

**F4110**  
**Fyzika atomárních soustav**  
**letní semestr 2012 - 2013**

**XII.**  
**Chladné atomy**

**KOTLÁŘSKÁ 15. KVĚTNA 2013**

# Fyzika nízkých teplot

## *Existence absolutní nuly*

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn

definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie

- Pro všechny další systémy se použije transitivnosti teploty pro tělesa v kontaktu

$$T_I = T_{III}, \quad T_I = T_{II} \Rightarrow T_{II} = T_{III}$$

-

## Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn

definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie

- Pro všechny další systémy se použije **transitivnosti teploty** pro tělesa v kontaktu

$$T_I = T_{III}, \quad T_I = T_{II} \Rightarrow T_{II} = T_{III}$$

ideální plyn

nová teploměrná látka

## *Existence absolutní nuly*

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn

definována vztahem

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije **transitivnosti teploty** pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováze)
- Absolutní nula není dostižitelná konečným procesem (**3. zákon termodyn.**)

$$S \rightarrow 0, \quad C_v \rightarrow 0, \quad \dots \text{ při } T \rightarrow 0$$

## *Existence absolutní nuly*

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn

definována vztahem

$$\frac{1}{2}m\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2}k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije **transitivnosti teploty** pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováže)
- Absolutní nula není dostižitelná konečným procesem (**3. zákon termodyn.**)

$$S \rightarrow 0, \quad C_v \rightarrow 0, \quad \dots \text{ při } T \rightarrow 0$$

- Zvláštní jevy, **makroskopické kvantové jevy**, jako supravodivost, v blízkosti nuly. Ovšem co je „blízkost“ ? Vysokoteplotní supravodivost, život, ...

## Existence absolutní nuly

- Absolutní nula teploty pro ideální plyn

definována vztahem

$$\frac{1}{2} m \langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

a podmínkou nulové kinetické energie.

- Pro všechny další systémy se použije **transitivnosti teploty** pro tělesa v kontaktu (vzájemné tepelné rovnováže)
- Absolutní nula není dostižitelná konečným procesem (**3. zákon termodyn.**)

$$S \rightarrow 0, \quad C_v \rightarrow 0, \quad \dots \text{ při } T \rightarrow 0$$

- Zvláštní jevy, **makroskopické kvantové jevy**, jako supravodivost, v blízkosti nuly. Ovšem co je „blízkost“? Vysokoteplotní supravodivost, život, ...

Porovnat teplotu s charakteristickými energiemi

$$k_B T \square E_{\text{Vazeb}}$$

nový řád

$$k_B T \square E_{\text{Excit}}$$

vymrzání

## *Teploty ve vesmíru*

Stupnice	nitra hvězd	$10^6 - 10^8$ K
	hvězdné atmosféry	$10^3 - 10^4$ K
	kometry, planety ...	$10^1 - 10^2$ K
	....	
	reliktní záření jako minimum	$\sim 2,72$ K
	mlhovina Bumerang (suhvězdí Kentaura)	1,15 K



## *Teploty ve vesmíru*

Stupnice	nitra hvězd	$10^6 - 10^8$ K
	hvězdné atmosféry	$10^3 - 10^4$ K
	komety, planety ...	$10^1 - 10^2$ K
	....	
	reliktní záření jako minimum	$\sim 2,72$ K
	mlhovina Bumerang (souhvězdí Kentaura)	1,15 K

Pozemský rekord  
-89,3°C ↔ 183.75 K

**1983 Antarktida**  
**stanice Vostok**

## *Teploty ve vesmíru*

Stupnice	nitra hvězd	$10^6 - 10^8$ K
	hvězdné atmosféry	$10^3 - 10^4$ K
	komety, planety ...	$10^1 - 10^2$ K
	....	
	reliktní záření jako minimum	$\sim 2,72$ K
	mlhovina Bumerang (suhvězdí Kentaura, objevena 1998, teplota určena 2003)	1,15 K
	důvod: rychlá expanse plynů z centrální hvězdy	

Pozemský rekord  
-89,3°C ↔ 183.75 K

1983 Antarktida  
stanice Vostok



## *Nízké teploty v laboratoři (jen výběr !!)*

K	Teplotní rekordy	Objevy	Teorie
	1877 <i>Pictet</i> kapalný kyslík?		
77	1895 <i>von Linde</i> kap. vzduch		
22	1898 <i>Dewar</i> kapalný vodík		
	1905 <i>von Linde</i> kap. dusík		
4,2	1908 <i>Kamerlingh-Onnes</i> kapalné helium	1911 <i>Kamerlingh-Onnes</i> supravodivost kovů	
0,3	odsávané helium		1924 <i>Einstein</i> Bose- Einsteinova kondensace
mK	1933 paramagn. demagnet. 1951 <i>H. London</i> rozpouštěcí refrigerátor	1937 <i>Kapica</i> supratekutost Helia-4	1939 <i>Landau</i> supratekutost (fenom.)
μK	1956 <i>Kurti</i> NDR (jaderná ...) 1985 <i>Hänsch</i> laserové chlazení (princip)	1972 <i>Osheroff</i> supratekutost Helia-3 1986 <i>Müller a Bednorz</i> vysokoteplot. supravodivost	1947 <i>Bogoljubov</i> teorie supratekutost (mikrosk.) 1956 <i>BCS</i> * supravodivost kovů 1975 <i>Leggett</i> supratekutost Helia-3
nK	<b>o tom dnes</b>		
pK	<b>rekord okolo 100 pK</b>	1995 <i>Wieman, ... Ketterle</i> BEC v atomových parách	

*\*Bardeen, Cooper a Schrieffer*

# Nízké teploty v laboratoři (jen výběr !!)

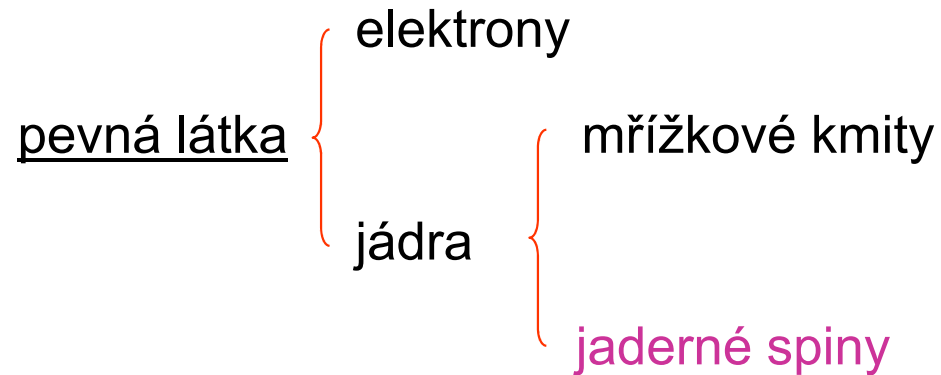
K	Teplotní rekordy	Objevy	Teorie
	1877 <i>Pictet</i> kapalný kyslík?		
77	1895 <i>von Linde</i> kap. vzduch		
22	1898 <i>Dewar</i> kapalný vodík		
	1905 <i>von Linde</i> kap. dusík		
4,2	1908 <i>Kamerlingh-Onnes</i> kapalné helium	1911 <i>Kamerlingh-Onnes</i> supravodivost kovů	
0,3	odsávané helium		1924 <i>Einstein</i> Bose- Einsteinova kondensace
mK	1933 paramagn. demagnet. 1951 <i>H. London</i> rozpouštěcí refrigerátor	1937 <i>Kapica</i> supratekutost Helia-4	1939 <i>Landau</i> supratekutost (fenom.) 1947 <i>Bogoljubov</i> teorie supratekutost (mikrosk.)
μK	1956 <i>Kurti</i> NDR (jaderná ...) 1985 <i>Hänsch</i> laserové chlazení (princip)	1972 <i>Osheroff</i> supratekutost Helia-3 1986 <i>Müller a Bednorz</i> vysokoteplot. supravodivost	1956 <i>BCS</i> * supravodivost kovů 1975 <i>Leggett</i> supratekutost Helia-3
nK	o tom dnes		
pK	rekord okolo 100 pK	1995 <i>Wieman, ... Ketterle</i> BEC v atomových parách	

*\*Bardeen, Cooper a Schrieffer*

# Jaderná adiabatická demagnetisace

# Chlazení jadernou adiabatickou demagnetisací

## NDR nuclear demagnetization refrigeration



Podsystemy v slabém tepelném kontaktu  
Prostorově se prolínají, žijí však skoro autonomně

