8. Vlastní vektory a vlastní hodnoty lineárních transformací

Pojmy: vlastní hodnota a vlastní vektor lineární transformace, charakteristická matice, spektrum

1. Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory transformace $\pi_{L,L'}$ (projekce na podprostor).

2-3. Určete spektrum a vlastní vektory lineární transformace φ, je-li v bázi $(e_1, \ldots, e_n)$ reprezentována maticí A. Ve všech případech uvažujte vektorový prostor $\mathcal{V}_n$ nad $\mathbf{R}$. Diskutujte diagonalizovatelnost.

$$a)\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \qquad b)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$c)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \qquad d)\begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$$

$$e)\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

4. NEPOVINNÉ
Lineární transformace se nazývá *idempotentní*, jestliže $f \circ f = f$, ukažte, že každá idempotentní transformace je diagonalizovatelná a může mít pouze vlastní hodnoty 0 a 1.

Návod: Předpokládejte, že vektor $\vec{a}$ je vlastní vektor příslušný nějaké vlastní hodnotě a využijte předpokladu $(f(f(\vec{a})) = f(\vec{a})$. Dále ukažte, že jádro je tvořeno vlastními vektory příslušnými vlastní hodnotě $\lambda = 0$, ukažte, že každý vektor z obrazu Imf je vlastní vektor příslušný hodnotě $\lambda = 1$. Využijte skutečnosti, že součet hodnosti a defektu lineární transformace je roven celkové dimenzi prostoru.

Lineární transformace se nazývá *involuce*, jestliže $f \circ f = \mathrm{id}$, ukažte, že involuce je diagonalizovatelná a může mít pouze vlastní hodnoty 1 a -1. Uveďte nějaký příklad idempotentní transformace a involuce.

Návod: Při určování vlastních hodnot postupujte analogicky. Dále předpokládejte, že systém $(\vec{e}_i^{\,+})$ resp. $(\vec{e}_j^{\,-})$ tvoří bázi podprostoru vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě $+1$ resp. -1. Uvažujte vektory $(\vec{c}_k)$ jako doplnění těchto systémů na bázi celého prostoru. Ukažte, že každý vektor $\vec{c}+f(\vec{c})$ resp. $\vec{c}-f(\vec{c})$ je vlastní a s využitím této skutečnosi dokažte, že $\vec{c}$ je lineární kombinací vektorů ze systému $(\vec{e}_i^{\,+}, \vec{e}_j^{\,-})$.

5. Uveďte příklad lineární transformace na reálném vektorovém prostoru, která

- nemá žádnou vlastní hodnotu,
- nemá žádný vlastní vektor,
- má vlastní hodnotu, ale přesto ji nelze reprezentovat v diagonálním tvaru,
- má pouze nulovou vlastní hodnotu, ale přesto není nulovou transformací,
- je v každé bázi reprezentována diagonální maticí,
- pro kterou jsou všechny vektory v daném prostoru její vlastní.

Domácí úkol

VIII. Určete vlastní hodnoty a vlastní vektory lineárních transformací reprezentovaných v bázi $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ následujícími maticemi a o každé z nich rozhodněte, zda je možné ji reprezentovat v diagonálním tvaru. V kladném případě nalezněte matici přechodu od původní báze k bázi, ve které je transformace reprezentována diagonální maticí (jakou?), je tato báze určena jednoznačně?

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 0 & 3 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}.$$