Zkušební písemka

Přibližně takto bude vypadat druhá písemka z předmětu Matematika 2.

1. Je to skalární součin, nebo není?
Rozhodněte, zda operace $\langle | \rangle : V \times V \to \mathbf{R}$ definuje skalární součin ve vektorovém prostoru V nad $\mathbf{R}$ a dokažte:

- $V = P_3[x]$, $\langle p(x)|q(x)\rangle = p(0) \cdot q(0)$.
- $V = \mathbf{C}$, $\langle a + \mathrm{i}b | c + \mathrm{i}d\rangle = a \cdot b + c \cdot d$.

[2 body]

3. Matice projekce
Určete ortogonální doplněk k podprostoru L v $\mathbf{R^4}$:
$L = [(1, -1, 0, 0), (-1, 1, 1, 1)]$, složky vektorů jsou zapsány v ortonormální bázi. Určete matici projekce a pro libovolný vektor zapište vztah pro ortogonální projekci a komponentu.

[3 body]

3. Ortogonalizace
V prostoru $P_2[x]$ uvažujte bázi $B = \{x^2, x+1, 2\}$. Skalární součin je definován vztahem

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x.$$

Určete matici skalárního součinu v bázi B. Ortogonalizujte systém B. Určete projekci vektoru $\vec{a} = x^2$ do směru vektoru $\vec{b} = 2$. Není třeba dopočítávat do konce, stačí zapsat příslušné vztahy.

[2 body]

4. Vlastní hodnoty a vlastní vektory lineární transformace:
Matice

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

reprezentuje lineární transformaci (vektory píšeme do řádků a násobíme je maticí A zprava) $\varphi : \mathcal{V}_3 \to \mathcal{V}_3$ v bázi (e_1, e_2, e_3).
a) určete vlastní hodnoty této transformace
b) určete vlastní vektory této transformace
c) nalezněte bázi, ve které je φ reprezentována diagonální maticí, určete matici přechodu
d) pomocí trasformačního vztahu převeďte matici A do této báze. (Vyšla vám diagonální s vlastními hodnotami na diagonále?)

[3 body]