# Chlazení jadernou adiabatickou demagnetisací

## NDR nuclear demagnetization refrigeration

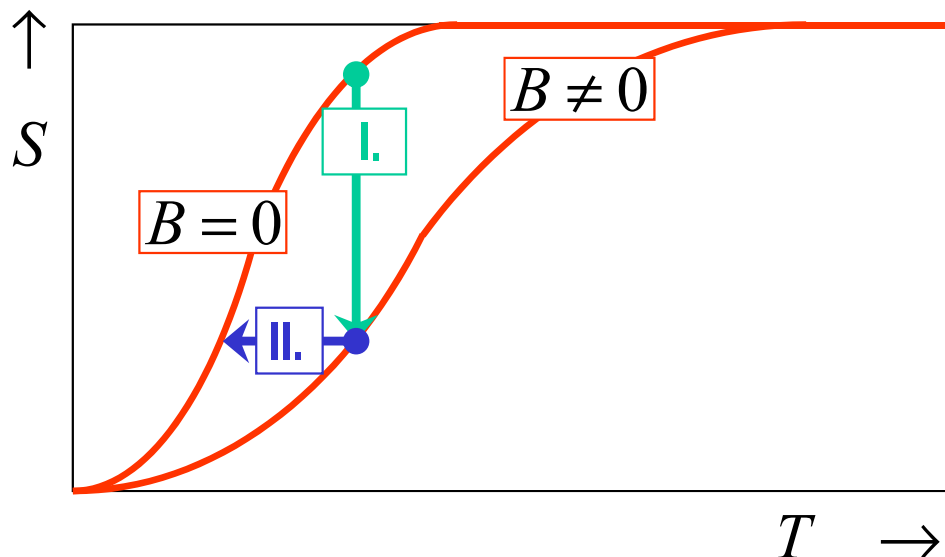
<u>pevná látka</u>	elektrony		$T_e$		
		jádra	mřížkové kmity	$T_L$	$\tau_L$
					$\tau_{LS}$
	jaderné spiny		$T_S$	$\tau_S$	

V rovnováze se teploty všech podsystémů vyrovnají.

Spin-mřížková relaxace je pomalá!

