

F4110
Kvantová fyzika atomárních soustav
letní semestr 2012 - 2013

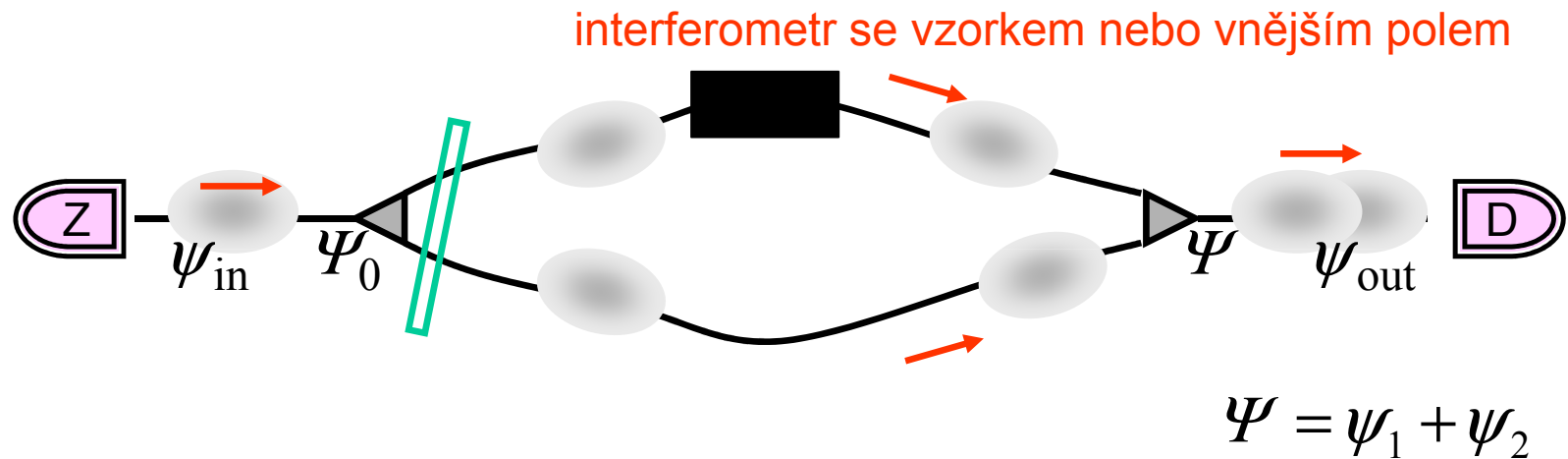
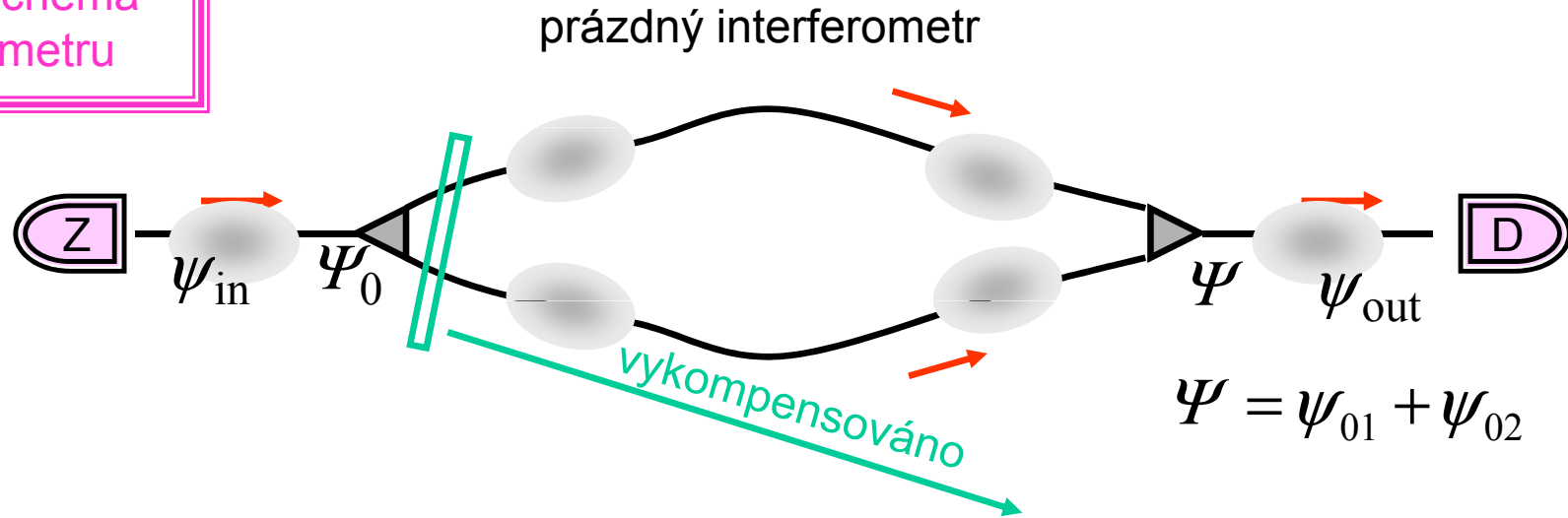
VII.
Neutronová interferometrie II.
cvičení

