1. Opakování z minulého semestru a taky něco nového

Pojmy: Lineární závislost a nezávislost, báze, dimenze, ekvivalence a uspořádání na množině

1. Doplňte následující množinu M na bázi $\mathbf{V}$:

a) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^4$, $M = \{(1, -2, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 1, 0, 1)\}$

b) $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$, $M = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1)\}$.

2. Prověřte, zda systém B tvoří bázi $\mathbf{R}^4$ a v kladném případě nalezněte souřadnice vektoru $\vec{u} = (0, 2, -1, 1)$ v této bázi:

a) $B = \{(1, 1, 0, 0), (1, 0, 1, 0), (1, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1)\}$

b) $B = \{(0, 1, 1, 0), (0, -1, 1, 0), (1, -1, 1, 1), (1, 0, 0, -1)\}$

Vzhledem k tomu, že toto první cvičení předchází přednášce, zavademe zde nějaké nové pojmy, se kterými budeme dále pracovat.

3. *Kartézským součinem* dvou množin $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ nazveme množinu všech uspořádaných dvojic $\{[a, b] | a \in \mathcal{A}, b \in \mathcal{B}\}$. *Relací* je podmnožina $\varrho \subset \mathcal{A} \times \mathcal{B}$.
Ekvivalence na množině $\mathcal{A}$ je relace $\varrho \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ splňující pro všechna $a, b, c \in \mathcal{A}$:

i. $[a, a] \in \varrho$ ... reflexivita

ii. $[a, b] \in \varrho \Rightarrow [b, a] \in \varrho$ ... symetrie

iii. $[a, b] \in \varrho \wedge [b, c] \in \varrho \Rightarrow [a, c] \in \varrho$ ... tranzitivita

pro $[a, b] \in \varrho$ také značíme $a \sim b$.

Uspořádání na množině $\mathcal{A}$ je relace $\varrho \subset \mathcal{A} \times \mathcal{A}$ splňující pro všechna $a, b, c \in \mathcal{A}$:

i. $[a, a] \in \varrho$ ... reflexivita

ii. $[a, b] \in \varrho \wedge [b, a] \in \varrho \Rightarrow a = b$ ... antisymetrie

iii. $([a, b] \in \varrho \wedge [b, c] \in \varrho) \Rightarrow [a, c] \in \varrho$ ... tranzitivita

pro $[a, b] \in \varrho$ také značíme $a \leq b$.
Třída ekvivalence příslušná prvku a je množina $[a] = \{b \in \mathcal{A} \mid b \sim a\}$
Faktormnožina $\mathcal{A}/\sim$ (nebo $\mathcal{A}/\varrho$) je množina všech tříd ekvivalence.

a) NEPOVINNÉ
Dokažte, že třídy příslušné dvěma libovolným prvkům a_1, a_2 jsou buď disjunktní, nebo splývají.

b) Uveďte tři příklady ekvivalence na množině a dokažte, že jde o ekvivalenci.

c) Uveďte tři příklady uspořádání na množině, dokažte.

d) Uveďte tři příklady relace na množině, která není ekvivalencí ani uspořádáním. (Který axiom nesplňuje?)

e) NEPOVINNÉ
Popište, jak vypadají faktormnožiny ekvivalencí vámi uvedených v příkadě 2.

f) Uveďte příklady ekvivalencí na množině matic. Dokažte.

4a. NEPOVINNÉ
Nechť $\sim$ je relace na $\mathbf{Z}$ (množina celých čísel) daná takto: $a \sim b \Leftrightarrow (a-b)$ je dělitelné číslem p. Dokažte, že tato relace je ekvivalencí. Jak vypadají třídy ekvivalence. Popište faktormnožinu (kolik má prvků?).

4b.

a) Nalezněte všechny relace ekvivalence na tříprvkové množině.

b) Určete pro každou z nich třídy ekvivalence (kolik jich je?).

c) Nalezněte všechny relace uspořádání na tříprvkové množině.

5. Je dána množina $M = \{a, b, c, d, e\}$ a relace $\varrho \subset M \times M$, $\varrho = \{[a, a], [b, a], [b, e], [c, d]\}$. Doplňte relaci ϱ (nejmenším možným počtem dvojic) tak, aby byla relací ekvivalence a určete třídy této ekvivalence.

Domácí úkol

I. Najděte souřadnice vektoru $\vec{v}$ v bázi B prostoru $\mathbf{V}$:

- $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$, $\vec{v} = (1, 2, 1)$, $B = \{(0, 1, 1), (1, 1, 1), (1, 1, 0)\}$.
- $\mathbf{V} = P_2[x]$, $\vec{v} = x^2 - 4x$, $B = \{x + 1, x^2 + 1, x^2 + x + 1)\}$.

- $$\mathbf{V} = \mathrm{Mat}_{2\times 2}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \right\}.$$