13. Vektorová analýza

1a. Vypočtěte gradient funkcí $f(x,y) = x^2 + y^2$, $g(x,y,z) = 2xyz + x^2y + y^2z + z^2x$.

1b. Rozhodněte, zda vektorová pole $\vec{A} = (2xy, x^2)$, $\vec{B} = (3x, 4y)$, $\vec{C} = (y^2, x^2)$ jsou gradienty nějaké skalární funkce $f(x,y)$. V kladném případě tyto funkce určete. Budou určeny jednoznačně?

2. Vypočítejte divergenci, rotaci a ∇^2 vektorových polí: $\vec{r}$, $\vec{a} \times \vec{r}$, $(\frac{\sin(xy)}{z}, \frac{\sin(yz)}{x}, \frac{\sin(zx)}{y})$, kde $\vec{r} = (x,y,z)$.

3. Převeďte operátor ∇ do polárních souřadnic.

4. Dokažte následující identity:

$$\begin{aligned} \mathbf{div}\,(\vec{A} \times \vec{B}) &= \vec{B}\,\mathbf{rot}\,\vec{A} - \vec{A}\,\mathbf{rot}\,\vec{B}, \\ \mathbf{div\ rot}\,\vec{A} &= 0, \\ \mathbf{rot\ grad}\,\varphi &= \vec{o}. \end{aligned}$$

5. Dokažte následující vztahy pro libovolné vektory $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ a spojité funkce f, g

i) $\mathbf{grad}(fg) = \mathbf{grad}(f)g + f\mathbf{grad}(g)$

ii) $\mathbf{div}(f\mathbf{A}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{grad}f + f\mathbf{div}\mathbf{A}$

iii) $\mathbf{div}[\mathbf{A} \times \mathbf{B}] = \mathbf{B} \cdot \mathbf{rot}\mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{rot}\mathbf{B}$

Domácí úkol

II. Uveďte příklad

- nenulového skalárního pole s nulovým gradientem,
- vektorového pole, které není gradientem žádného skalárního pole,
- nenulového vektorového pole s nulovou rotací,
- nenulového vektorového pole s nulovou divergencí,
- nenulového vektorového pole s nulovou rotací i divergencí,
- spojitého skalárního pole, které není divergencí žádného vektorového pole,

- dvou vektorových polí se stejnou, nenulovou, divergencí,
- dvou skalárních polí se stejným, nenulovým, gradientem,
- dvou vektorových polí, se stejnou, nenulovou rotací,
- vektorového pole, které není rotací žádného vektorového pole.