3. Lineární zobrazení

Pojmy: Lineární zobrazení, jádro, obraz, hodnost a defekt, matice lineárního zobrazení, součet a skládání lineárních zobrazení.

U každého z příkladů 1 až 4 pro odevzdání stačí vybrat pouze dvě podotázky.

1. Rozhodněte, zda následující zobrazení $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ jsou lineární.

a) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$, $f(x, y, z) = (x + 2, y + z)$,

b) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$, $f(x, y, z) = (x + y, z - y, x + z)$,

c) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$, $f(x, y) = (x - y, x + y, x)$,

d) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, $f(x, y) = (x^2 + 2xy + y^2)$,

e) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$, $f(x, y, z) = (x - y + 3z)$.

2. Pro ta zobrazení z příkladu 1, která jsou lineární, určete jejich matici ve standardních bázích, jejich jádro a obraz.

3. Uveďte příklad lineárního zobrazení

a) $f : \mathrm{Mat}_{2\times 2} \to \mathbf{R}$,

b) $f : \mathrm{Mat}_{2\times 2} \to \mathrm{Mat}_{3\times 3}$,

c) $f : P_3(x) \to \mathbf{R}^2$,

d) $f : \mathbf{R} \to \mathrm{Mat}_{2\times 2}$,

e) $f : \mathrm{Mat}_{2\times 2} \to \mathbf{R}^4$.

Určete jejich jádro a obraz, zvolte nějaké báze příslušných prostorů a určete matice zobrazení v těchto bázích. Uveďte také příklady zobrazení těchto prostorů, která nejsou lineární. Dokažte.

4. Uveďte příklad lineárního zobrazení

a) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ s jádrem $\ker f = [(1, 1, 0), (0, 1, 1), (-1, 0, 1)]$,

b) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ s obrazem $\mathrm{Im} f = [(1, 1, 0), (1, 2, 0)]$,

c) $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ které je resp. není izomorfismem,

d) $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ s jádrem a obrazem $\ker f = [(1, 1)] = \mathrm{Im} f = [(1, 1)]$.

5. Lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ zobrazí vektor $v_1 = (-2, 1)$ na $f(v_1) = (-1, 2, 0)$, vektor $v_2 = (1, 3)$ na $f(v_2) = (0, -3, 5)$. Složky vektorů jsou zadány ve standardních bázích. Určete matici tohoto zobrazení ve standardních bázích, jádro a image zobrazení. Určete matici tohoto zobrazení v bázích $B_{\mathbf{R}^2} = (v_1, v_2)$, $B_{\mathbf{R}^3} = (f(v_1), f(v_2), c)$, kde vektor c zvolte tak, aby systém $(f(v_1), f(v_2), c)$ byl lineárně nezávislý. Použijte transformačního vztahu pro matici lineárního zobrazení.

Domácí úkol

III. Jsou dány vektory $\vec{u} = (1, 2, 0)$, $\vec{v} = (2, 1, -1)$, $\vec{w} = (1, -1, -1)$, $\vec{c} = (0, 0, 1)$ v $\mathbf{R}^3$. Zjistěte, zda existuje lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ takové, že

a) $f(\vec{u}) = (1, 2)$, $f(\vec{v}) = (2, 3)$, $f(\vec{w}) = (1, 1)$, $f(\vec{c}) = (0, 0)$,

b) $f(\vec{u}) = (-2, 1)$, $f(\vec{v}) = (1, 1)$, $f(\vec{w}) = (8, -1)$, $f(\vec{c}) = (0, 0)$.

V kladném případě takové zobrazení nalezněte (jeho matici ve standardních bázích).