

Diferenciální rovnice

Pro odevzdání stačí vyřešit jednu až dvě rovnice resp. soustavy od každého typu.

Diferenciální rovnice prvního řádu

1. Řešte dané lineární diferenciální rovnice typu $y' = a(x)y + b(x)$

i) $y' = -y \operatorname{tg} x + \frac{1}{\cos x}$

ii) $y' = 2x(x^2 + y)$

iii) $x^2 y' + xy + 1 = 0$

iv) $y = x(y' - x \cos x)$

v) $x(y' - y) = e^x$

2. Řešte dané exaktní diferenciální rovnice

$$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$$

(Poznámka: Jestliže platí $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$ pak $P(x, y)dx + Q(x, y)dy = dF(x, y) = 0 \Rightarrow F(x, y) = C$ kde C je konstanta.)

i) $(x^2 - y^2)dx + (y^3 - 2xy)dy = 0$

ii) $(3x^2 + 8ax + 2by^2 + 3y)dx + (4bxy + 3x + 5)dy = 0$

Diferenciální rovnice druhého řádu

$$y'' + py' + qy = 0, p, q = \text{const}$$

3. Řešte dané diferenciální rovnice:

$$\text{i) } y'' + 3y' + 2y = 0$$

$$\text{ii) } y'' + 2y' + y = 0$$

$$\text{iii) } y'' + y = 0$$

4. Řešte dané diferenciální rovnice s nehomogenní pravou stranou:

$$\text{i) } y'' + y' + 2y = xe^{-2x}$$

$$\text{ii) } y'' - y = (x - 1) \sin 2x$$

$$\text{iii) } y'' + y = x^3$$

$$\text{iv) } y'' - 6y' + 9y = 2x^2 - x + 3$$

5. Řešte danou soustavu diferenciálních rovnic prvního řádu:

$$\begin{aligned} y_1' &= 4y_1 - 2y_2 \\ y_2' &= y_1 + y_2 \end{aligned} \tag{1}$$

$$\begin{aligned} y_1' &= -7y_1 + y_2 \\ y_2' &= -2y_1 - 5y_2 \end{aligned} \tag{2}$$

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= -y_1 + 1 \end{aligned} \tag{3}$$

Domácí úkol:

XIIa. Řešte dané diferenciální rovnice

i) $y' = \frac{y-1}{x^2 y^2}$

ii) $y' \cotg x + y = 2$

iii) $y'' + 3y' - 4y = 0$

iv) $2y'' + y' - y = 2e^x$

XIIb. Řešte danou soustavu diferenciálních rovnic

$$\begin{aligned}y_1' &= -y_1 + y_2 \\y_2' &= -y_2 + 4y_3 \\y_3' &= y_1 - 4y_3\end{aligned}$$

(4)