Požadavky ke zkoušce

Zkouška z předmětu MATEMATIKA 2 má dvě části

- **Písemná část:** Písemná část se ještě dále rozděluje na *praktickou část — písemku* a *teoretickou část — test*. Písemka trvá 90 minut a je v ní obsaženo pět příkladů větší obtížnosti. Test trvá 60 minut, obsahuje deset jednodušších otázek, zaměřených na znalosti základních pojmů a metod.

  Při písemné části není dovoleno používat literaturu, je však povoleno použít tahák vlastní výroby do velikosti formátu A4. (Použití lupy a mikroskopu není dovoleno.)

  Ukázkový test a písemka jsou uvedeny jako součást tohoto dokumentu. Skutečné testy a písemky u jednotlivých termínů budou nižší (maximálně stejné) obtížnosti. Všechny vaše připomínky k ukázkovému testu i písemce jsou vítány.

  Bodování: Testové příklady jsou hodnoceny jedním bodem, písemkové dvěma body. Celkem je tedy možné získat 20 bodů z písemné části zkoušky. Další body (maximálně deset) si student přináší od svého cvičícího, který ho ohodnotil za práci v průběhu semestru. Výsledná známka pak odpovídá bodovému ohodnocení takto:

  30 — 27 bodů . . . A

  27 — 24 bodů . . . B

  24 — 21 bodů . . . C

  21 — 18 bodů . . . D

  18 — 15 bodů . . . E

  15 — 0 bodů . . . F.

- **Ústní část:** V případě, že student nesouhlasí se známkou (nebo je-li bodové ohodnocení nerozhodně), vyjasní se situace u ústní části zkoušky.

Ukázková písemka

PÍSEMKA — ZKOUŠKA Z MATEMATIKY 2, 2006

1. Samoadjungovaný lineární operátor φ v $\mathbf{U}_4$ je v ortonormální bázi B reprezentován maticí A.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & -5 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Určete:

a) vlastní hodnoty a vlastní vektory zobrazení φ, [1 bod]

b) spektrální reprezentaci zobrazení φ v bázi B (tj. rozklad $A = \lambda_1 P_1 + \ldots + \lambda_r P_r$, kde P_i jsou matice projekce), [1 bod]

c) matici $\overline{A}$ reprezentující φ v bázi vlastních vektorů $\overline{B}$ a matice přechodu T, T^{-1} mezi bázemi B a $\overline{B}$. [0,5 bodu]

d) matici A^{10}. [0,5 bodu]

---

2. Nalezněte všechna řešení následujících diferenciálních rovnic:

a) $y'' - y' = 2(1-x)$, $y(0) = 1$, $y'(0) = 1$, [1,2 bodu]

b) $x^2 y' + xy + 1 = 0$, [1,2 bodu]

c) $y'(x^2 + 3x - 4) = (x+9)y$. [0,6 bodu]

---

3. Je dáno zobrazení $\vec{F} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$:

$$\vec{F}(x, y, z) = (2xy^2z - x, 2yx^2z + y, x^2y^2).$$

Určete

a) Jacobiho matici zobrazení, [1 bod]

b) zda je toto zobrazení gradientem nějaké skalární funkce F a v kladném případě tuto funkci vypočtěte, [1 bod]

c) rotaci a divergenci zobrazení. [0,5 bodu]

---

4. Transformujte parciální diferenciální rovnici pro neznámou funkci $z(x, y)$ do nových proměnných $u(x, y) = \sqrt{x} + \sqrt{y}$, $v(x, y) = \sqrt{x} - \sqrt{y}$:

$$xz_{xx} - yz_{yy} = 0.$$

[1,5 bodu]

Ukázkový test

TEST I.

1. Základní algebraické struktury
Je dána tříprvková množina $M := \{\heartsuit, \bigcirc, \triangle\}$. Definujte na této množině operaci $+$ tak, aby

a) $(M, +)$ byla grupou.

b) $(M, +)$ nebyla grupou.

Zdůvodněte.

2. Vektorové prostory a podprostory

a) Uveďte příklad dvou disjunktních vektorových podprostorů v $\mathbf{R}^3$.

b) Uveďte příklad tří netriviálních podprostorů v $P[3]$ takových, že jejich přímý součet je celý prostor $P[3]$.

3. Skalární součin
V prostoru $P_2[x]$ je skalární součin definován vztahem

$$\langle p(x)|q(x)\rangle = p(0)q(0) + p(1)q(1) + p(2)q(2),$$

dokažte, že se jedná o skalární součin.