Můžeme proto generovat nerovnovážnou velmi nízkou spinovou teplotu

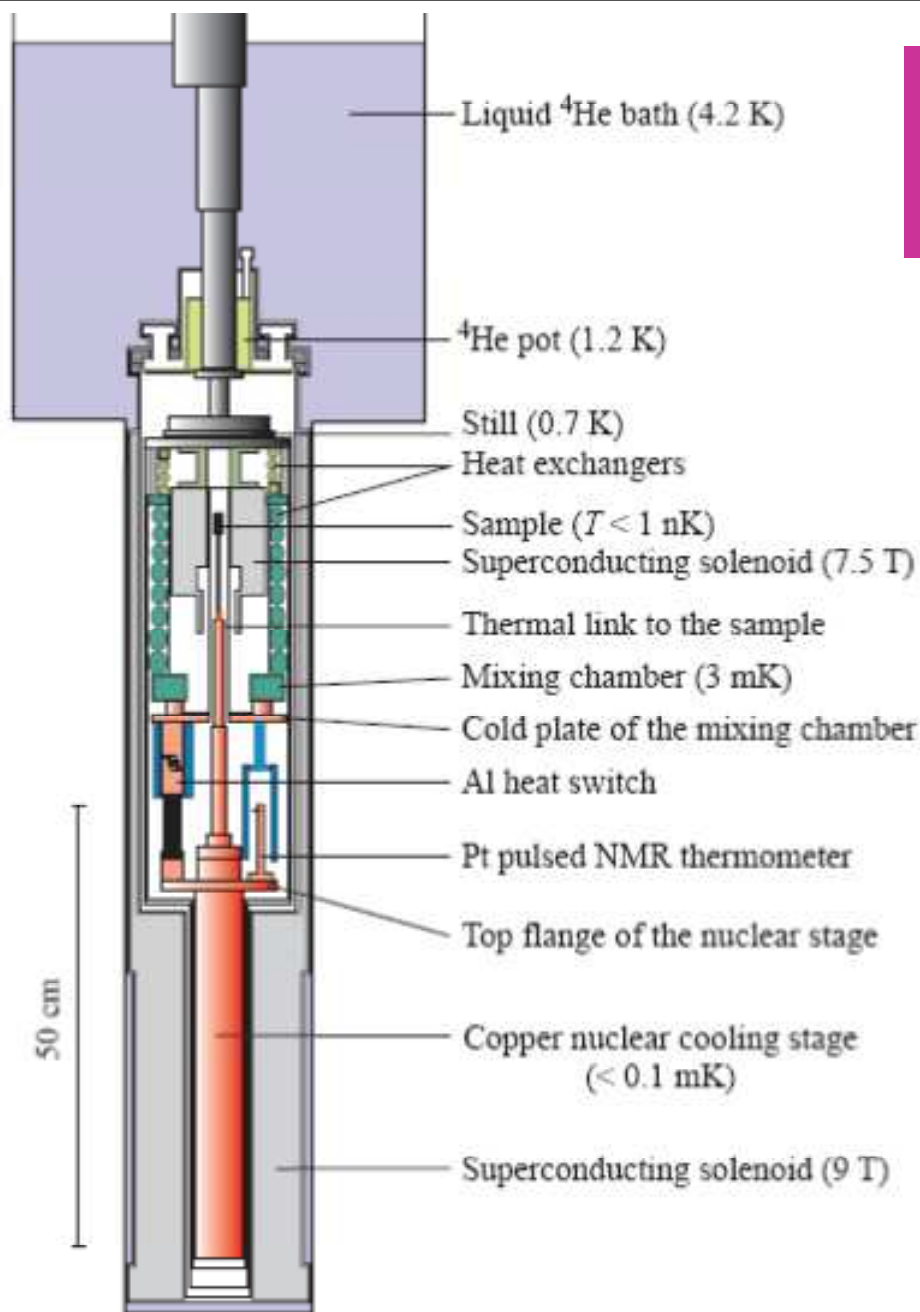
### Princip NDR



**I. KROK** *izotermická magnetizace*  
Entropie s magnetickým polem klesá  
≡ snižuje se orientační neuspořádanost

**II. KROK** *adiabatická demagnetizace*  
Teplota a vnitřní energie klesají

# Kryostat, kde byla dosažena rekordní teplota 100 pK

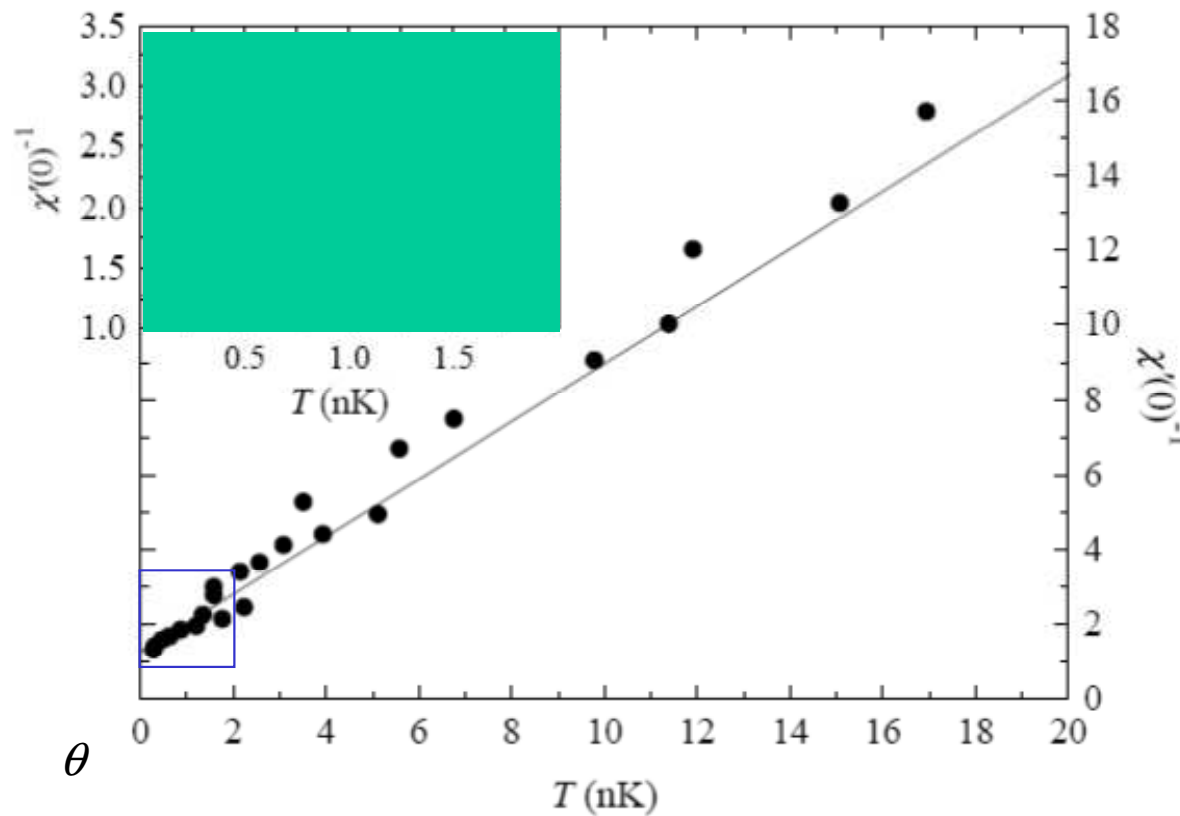


Helsinki University of Technology  
YKI, Low Temperature Group  
2000

1. Předchlazení čerpáním helia 0,7 K
2. První stupeň: rozpouštěcí refrigerátor 3 mK
3. Druhý stupeň: NDR v mědi  $< 0,1$  mK
4. Třetí stupeň: NDR v samotném vzorku: monokrystal Rh  $< 1$  nK



# Spinová magnetická susceptibilita monokrystalu rhodia



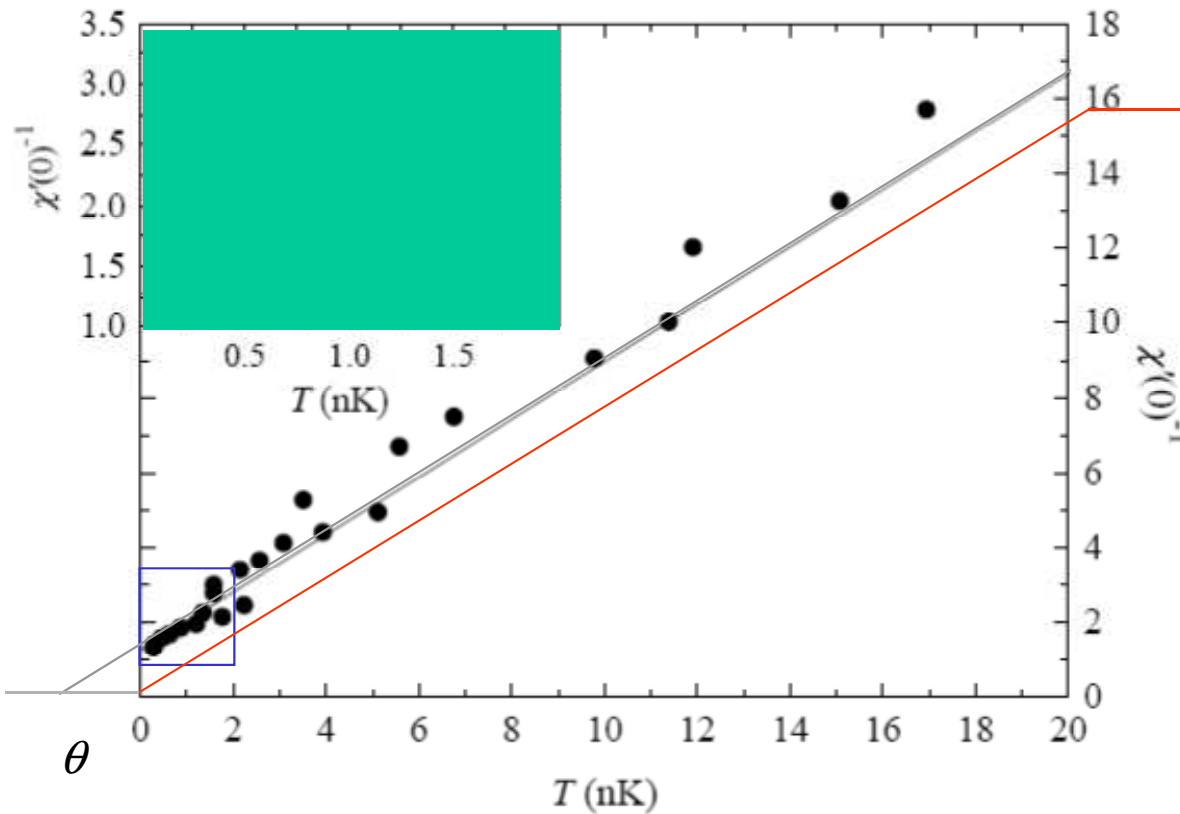
$$\chi'(0) = \frac{\lambda}{T - \theta},$$

$$\theta = -1.65 \text{ nK}$$

Curie-Weissův zákon jaderné spiny v rhodiu ... antiferomagnetické uspořádání



# Spinová magnetická susceptibilita monokrystalu rhodia



paramagnet (nezávislé spiny)

$$\chi'(0) = \frac{\lambda}{T - \theta},$$

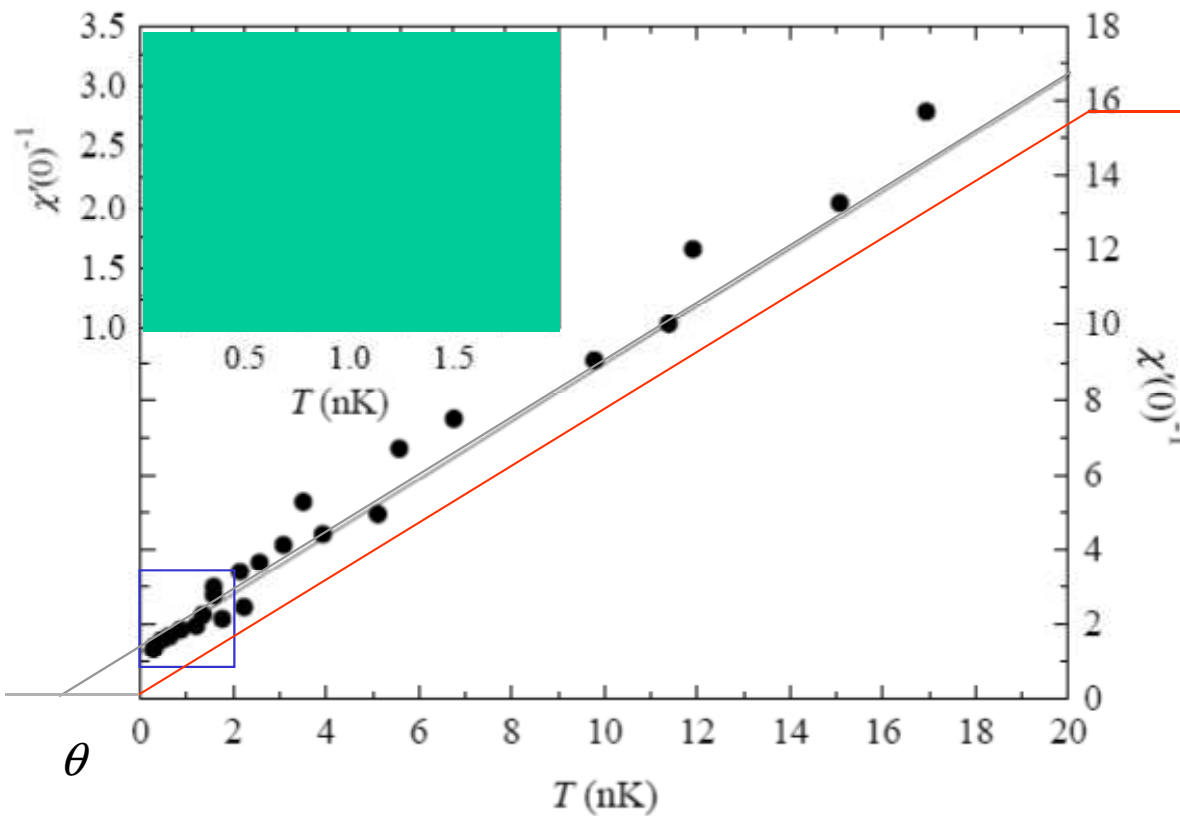
$$\theta = -1.65 \text{ nK}$$

Curieova teplota?