KOTLÁŘSKÁ 10. DUBNA 2013

III. krok
Nestacionární popis interferometru:
Průlet vlnových klubek

Intensita na výstupu interferometru III: průlet vlnového klubka

Obecné schema interferometru



Interference vlnových klubek: samotné klubko

Popis svazku pomocí klubek je vlastně propoj mezi částicemi v reaktoru a vlnami v interferometru. Klubko se hodí tak nějak do obojích míst.

TŘI KROKY (1D klubka)

krok 1. stojící klubko

$$\varphi(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \cdot a(k) \cdot e^{ikx}$$

krok 2. klubko s nenulovou hybností

$$\psi(x) = \varphi(x) e^{ik_0x} = \int \frac{dk}{2\pi} \cdot a(k) \cdot e^{i(k+k_0)x} = \int \frac{dk}{2\pi} \cdot \underbrace{a(k-k_0)}_{c(k)} \cdot e^{ikx}$$

krok 3. klubko uvedeme do pohybu

$$\Psi(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \cdot c(k) \cdot e^{i(kx-\omega(k)t)}$$

Toto platí pro každou volbu počáteční vlnové funkce.

Co je "klubko"? Má omezený rozsah v k -prostoru

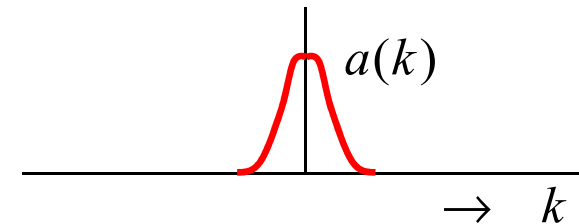
Interference vlnových klubek: samotné klubko

Popis svazku pomocí klubek je vlastně propoj mezi částicemi v reaktoru a vlnami v interferometru. Klubko se hodí tak nějak do obojích míst.

TŘI KROKY (1D klubka)

krok 1. stojící klubko

$$\varphi(x) = \int \frac{dk}{2\pi} \cdot a(k) \cdot e^{ikx}$$

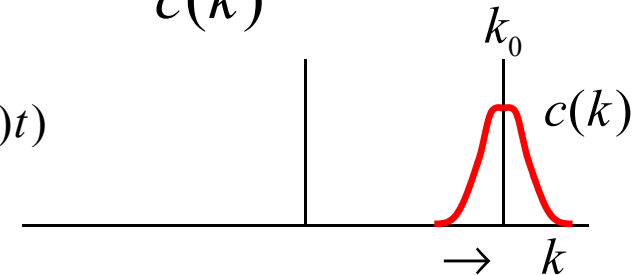


krok 2. klubko s nenulovou hybností

$$\psi(x) = \varphi(x) e^{ik_0x} = \int \frac{dk}{2\pi} \cdot a(k) \cdot e^{i(k+k_0)x} = \int \frac{dk}{2\pi} \cdot \underbrace{a(k-k_0)}_{c(k)} \cdot e^{ikx}$$

krok 3. klubko uvedeme do pohybu

$$\Psi(x,t) = \int \frac{dk}{2\pi} \cdot c(k) \cdot e^{i(kx-\omega(k)t)}$$



Toto platí pro každou volbu počáteční vlnové funkce.

Co je "klubko"? Má omezený rozsah v k -prostoru

Interference vlnových klubek: samotné klubko

Pak můžeme provést běžnou klubkovou transformací

$$\Psi(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \cdot c(k) \cdot e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

$$\omega(k) = \varepsilon(\hbar k) / \hbar = \frac{\hbar}{2m} \cdot k^2$$

$$= \int \frac{dq}{2\pi} \cdot c(k_0 + q) \cdot e^{i((k_0 + q)x - \omega(k_0 + q)t)}$$

$$= e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int \frac{dq}{2\pi} \cdot a(q) \cdot e^{i(q(x - v_0 t) - \cancel{\omega(q)t})}$$

zanedbáme rozplývání:
linearisace v (malém) q

$$\approx e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int \frac{dq}{2\pi} \cdot a(q) \cdot e^{iq(x - v_0 t)}$$

$$\Psi(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \times \phi(x - v_0 t)$$

$$(k_0 + q)x - \omega(k_0 + q)t = (k_0 + q)x - \frac{\hbar}{2m} \cdot (k_0 + q)^2$$

$$= (k_0 x - \frac{\hbar}{2m} k_0^2) + qx - \frac{\hbar}{m} k_0 q - \frac{\hbar}{2m} q^2$$

