)$[mm]; standardní nejistota $u(S)[\mathrm{mm}^2]$
l_1	209,92	0,11	standardní	1	0,11
l_2	297,00	0,20	standardní	1	0,20
S	62340	–		–	51

Seznam základní cizojazyčné literatury

1. **GUM: Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement**
   - především text , který je podkladem pro naši metrologickou normu: **Evaluation of measurement data – Guide to the expression of uncertainty in measurement (JCGM 100:2008)**
   - chcete-li se důkladněji zabývat matematikou statistických rozdělení, pak i **Evaluation of measurement data — Supplement 1 to the "Guide to the expression of uncertainty in measurement" — Propagation of distributions using a Monte Carlo method**
2. **International vocabulary of metrology** — Basic and general concepts and associated terms **(VIM)**

Seznam české literatury

1. Stránky Úřadu pro technickou normalizaci, metrologii a státní zkušebnictví – mimo jiné on-line přístup k českým technickým normám (ČSN)
   - především český překlad výše citovaného VIM **Terminologie z oblasti metrologie**
   - a také **Nejistoty měření, přesnost měřidel, správnost měření a otázky spojené se vzájemnou porovnatelností výsledků měření a s prohlášením o shodě s technickými specifikacemi**
   - ale také například populárnější text o měření nejen ve fyzice **Metrologie v kostce**

Seznam české literatury

2. Stručný návod, jak postupovat při zpracování měření ve čtyřech částech, kovariance, o kterých se hovoří ve třetí a čtvrté části, jsou nadstavbou:
   - **Nejistoty v měření I: vyjadřování nejistot**
   - **Nejistoty v měření II: nejistoty přímých měření**
   - **Nejistoty v měření III: nejistoty nepřímých měření**
   - **Nejistoty v měření IV: nejistoty při kalibraci a ověřování**

Poděkování

- Děkuji Mgr. Martinu Šírovi z Českého metrologického ústavu za velmi poučné diskuze o otázkách moderního pojetí měření a za poskytnutí materiálu, který byl zčásti pro tvorbu této prezentace použit.
- Děkuji Mgr. Zdenku Navrátilovi, že mě donutil se touto problematikou zabývat.
- Děkuji tvůrcům LaTeXBeameru, že tento balík vytvořili a vymanili nás tak z područí nejmenovaného programu na tvorbu prezentací.
- Konečně děkuji OPVK projektu, v jehož rámci tato prezentace vznikla.