Curie-Weissův zákon jaderné spiny v rhodiu ... antiferomagnetické uspořádání



# Spinová magnetická susceptibilita monokrystalu rhodia



paramagnet (nezávislé spiny)

$$\chi'(0) = \frac{\lambda}{T - \theta},$$

$$\theta = -1.65 \text{ nK}$$

Néelova teplota

Curie-Weissův zákon jaderné spiny v rhodiu ... antiferomagnetické uspořádání



# Spinová magnetická susceptibilita monokrystalu rhodia

V těchto extrémních podmínkách

- vzorek je ovládán prostřednictvím spinů, na které působí magnetické pole
- sám vzorek ( jeho spinový podsystem) působí jako chladicí medium
- měření pomocí nízkofrekvenční NMR udává susceptibilitu i statickou limitu (polarisaci)
- primární veličinou je právě *polarisace*, s níž přímo souvisí *entropie* vzorku jako základní termodynamická veličina
- *teplota* je odvozena z reakce na tepelné pulsy podle schematu:

atomová polarisace  $\propto \mu_J p$  je skutečně měřena

jaderný spin pro rhodium  $I = \frac{1}{2} \Rightarrow p = w_{\uparrow} - w_{\downarrow}; \quad w_{\uparrow} + w_{\downarrow} = 1$

entropie na spin přímo z definice

$$\frac{S}{R} = -\frac{1+p}{2} \ln \frac{1+p}{2} - \frac{1-p}{2} \ln \frac{1-p}{2}$$

teplota podle základní termodynamické identity  $\Delta Q = T \Delta S$

$$S \propto -\sum w_{\alpha} \ln w_{\alpha}$$

MILAN ODEHNAL

Supravodivost  
a jiné  
kvantové  
jevy

CV

CESTA  
K VĚDĚNÍ



## **Cena Milana Odehnala**

### **Soutěž vědeckých prací mladých fyziků o Cenu Milana Odehnala**

Česká fyzikální společnost, sekce JČMF vypisuje opakovaně, zpravidla v dvouletých intervalech, soutěž vědeckých prací mladých fyziků o **Cenu Milana Odehnala**.

**Milan Odehnal** (15.12.1932 - 17.9.1988) byl vynikající experimentátor, a současně i teoretik ve fyzice nízkých teplot, jedna z nejvýznačnějších postav české fyziky šedesátých až osmdesátých let. Mezi jeho výsledky patří polarizované protonové terčičky (použití organických látek pro velké terčičky), jaderná magnetická rezonance (objev dvoukvantových přechodů, zákonitosti zakázaných přechodů ve slabých magnetických polích), slabá supravodivost a supravodivé kvantové magnetometry SQUID (měření magnetických polí lidského srdce a mozku).

# Laserové chlazení atomů

# *Nobelisté I.*



## **The Nobel Prize in Physics 1997**

"for development of methods to cool and trap atoms with laser light"



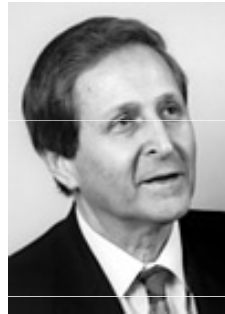
**Steven Chu**

1/3 of the prize

USA

Stanford University  
Stanford, CA, USA

b. 1948



**Claude Cohen-Tannoudji**

1/3 of the prize

France

Collège de France;  
École Normale Supérieure  
Paris, France

b. 1933  
(in Constantine,  
Algeria)