4. Skalární součin
Určete matici skalárního součinu z předchozího příkladu v bázi $B = \{1, x, x^2\}$.

5. Projekce a ortogonální doplněk
Určete ortogonální doplněk $L_\perp$ k podprostoru

$$L = \left[\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

ve vektorovém prostoru $\mathrm{Mat}_{2\times 2}$ všech čtvercových matic řádu dva nad $\mathbf{R}$, se skalárním součinem definovaným $\langle A|B\rangle = \mathrm{tr}(A \cdot B^T)$.

6. Projekce a ortogonální doplněk
Určete ortogonální projekci vektoru

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

do podprostoru L resp. do $L_\perp$ z předchozího příkladu.

7. Lineární zobrazení
Lineární zobrazení $f : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ je dáno předpisem

$$f(x, y, z, w) = (x + y, x - y, x).$$

Zapište jeho matici ve standardních bázích a určete jádro a image.

8. Křivočaré souřadnice
Je dána transformace souřadnic $f : [0, 2\pi) \times (0, \infty) \ni (\varphi, \varrho) \to (x, y) \in \mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} x &= a\varrho \sin(\varphi + \frac{\pi}{4}) \\ y &= b\varrho \cos(\varphi + \frac{\pi}{4}) \end{aligned}$$

Nalezněte inverzní transformaci a zakreslete souřadnicové křivky $\varrho =$ konst., $\varphi =$ konst.

9. Vlastní hodnoy a vlastní vektory
Lineární zobrazení $f : P_2[x] \to P_2[x]$ je dáno vztahem

$$f(ax^2 + bx + c) = (ax + b).$$

Určete jeho vlastní hodnoty a vlastní vektory.

10. Uveďte příklad ... Uveďte příklad lineárního zobrazení $\varphi : P[2] \to P[2]$, jehož vlastní vektory jsou pouze $t \cdot (x+1) + s \cdot (x^2+1)$,

$t, s \in \mathbf{R}-\{0\}$. Zadejte ho předpisem $\varphi(ax^2+bx+c) = \ldots$ i maticí ve standardní bázi $(x^2, x, 1)$. Existuje báze, ve které je toto zobrazení reprezentováno diagonální maticí?

ŘEŠENÍ:

1a. Můžeme například definovat $\bigcirc+\heartsuit = \heartsuit+\bigcirc = \heartsuit$, $\bigcirc+\triangle = \triangle+\bigcirc = \triangle$, $\bigcirc+\bigcirc = \bigcirc$, $\triangle+\heartsuit = \heartsuit+\triangle = \bigcirc$, $\heartsuit+\heartsuit = \triangle$ a $\triangle+\triangle = \heartsuit$. Axiomy grupy jsou zjevně splněny: operace je uzavřená, asociativita (rozepsáním), neutrálním prvkem je $\bigcirc$, ke každému prvku existuje inverzní — $\heartsuit$ a $\triangle$ jsou navzájem inverzní prvky.

1b. Například operace definovaná takto $\bigcirc + \heartsuit = \bigcirc$, $\heartsuit + \heartsuit = \bigcirc$, $\heartsuit + \bigcirc = \heartsuit$, doplněná čímkoli dalším už zjevně nesplňuje například asociativitu $(\heartsuit + \heartsuit) + \heartsuit \neq \heartsuit + (\heartsuit + \heartsuit)$.

2a. Takové dva podprostory neexistují, neboť každý podprostor musí obsahovat nulový vektor, ten tedy bude v průniku libovolných dvou podprostorů.

2b. Např. $V_1 = [1]$, $V_2 = [x]$, $V_3 = [x^2, x^3]$.

3. Prověřením axiomů skalárního součinu.

4.

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 9 \\ 5 & 9 & 17 \end{pmatrix}$$

5.

$$L_\perp = \left[\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right].$$

6.

$$A_L = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_\perp = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

7.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\mathrm{Ker} f = [(0,0,0,1), (0,0,1,0)]$, $\mathrm{Im} f = [(1,1,1), (1,-1,0)]$.

8. Souřadnicové křivky jsou elipsy se středem v počátku a poměrem poloos a/b a přímky procházející počátkem. Inverzní transformace je dána

$$\begin{aligned} \varrho &= \sqrt{\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}} \\ \varphi &= \operatorname{arctg}\frac{xb}{ya}-\frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

9. Zobrazení má jedinou vlastní hodnotu $\lambda = 0$, vlastními vektory jsou všechny vektory z jádra zobrazení $\mathrm{Ker} f = [1]$.

