7. Skalární součin II.

Pojmy: ortogonální systém vektorů, ortogonalizační proces, ortonormální báze, matice přechodu mezi ortonormálními bázemi, ortogonální doplněk, ortogonální projekce a komponenta.

U příkladů 1 až 4 a u domácího úkolu stačí pro odevzdání vybrat pouze jednu nebo dvě podotázky

1. Ortogonalizujte systém vektorů v prostorech se zadaným skalárním součinem:

a) $P_2[x]$ se skalárním součinem $\langle p|q\rangle = \int_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$, $\vec{u} = 1$, $\vec{v} = x$, $\vec{w} = x^2$,

b) použijte vektory z příkladu 2 cvičení 5,

c) $V = \mathbf{R}^4$, složky jsou zadány v ortonormální bázi, $\vec{u} = (1, 2, 0, 0)^T$, $\vec{v} = (0, 1, 0, -1)^T$, $\vec{w} = (-1, 0, 0, 1)^T$,

d) $V = \mathbf{R}^3$,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

$\vec{u} = (1, 0, 0)^T$, $\vec{v} = (0, 1, 0)^T$, $\vec{w} = (0, 0, 1)^T$.

2. Určete ortogonální doplněk k podprostorům, skalární součin je zadán:

a) $V = \mathbf{R}^3$, $L = [(1, 1, 0)^T]$, složky jsou v ortonormální bázi.

b) $V = \mathbf{R}^3$, $L = [(1, 1, 0)^T]$,

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix},$$

c) použijte zadání příkladu 2 cvičení 5, podprostor $L = [\vec{u}, \vec{v}]$.

3. Rozhodněte, zda následující systémy vektorů v prostorech se zadaným skalárním součinem jsou ortogonální nebo ortonormální:

a) Něco si vymyslete.

4. Určete ortogonální doplněk k podprostoru L v $\mathbf{R^4}$:
$L = [(1,-1,2,0)^T, (-1,1,1,1)^T]$, složky vektorů jsou zapsány v ortonormální bázi. Určete matici projekce na podprostor L.

4. Zadejte skalární součin ve V tak, aby uvedený systém vektorů byl ortonormální:

a) $V = \mathbf{R}^3$, $\vec{u} = (1,1,0)^T$, $\vec{v} = (0,1,1)^T$,

b) $V = \mathrm{Mat}_{2\times 2}$,

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5. Určete ortogonální doplněk k podprostoru L v $\mathbf{R^4}$:
$L = [(1,-1,2,0)^T, (-1,1,1,1)^T]$, složky vektorů jsou zapsány v ortonormální bázi. Určete matici projekce na podprostor L.

Domácí úkol

VII. Doplňte následující (ortogonální — prověřte) systém vektorů na ortogonální bázi V a vektory normujte.

a) Použijte ortogonalizovaných vektorů z příkladu 1,

b) $V = P_3[x]$, $\langle p|q\rangle = \int\limits_0^1 p(x)q(x)\mathrm{d}x$, $\vec{u} = x+1$, $\vec{v} = 9x-5$,

c) $V = \mathbf{R}^3$, $\vec{u} = (1,2,3)^T$, $\vec{v} = (-1,-1,1)^T$, složky jsou zadány v ortonormální bázi.