**William D. Phillips**

1/3 of the prize

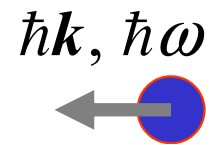
USA

National Institute of  
Standards and  
Technology  
Gaithersburg, MD,  
USA

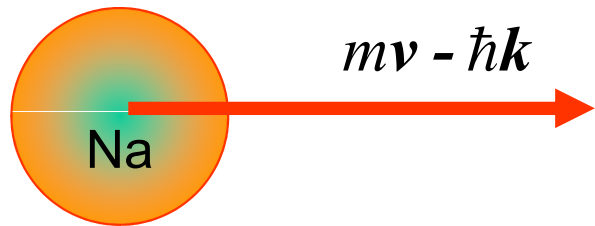
b. 1948



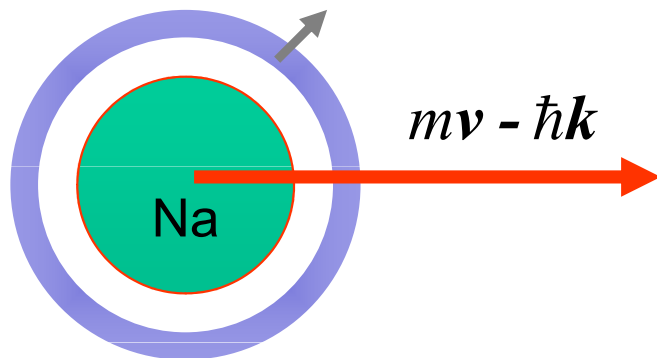
# Jednoduché schéma brzdění atomů



$\omega = \omega_{D_2} - \delta \dots$  Dopplerův posun  
podmínka absorpce



excitovaný atom,  
zmenšená hybnost

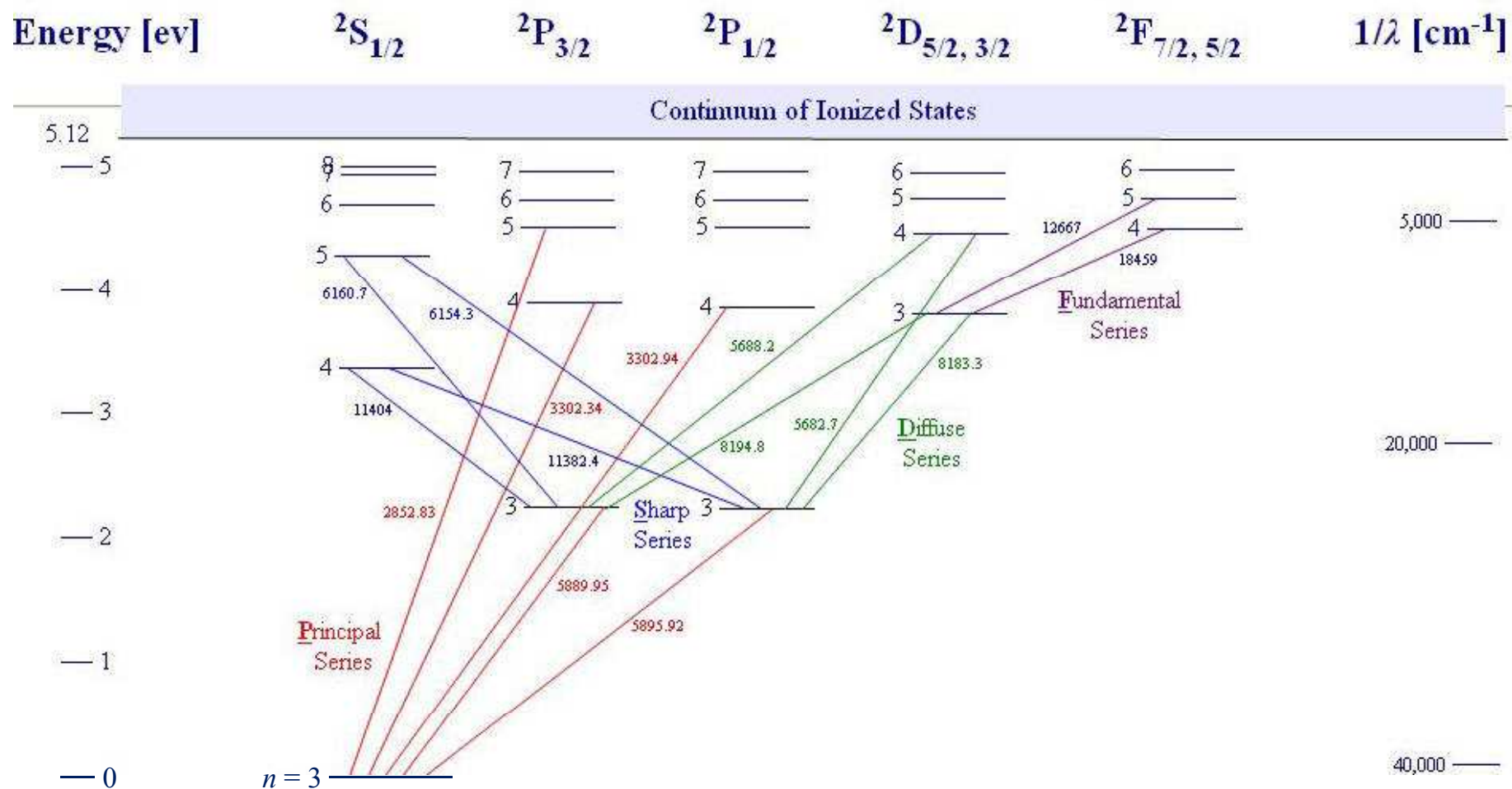


spontánní emisí se atom deexcituje,  
foton je v průměru emitován všemi  
směry

# Elektronové hladiny a optické přechody v atomu sodíku

## Grotrian Diagram for Sodium

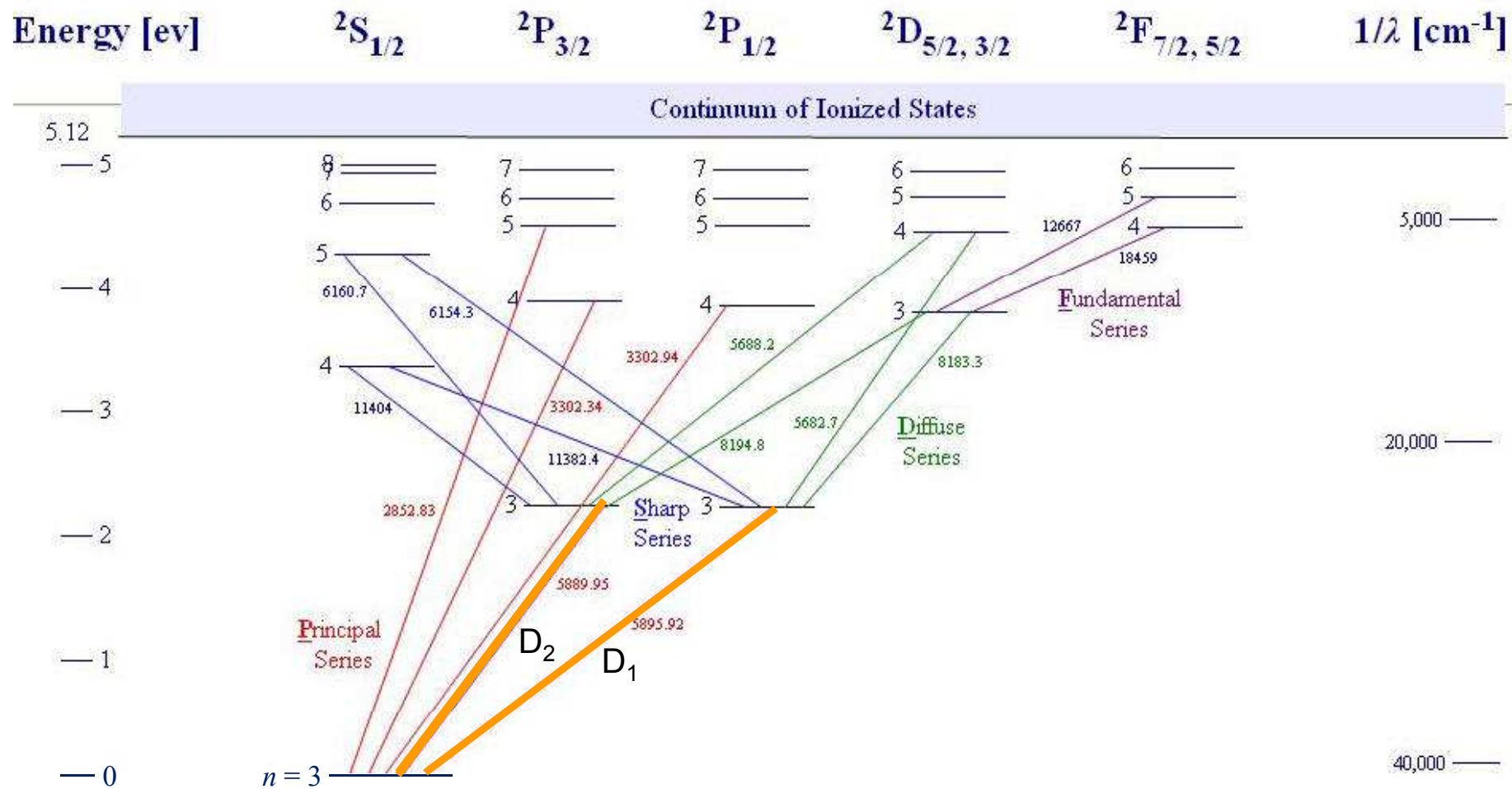
(Transition  $\lambda$ s are given in Å. Wave numbers are given in  $\text{cm}^{-1}$  for recombination photons.)



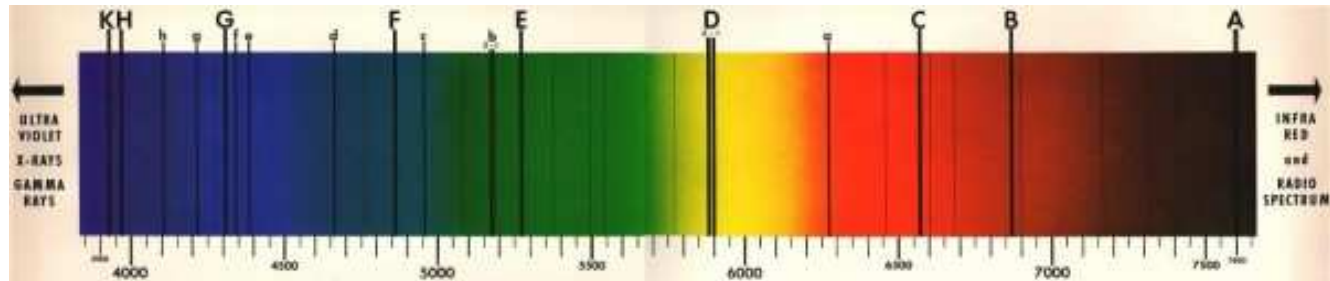
# Elektronové hladiny a optické přechody v atomu sodíku

## Grotrian Diagram for Sodium

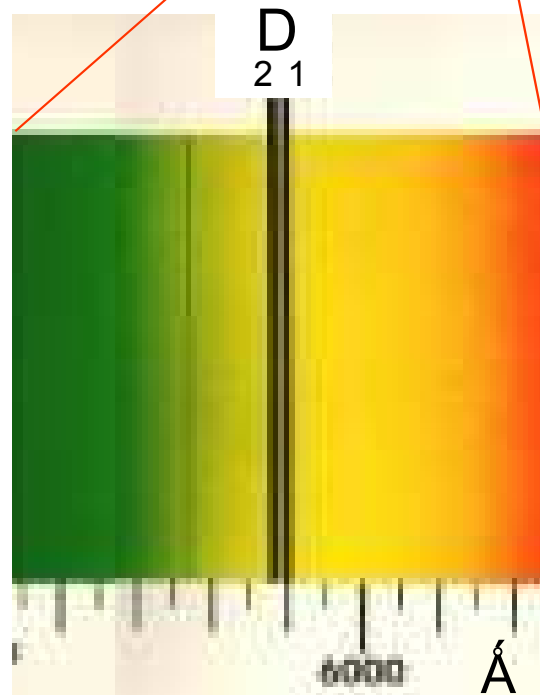
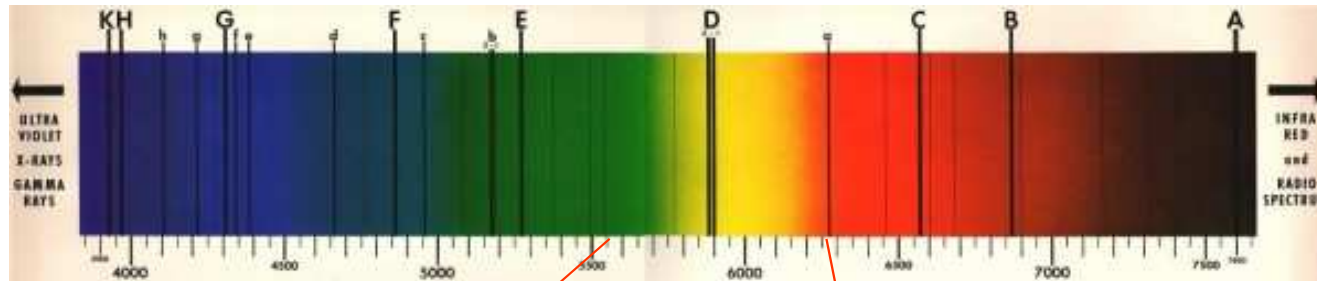
(Transition  $\lambda$ s are given in Å. Wave numbers are given in  $\text{cm}^{-1}$  for recombination photons.)