10. Zobrazení diagonalizovatelné není, neboť z vlastních vektorů nelze utvořit bázi. Je vidět, že vlastní vektory tvoří dourozměrný podprostor, jsou tedy příslušné téže vlastní hodnotě, další nezávislý vlastní vektor nemáme, proto musí být vlastní hodnota trojnásobná. Zvolíme-li trojnásobnou vlastí hodnotu $\lambda = 0$, pak $\varphi(x^2+1) = 0$, $\varphi(x+1) = 0$. Dále můžeme zvolit například $\varphi(x^2) = x^2 + 1$. Zobrazení je tímto již jednoznačně určeno a jeho matice ve standardní bázi je:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix},$$

předpis: $\varphi(ax^2 + bx + c) = (a + b - c)x^2 + (a + b - c)$.

Okruhy otázek k ústní zkoušce

ZÁKLADNÍ ALGEBRAICKÉ STRUKTURY

– grupa
– okruh
– těleso a pole
– vektorový prostor
– příklady

VEKTOROVÉ PROSTORY A PODPROSTORY

– definice vektorového prostoru
– definice vektorového podprostoru
– lineární závislost a nezávislost, báze, dimenze, lineární obal
– průnik a součet podprostorů, přímý součet
– doplňek k podprostoru
– rozklad vektoru do dvou podprostorů, diskuze jednoznačnosti tohoto rozkladu
– příklady

SKALÁRNÍ SOUČIN

– definice skalárního součinu
– reprezentace skalárního součinu v bázích, matice skalárního součinu a její vlastnosti, transformační vztah
– norma vektoru, odchylka dvou vektorů
– vlastnosti skalárního součinu a normy
– ortogonalita vektorů, ortogonalizační proces
– ortogonální doplněk k podprostoru
– příklady

ORTOGONÁLNÍ PROJEKCE

- skalární součin a ortogonálnost vektorů
- ortogonální doplněk k podprostoru
- ortogonální projekce a komponenta vektoru
- matice projekce, k čemu slouží a jak ji spočteme
- příklady

LINEÁRNÍ ZOBRAZENÍ

- definice lineárního zobrazení
- reprezentace lineárního zobrazení v bázích, transformační vztah
- jádro a obraz lineárního zobrazení, hodnost a defekt
- součet dvou lineárních zobrazení, skalární násobek lineárního zobrazení a skládání dvou lineárních zobrazení
- příklady

LINEÁRNÍCH TRANSFORMACE A VLASTNÍ VEKTORY

- definice vlastního vektoru a vlastní hodnoty
- jak určíme vlastní hodnoty a vlastní vektory
- diskuse diagonální reprezentace lineární transformace
- příklady

LINEÁRNÍ TRANSFORMACE V PROSTORECH SE SKALÁRNÍM SOUČINEM

- samoadjungovaná a symetrická lineární transformace
- vlastnosti samoadjungované a symetrické lineární transformace
- ortogonální lineární transformace
- vlastnosti ortogonální lineární transformace
- příklady

DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE PRVNÍHO ŘÁDU

– co je to diferenciální rovnice, řešení, úplné řešení, integrální křivka
– rovnice se separovatelnými proměnnými, řešení
– rovnice převoditelné na rovnici se separovatelnými proměnnými, řešení
– lineární rovnice prvního řádu a její řešení
– exaktní rovnice, řešení
– příklady

SOUSTAVA LINEÁRNÍCH ROVNIC PRVNÍHO ŘÁDU A LINEÁRNÍ ROVNICE DRUHÉHO ŘÁDU

– co je to soustava lineárních rovnic prvního řádu
– řešení soustavy, princip superpozice
– lineární rovnice druhého řádu
– řešení rovnice druhého řádu, princip superpozice
– příklady

FUNKCE VÍCE PROMĚNNÝCH

– co je to funkce více proměnných
– definiční obor, graf funkce, vrstevnice
– limita a spojitost funkce více proměnných
– parciální derivace a derivace ve směru
– gradient a úplný diferenciál funkce více proměnných
– příklady

VEKTOROVÁ ANALÝZA

– skalární a vektorové funkce
– operace gradient, divergence a rotace, Laplaceův operátor
– některé identity vektorové analýzy
– geometrická interpretace
– příklady

KŘIVOČARÉ SOUŘADNICE

– kartézské souřadnice
– polární a cylindrické souřadnice
– sférické souřadnice
– souřadnicové roviny a přímky, element objemu (resp. plochy)
– transformace souřadnic, Jacobiho matice a jacobián
– příklady