Interference vlnových klubek: samotné klubko

Pak můžeme provést běžnou klubkovou transformaci

$$\Psi(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \cdot c(k) \cdot e^{i(kx - \omega(k)t)}$$

$$\omega(k) = \varepsilon(\hbar k) / \hbar = \frac{\hbar}{2m} \cdot k^2$$

$$= \int \frac{dq}{2\pi} \cdot c(k_0 + q) \cdot e^{i((k_0 + q)x - \omega(k_0 + q)t)}$$

$$= e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int \frac{dq}{2\pi} \cdot a(q) \cdot e^{i(q(x - v_0 t) - \cancel{\omega(q)t})}$$

zanedbáme rozplývání:
linearisace v (malém) q

$$\approx e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \int \frac{dq}{2\pi} \cdot a(q) \cdot e^{iq(x - v_0 t)}$$

$$\Psi(x, t) = e^{i(k_0 x - \omega(k_0)t)} \times \varphi(x - v_0 t)$$

nosná vlna

×

obálka klubka

$$e^{ik_0(x - u_0 t)}$$

×

$$\varphi(x - v_0 t)$$

$$u_0 = \frac{\omega(k_0)}{k_0} = \frac{\hbar}{2m} k_0$$

$$v_0 = \frac{d\omega(k_0)}{dk_0} = \frac{\hbar}{m} k_0 = 2u_0$$

fázová rychlost

grupová rychlost

Interference vlnových klubek: zpožděné klubko ve vnějším potenciálu

Známe $\Delta\Phi(k)$; k snadno přepočteme na energii pomocí

$$\Psi_1(x, t) = e^{i(k_0x - \omega(k_0)t)} \times \varphi(x - v_0t)$$

$$\omega(k) = \varepsilon(\hbar k) / \hbar = \frac{\hbar}{2m} \cdot k^2$$

$$\Psi_2(x, t) = \int \frac{dk}{2\pi} \cdot c(k) \cdot e^{i(kx + \Delta\Phi(k) - \omega(k)t)}$$

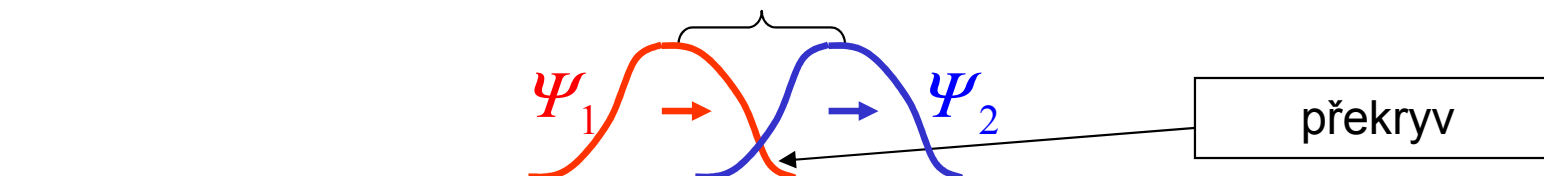
$$= \int \frac{dq}{2\pi} \cdot c(k_0 + q) \cdot e^{i((k_0 + q)x + \Delta\Phi(k_0 + q) - \omega(k_0 + q)t)}$$

$$\approx e^{i(k_0x + \Delta\Phi(k_0) - \omega(k_0)t)} \int \frac{dq}{2\pi} \cdot a(q) \cdot e^{iq(x + \frac{d}{dk} \Delta\Phi(k_0) - v_0t)}$$

$$\Psi_2(x, t) = e^{i(k_0x + \Delta\Phi(k_0) - \omega(k_0)t)} \times \varphi(x + \frac{d}{dk} \Delta\Phi(k_0) - v_0t)$$



DRÁHOVÝ POSUN Δx



Interference vlnových klubek: výpočet intenzity

Časově závislá intenzita

$$I(t) = |\Psi_1(t) + \Psi_2(t)|^2 = |\Psi_1(t)|^2 + |\Psi_2(t)|^2 + 2 \operatorname{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]$$