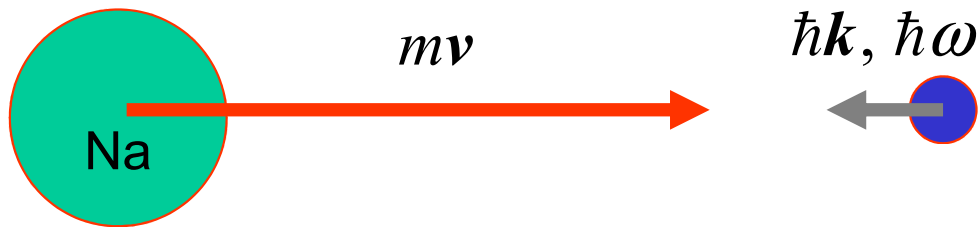
# *Fraunhoferovy čáry ve slunečním spektru*



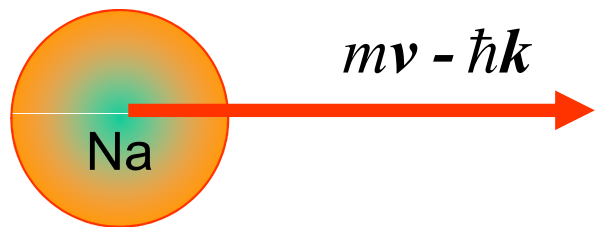
# Fraunhoferovy čáry ve slunečním spektru



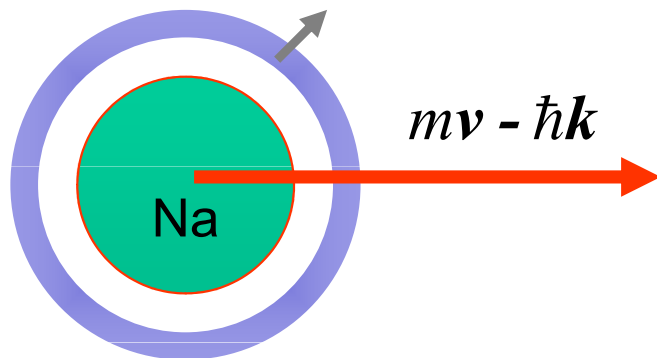
# Jednoduché schéma brzdění atomů



$\omega = \omega_{D_2} - \delta \dots$  Dopplerův posun  
podmínka absorpce

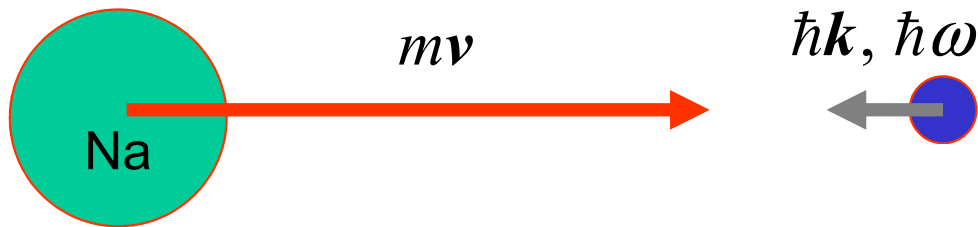


excitovaný atom,  
zmenšená hybnost



spontánní emisí se atom deexcituje,  
foton je v průměru emitován všemi  
směry

# Jednoduché schéma brzdění atomů



$\omega = \omega_{D_2} - \delta \dots$  Dopplerův posun  
podmínka absorpce

**ODHADY**

$\frac{1}{2} m \langle v_x^2 \rangle = \frac{1}{2} k_B T$

$p_{Na} = \sqrt{mk_B T}$

$= \sqrt{Auk_B T}$

$A = 23, \quad T = 300 \text{ K}$

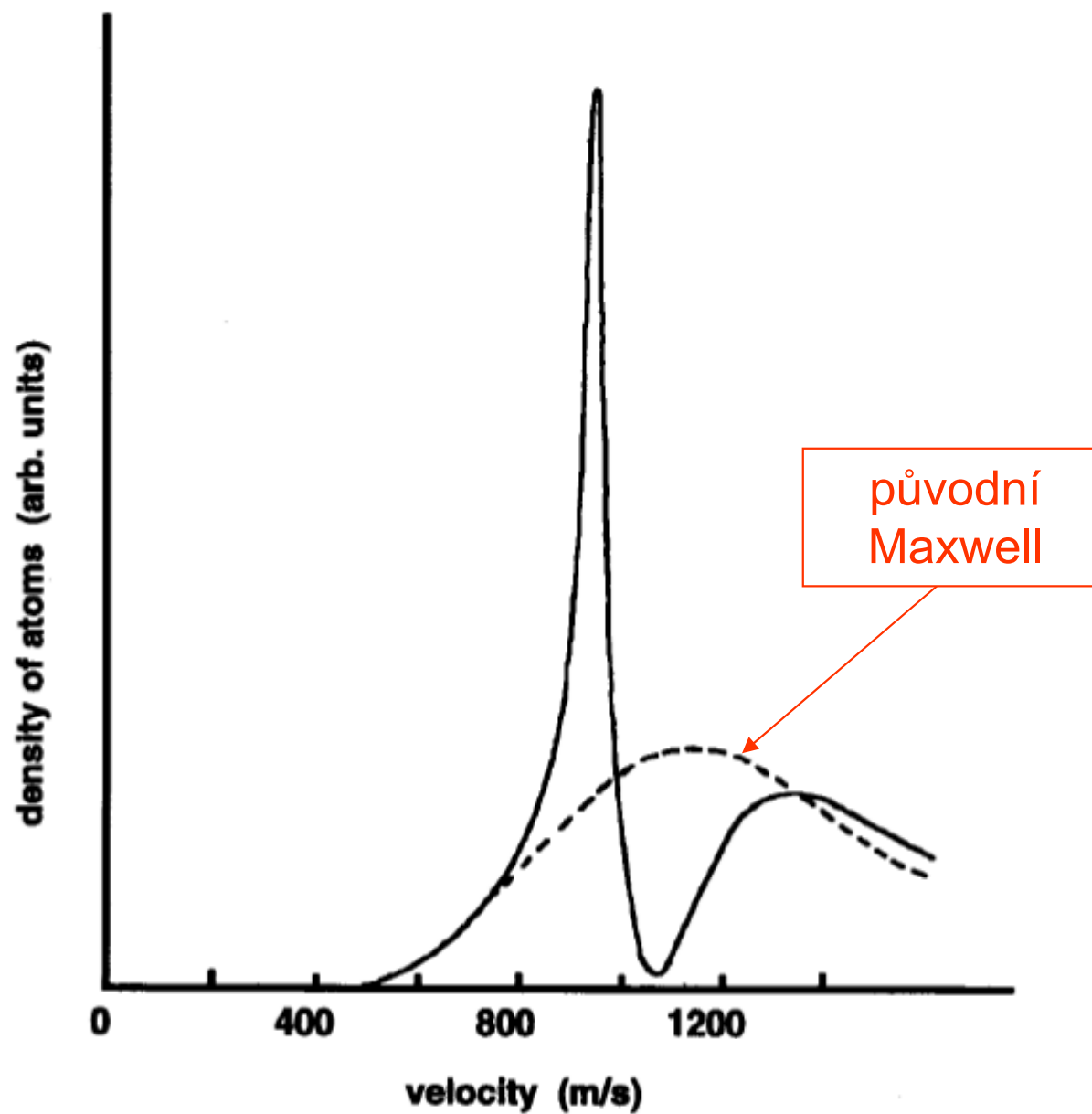
$p_{Na} = 1.26 \times 10^{-23} \text{ kgms}^{-1}$

$\hbar k = \hbar \frac{2\pi}{\lambda}$

$\lambda = 6000 \text{ \AA}$

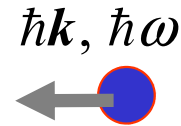
$p_{D_2} = 1.10 \times 10^{-27} \text{ kgms}^{-1}$

