6. Skalární součin I.

Pojmy: skalární součin, norma vektoru, odchylka dvou vektorů, matice skalárního součinu a její vlastnosti.

U příkladů 1 až 4 stačí pro odevzdání vybrat pouze dvě podotázky

1. Rozhodněte, zda $\langle\cdot|\cdot\rangle$ definuje skalární součin ve V nad $\mathbf{R}$, zdůvodněte:

a) $V = \mathbf{R}^2$, $\langle (x_1, y_1)|(x_2, y_2)\rangle = x_1 y_1 x_2 y_2$

b) $V = \{F : [0,1] \to \mathbf{R}\}$, $\langle f|g\rangle = f(1)g(0) + f(0)g(1)$

c) $V = P_n$ – polynomy stupně nejvýše n nad $\mathbf{R}$, $\langle p(x)|q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + \ldots + p(n)q(n)$

d) $V = M_{22}$, $\langle A|B\rangle = \det(AB)$

e) $V = \mathbf{R}^3$, $\langle (x_1, x_2, x_3)|(y_1, y_2, y_3)\rangle = x_1 y_1 - x_2 y_2 + x_3 y_3$,

f) $V = \mathbf{C}$, $\langle z|w\rangle = zw^*$,

g) $V = P_n$ – polynomy stupně nejvýše n nad $\mathbf{R}$, $\langle p(x)|q(x)\rangle = p(0)q(0)$,

h) $V = M_{22}$, $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}A \cdot \mathrm{tr}B$.

2. Ve vektorovém prostoru V se zadaným skalárním součinem určete normu vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$, vektory normujte, vypočtěte jejich skalární součin a odchylku.

a) $V = \mathbf{R}^2$, $\vec{u} = (1,3)^T$, $\vec{v} = (0,4)^T$,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix},$$

b) $V = \mathbf{R}^2$, $\vec{u} = (3,-1)^T$, $\vec{v} = (2,2)^T$,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix},$$

c) $V = P_3[x]$, $\langle p|q\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$, $\vec{u} = x^3 + 1$, $\vec{v} = x - 2$,

d) $V = \mathrm{mat}_{2\times 3}$, $\langle \mathbf{A}|\mathbf{B}\rangle = \mathrm{tr}(\mathbf{A}\mathbf{B}^T)$,

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

3. Dokažte alespoň některé z následujících vlastností skalárního součinu v Euklidových prostorech:

$$
\begin{aligned}
\langle\vec{v}|\vec{o}\rangle &= 0,\\
\langle\vec{v}|\vec{w}\rangle^2 &\leq \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 \qquad \text{Schwarzova nerovnost}\\
\langle\vec{v}|\vec{w}\rangle^2 &= \|\vec{v}\|^2\|\vec{w}\|^2 \Leftrightarrow \vec{v} = k\cdot\vec{w}, k \in \mathbf{R},\\
\langle\vec{v}|\vec{w}\rangle &= \frac{1}{4}(\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2).
\end{aligned}
$$

4. Určete vektor (všechny vektory), který bude mít s vektorem $\vec{u}$ odchylku $\varphi = \frac{\pi}{3}$, (resp. $\varphi = 0$, $\varphi = \pi$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$), a stejnou velikost jako $\vec{u}$.

a) $V = \mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix},$$

$\vec{u} = (4, -3)^T$,

b) $V = \mathbf{R}^3$, $\vec{u} = (1, 2, 1)^T$, složky jsou zapsány v ortonormální bázi,

c) $V = P_2[x]$, $\vec{u} = x$, skalární součin definován takto: $\langle p|q\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$.

5. Uveďte příklad skalárního součinu na vektorovém prostoru matic a na vektorovém prostoru funkcí. Uveďte také příklady zobrazení $V \times V \to \mathbf{R}$, které nejsou skalárním součinem.

Domácí úkol

VI. Dokažte alespoň některé z následujících vlastností normy indukované skalárním součinem.

$$
\begin{aligned}
\|r\cdot\vec{v}\| &= |r|\cdot\|\vec{v}\|,\\
\|\vec{v}+\vec{w}\| &\leq \|\vec{v}\| + \|\vec{w}\|,\\
\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 - \|\vec{u}-\vec{v}\|^2 &= 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2) \qquad \text{rovnoběžníková rovnost.}
\end{aligned}
$$