2. Základní algebraické struktury

Pojmy: grupa, okruh, pole, vektorový prostor a podprostor, báze, dimenze, reprezentace vektorů v bázích, součet a průnik podprostorů, doplněk.

U každého z příkladů 1 až 5 pro odevzdání stačí vybrat pouze dvě podotázky!

1. Rozhodněte (a zdůvodněte), zda následující množiny opatřené operací jsou grupou.
a) Množina matic $m \times n$ s operací sčítání matic.
b) Množina matic $n \times n$ s operací násobení matic.
c) Množina regulárních matic $n \times n$ s operací násobení matic.
d) Množina diagonálních, regulárních matic s operací násobení matic.
e) Množina přirozených čísel s operací sčítání.
f) Množina celých čísel s operací sčítání
g) Množina $M = \{a, b, c\}$ s operací $\star : M \times M \to M$, kde $a \star b = b \star a = b$, $a \star c = c \star a = c$, $a \star a = a$, $b \star c = c \star b = a$, $b \star b = c$, $c \star c = b$.

2. Rozhodněte (a zdůvodněte), zda následující množiny opatřené dvěma operacemi jsou okruhem nebo tělesem.
a) Množina matic $n \times n$ s operacemi sčítání a násobení matic.
b) Množina regulárních matic $n \times n$ s operacemi sčítání a násobení matic.
c) Množina reálných funkcí reálné proměnné s operacemi sčítání a násobení funkcí.
d) Číselné obory **N, Z, Q, R, C** s operacemi sčítání a násobení.

3. Rozhodněte (a zdůvodněte), zda následující množiny opatřené operací sčítání a násobení skalárem jsou vektorovými prostory nad **R**, v kladném případě určete jejich dimenzi a nalezněte nějakou bázi.
a) Množina **V** všech matic 1×2 nad **R**, se sčítáním matic, ale skalárním násobením definovaným triviálně $a \odot (x, y) = (x, y)$ pro všechna $a \in \mathbf{R}$ a všechna $(x, y) \in \mathbf{V}$.
b) Množina všech polynomů stupně většího než 2 a menšího než 4, doplněná 0, nad **R**, s běžnými operacemi sčítání polynomů a násobení skalárem.
c) Množina všech polynomů stupně nejvýše n s běžnými operacemi sčítání a násobení polynomů.
d) Množina $\mathbf{V} = \mathbf{R}^3$, s operacemi $(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$ a $k(x, y, z) = (kx, y, z)$.

e) Množina $\mathbf{V} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x \geq 0\}$, $(x, y)+(x', y') = (x+x', y+y')$, $k(x, y) = (kx, ky)$.
f) Množina $\mathbf{V} = \{(1, x) | x \in \mathbf{R}\}$, $(1, x) + (1, x') = (1, x + x')$, $k(1, x) = (1, kx)$.
g) Množina diagonálních matic typu 2×2 s operacemi sčítání matic a násobení matic skalárem.

4. Rozhodněte, zda následující podmnožiny mají strukturu podprostoru. V kladném případě určete jeho dimenzi a nalezněte nějakou bázi, případně tuto bázi doplňte dalšími vektory na bázi celého prostoru.
a) Podmnožina $\mathbf{P}$ množiny všech čtvercových matic řádu 2 taková, že $a_{11} + a_{22} = 0$ (matice s nulovou stopou),
b) Podmnožina $\mathbf{P} \subset \mathbf{R}^2$, $\mathbf{P} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x + y = 0\}$,
c) Podmnožina $\mathbf{P} \subset \mathbf{R}^2$, $\mathbf{P} = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x + y = 1\}$,
d) Podmnožina $\mathbf{Z} \subset \mathbf{R}$ všech celých čísel.
e) Podmnožina $\mathbf{P} \subset P_5(x)$ množiny všech polynomů stupně nejvýše 5, $\mathbf{P} = \{p \in P_5(x) | p(x) = p(-x)\}$.

5. Jsou zadány podprostory V_1, V_2 (V_3). Určete jejich bázi a dimenzi, určete dimenzi a bázi součtu a průniku těchto podprostorů. Ke každému z prostorů určete také jeho doplněk, bude tento doplňek určen jednoznačně?

a) V $\mathbf{R}^3$:
$V_1 = [(1, 2, -1), (-1, 0, 2), (2, -1, 0), (1, 1, 1)]$,
$V_2 = [(0, 2, 1), (1, 4, 0)]$,

b) V $\mathbf{R}^4$:
$V_1 = [(1, -1, 0, 1), (1, 2, 0, 3), (3, 0, 0, 5)]$,
$V_2 = [(0, -1, 1, 4), (0, 2, 3, 2), (0, 0, 1, 2)]$,

c) V $P_6(x)$:
$V_1 = [x^2 + 2x^3, -x^3 + x^6]$,
$V_2 = [2 + x^2, -1 + x^6, x^2 + x^3 + 2x^4]$,
$V_3 = [x^2 + x^6, 1 + 3x^3 + x^5, x^3]$,

d) V $\mathrm{Mat}_{2\times2}$:
V_1 je podmnožina všech matic s nulovou stopou,
V_2 je podmnožina všech diagonálních matic.

Domácí úkol

II. Uveďte další příklady množin s operací, které jsou (resp. nejsou) grupami. Uveďte další příklady množin s operacemi, které jsou (resp. nejsou) okruhem (resp. tělesem). Uveďte další příklady množin, opatřených operací sčítání a násobení skalárem, které jsou (resp. nejsou) vektorovými prostory (od každého alespoň 3 příklady). Zdůvodněte.