# Rozdělení rychlostí po průchodu brzdícím svazkem

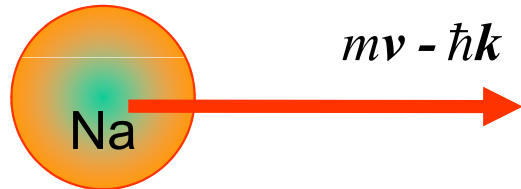




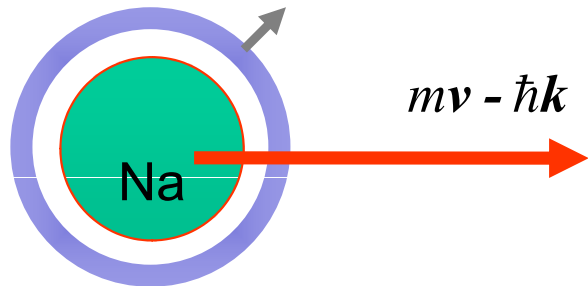
# Jednoduché schéma brzdění atomů



$\omega = \omega_{D_2} - \delta \dots$  Dopplerův posun  
podmínka absorpce



excitovaný atom,  
zmenšená hybnost



spontánní emisí se atom  
deexcituje, foton je v průměru  
emitován všemi směry

**zpomalované atomy přestávají rezonovat s laserovým paprskem**

**JE NUTNO PRŮBĚŽNĚ OBNOVOVAT NALADĚNÍ**

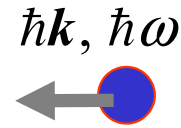
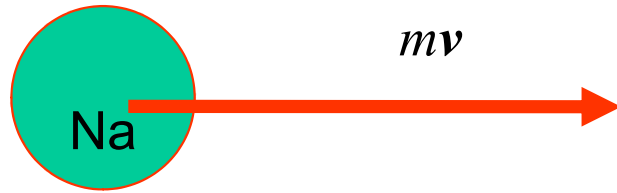
- změnou rezonanční frekvence atomů při zachování frekvence laseru

Zeeman laser cooling

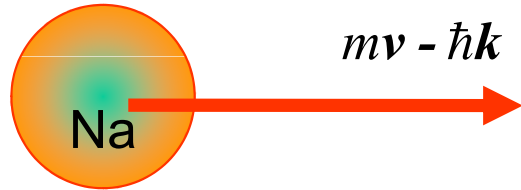
- změnou frekvence laseru zachováme rezonanci s atomy

Chirped laser cooling

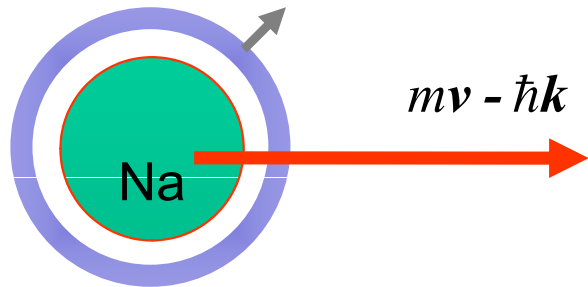
# Jednoduché schéma brzdění atomů



$\omega = \omega_{D_2} - \delta \dots$  Dopplerův posun  
podmínka absorpce



excitovaný atom,  
zmenšená hybnost



spontánní emisí se atom  
deexcituje, foton je v průměru  
emitován všemi směry

**zpomalované atomy přestávají rezonovat s laserovým paprskem**

**JE NUTNO PRŮBĚŽNĚ OBNOVOVAT NALADĚNÍ**

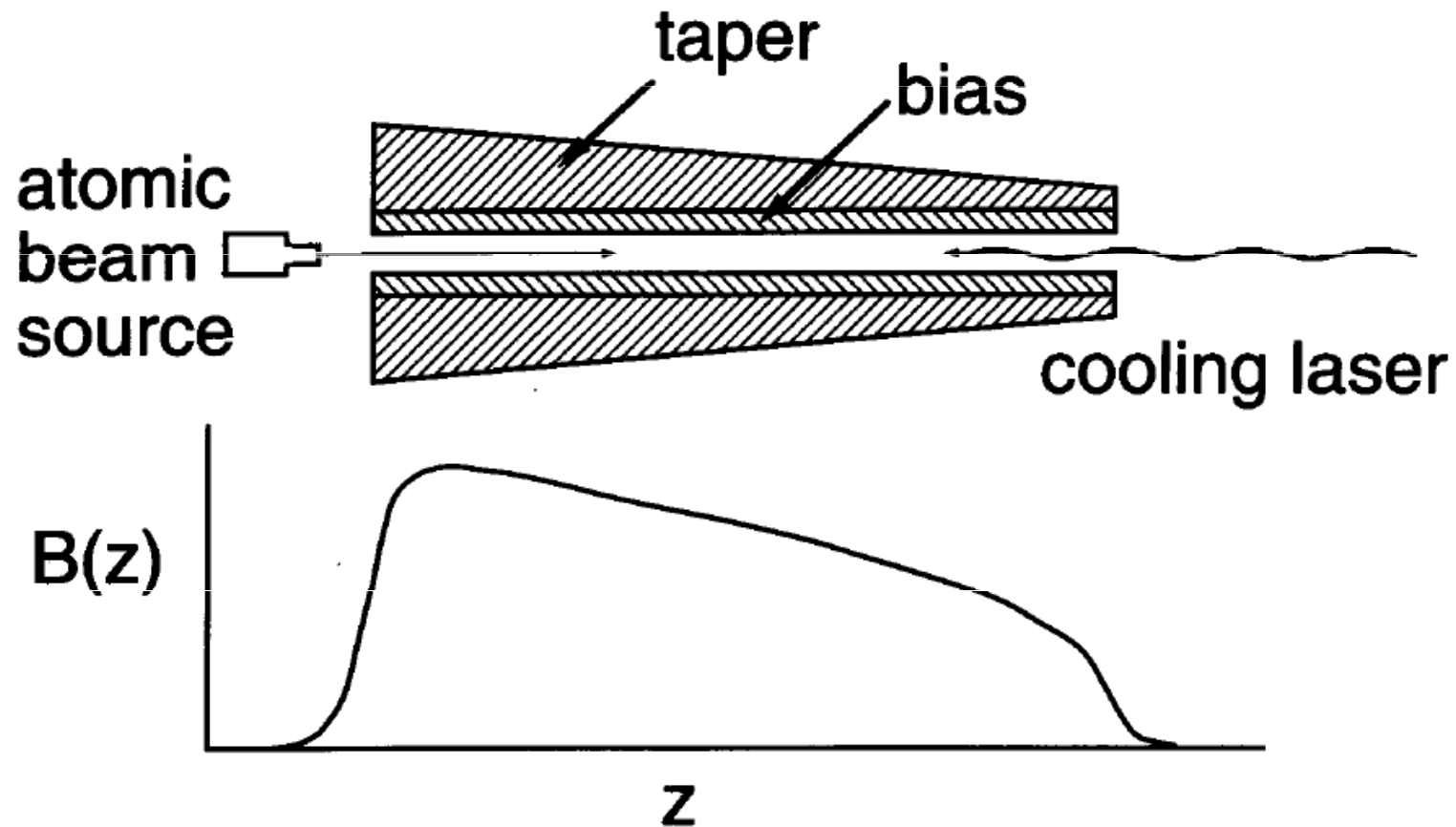
- změnou rezonanční frekvence atomů při zachování frekvence laseru
- změnou frekvence laseru zachováme rezonanci s atomy