Po vystředování po časech (to odpovídá pozorování)

$$I \propto 1 + V \operatorname{Re}[e^{i\Delta\Phi(k_0)} \Gamma(\frac{d}{dk} \Delta\Phi(k_0))]$$

$$\Gamma(x) = \int \frac{dq}{2\pi} \cdot |c(k_0 + q)|^2 \cdot e^{iqx}$$

spektrální
intenzita
klubka

TO ODVODÍME

Interference vlnových křibek: výpočet intensity

$$I(t) = |a_1\Psi_1(t) + a_2\Psi_2(t)|^2 = \underbrace{|a_1\Psi_1(t)|^2 + |a_2\Psi_2(t)|^2}_{\int dx |\Psi_{1,2}(t)|^2 = 1} + \underbrace{2a_1a_2 \operatorname{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]}_V$$

$$\int dt |\Psi_1(x_{\text{OBS}}, t)|^2 = \int dt |\varphi(x_{\text{OBS}} - v_0 t)|^2 = v_0^{-1} \int d\xi |\varphi(\xi)|^2$$

$$\int dt \operatorname{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)] = \operatorname{Re}[e^{i\Delta\Phi(k_0)} \varphi^*(x - v_0 t) \varphi(x + \frac{d}{dk} \Delta\Phi(k_0) - v_0 t)]$$

$$= \int dt \operatorname{Re}[e^{i\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{dq}{2\pi} \cdot a(q) \cdot e^{-iq(x-v_0 t)} \int \frac{d\bar{q}}{2\pi} \cdot a(\bar{q}) \cdot e^{i\bar{q}(x + \frac{d}{dk} \Delta\Phi(k_0) - v_0 t)}]$$

$$= \operatorname{Re}[e^{i\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{dq}{2\pi} \cdot a(q) \cdot \int \frac{d\bar{q}}{2\pi} \cdot a(\bar{q}) \cdot e^{i\bar{q} \frac{d}{dk} \Delta\Phi(k_0)} \boxed{\int dt e^{-i(q-\bar{q})(x-v_0 t)} } \square \frac{2\pi}{v_0} \delta(q-\bar{q})]$$

$$= \frac{1}{v_0} \operatorname{Re}[e^{i\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{dq}{2\pi} \cdot |a(q)|^2 e^{i\bar{q} \frac{d}{dk} \Delta\Phi(k_0)}]$$

Interference vlnových křubek: výpočet intenzity

$$I(t) = |a_1\Psi_1(t) + a_2\Psi_2(t)|^2 = \underbrace{|a_1\Psi_1(t)|^2 + |a_2\Psi_2(t)|^2}_{\int dx |\Psi_{1,2}(t)|^2 = 1} + \underbrace{2a_1a_2}_{V} \operatorname{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)]$$

$$\int dt |\Psi_1(x_{\text{OBS}}, t)|^2 = \int dt |\varphi(x_{\text{OBS}} - v_0 t)|^2 = v_0^{-1} \int d\xi |\varphi(\xi)|^2$$

$$\int dt \operatorname{Re}[\Psi_1^*(t)\Psi_2(t)] = \operatorname{Re}[e^{i\Delta\Phi(k_0)} \varphi^*(x - v_0 t) \varphi(x + \frac{d}{dk} \Delta\Phi(k_0) - v_0 t)]$$

$$= \int dt \operatorname{Re}[e^{i\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{dq}{2\pi} \cdot a(q) \cdot e^{-iq(x-v_0 t)} \int \frac{d\bar{q}}{2\pi} \cdot a(\bar{q}) \cdot e^{i\bar{q}(x + \frac{d}{dk} \Delta\Phi(k_0) - v_0 t)}]$$

$$= \operatorname{Re}[e^{i\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{dq}{2\pi} \cdot a(q) \cdot \int \frac{d\bar{q}}{2\pi} \cdot a(\bar{q}) \cdot e^{i\bar{q} \frac{d}{dk} \Delta\Phi(k_0)} \int dt e^{-i(q-\bar{q})(x-v_0 t)}] \quad \frac{2\pi}{v_0} \delta(q-\bar{q})$$

$$= \frac{1}{v_0} \operatorname{Re}[e^{i\Delta\Phi(k_0)} \int \frac{dq}{2\pi} \cdot |a(q)|^2 e^{i\bar{q} \frac{d}{dk} \Delta\Phi(k_0)}$$

$$I \propto 1 + V \operatorname{Re}[e^{i\Delta\Phi(k_0)} \Gamma(\frac{d}{dk} \Delta\Phi(k_0))]$$

$$\Gamma(x) = \int \frac{dq}{2\pi} \cdot |c(k_0 + q)|^2 \cdot e^{iqx}$$

The end