

11. Funkce více proměnných

Pojmy: parciální derivace, řetězové pravidlo pro derivování složených funkcí, úplný diferenciál funkce, gradient funkce

1. Zakreslete grafy funkcí, určete definiční obor a obor hodnot zadané funkce

(a) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} - 1 = 0$

(b) $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$

(c) $\frac{x^2}{p} + \frac{y^2}{q} - 2z = 0 \quad p, q > 0$

2. Vypočítejte parciální derivace 1. a 2. řádu

(a) $f(x, y) = \ln \sqrt{2x^2 + y^2}$

(b) $f(x, y, z) = ye^{-x} + z \sin y$

3. Je dána plocha $f(x, y)$. Napište rovnici tečny ke křivce, která je dána průsečíkem plochy $f(x, y)$ a roviny ρ , v bodě s x-ovou souřadnicí x_0 .

(a) $f(x, y) = x^2 + 2y^2, x_0 = 3, \rho : y = 2$

(b) $f(x, y) = x^2y, x_0 = 1, \rho : x + y = 0$

4. Nalezněte funkci, pro kterou platí:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y + y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x - x^2 \sin y + 1$$

5. Použijte pravidlo pro derivování složených funkcí a vypočítejte $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$, kde

$$F(x, y, z) = f(r(x, y, z), \varphi(x, y, z), z)$$

představuje přechod k válcovým souřadnicím:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\varphi = \arctan \frac{y}{x}$$

$$z = z$$

Vyjádřete Laplaceův operátor Δ ve válcových souřadnicích.

Pozn. V kartézských souřadnicích $\Delta F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$.

6. Vypočítejte parciální derivace 1. řádu pomocí pravidla pro derivování složených funkcí

$$F(x, y) = x^2 + xy + \frac{y^3}{x}$$

pro $x = r \cos \varphi, y = r \sin \varphi$.

Domácí úkol

XI.

- Určete gradient funkce $f(x, y, z) = \frac{\kappa M m}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$.
- Zjistěte, zda výraz je totálním diferenciálem nějaké funkce. Pokud ano, najděte ji.

$$\begin{aligned} & - \frac{(x^2 + y^2 - xy)dx - (x^2 + y^2 - xy)dy}{x^2 + y^2} \\ & - \frac{(x + y)^2}{(x^2 + y^2)^2} \left[(3(x^2 + y^2) - 2(x + y)x) dx + (3(x^2 + y^2) - 2(x + y)y) dy \right] \end{aligned}$$