Zeeman laser cooling

Chirped laser cooling

Phillips  
Chu

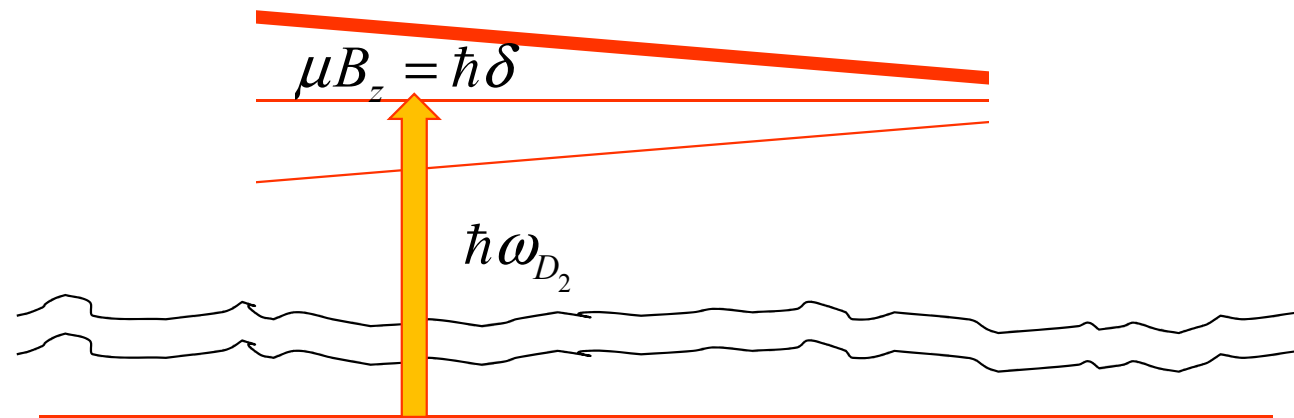
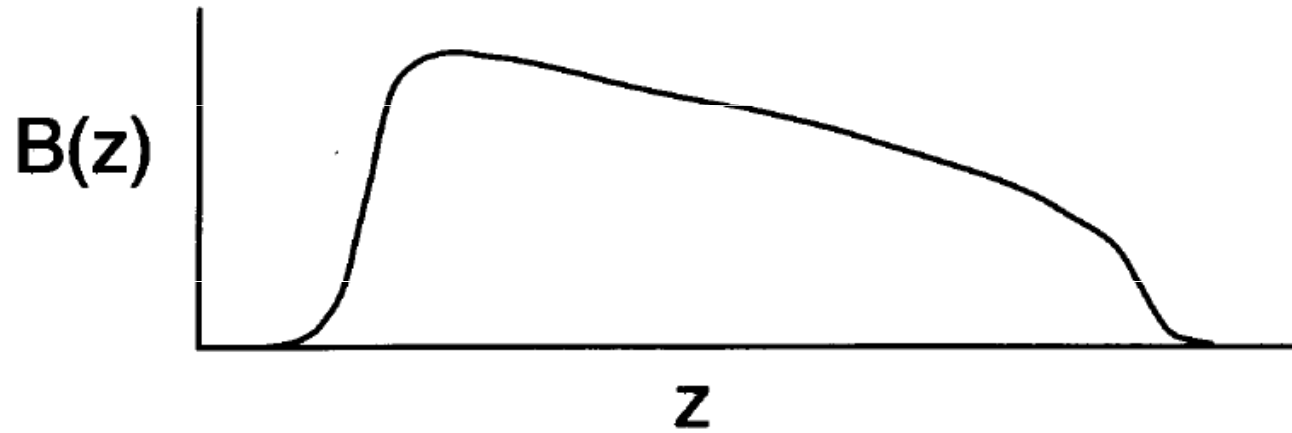
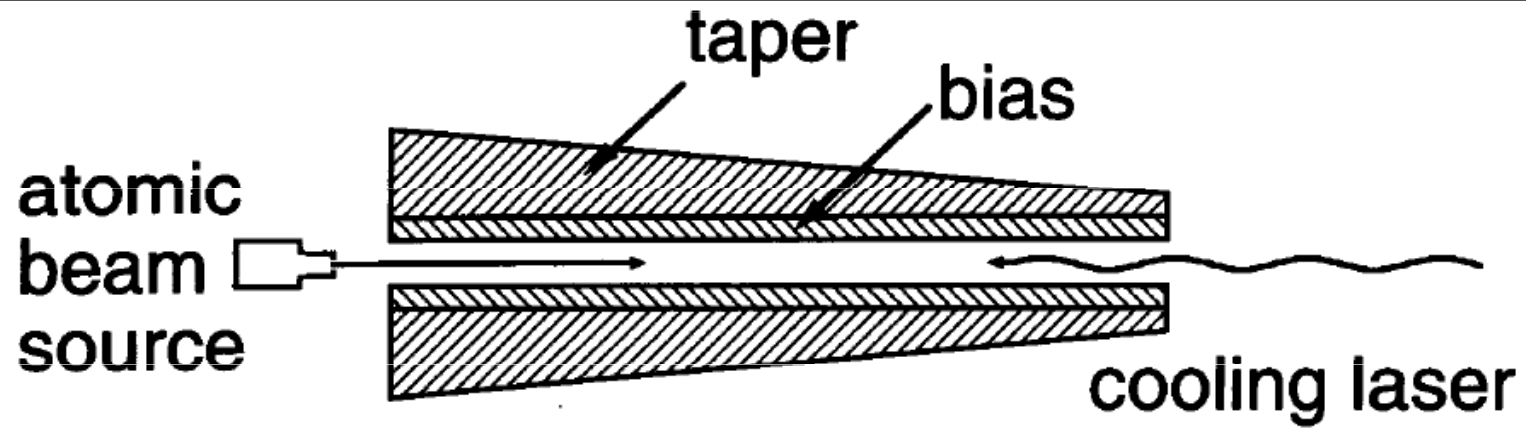
## ladění pomocí Zeemanova jevu



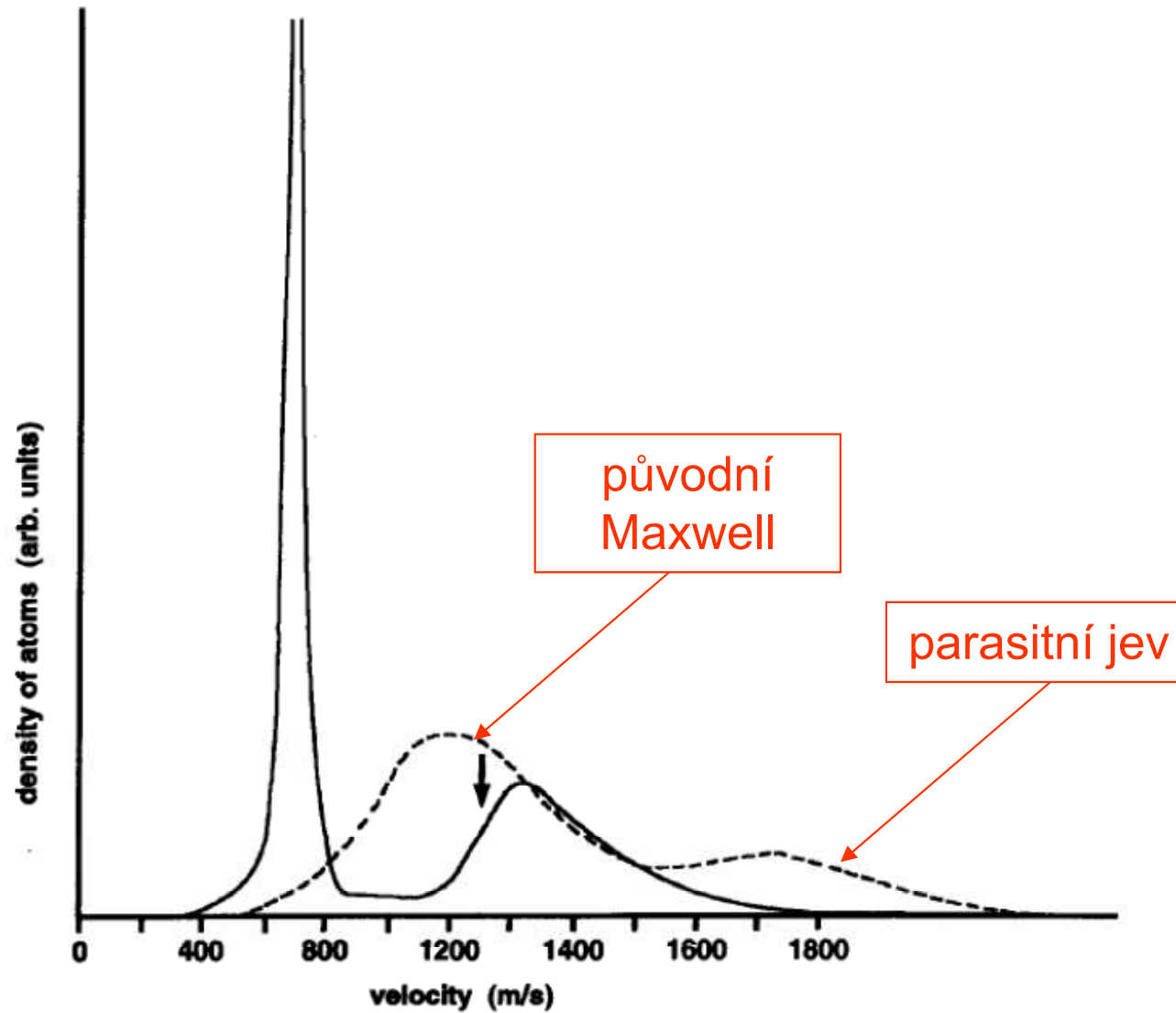
Zpomalený atom není již v resonanci (Dopplerův posun). Možno kompenzovat rozštěpením čar v magnetickém poli ... úměrně  $B$

K tomu konický solenoid

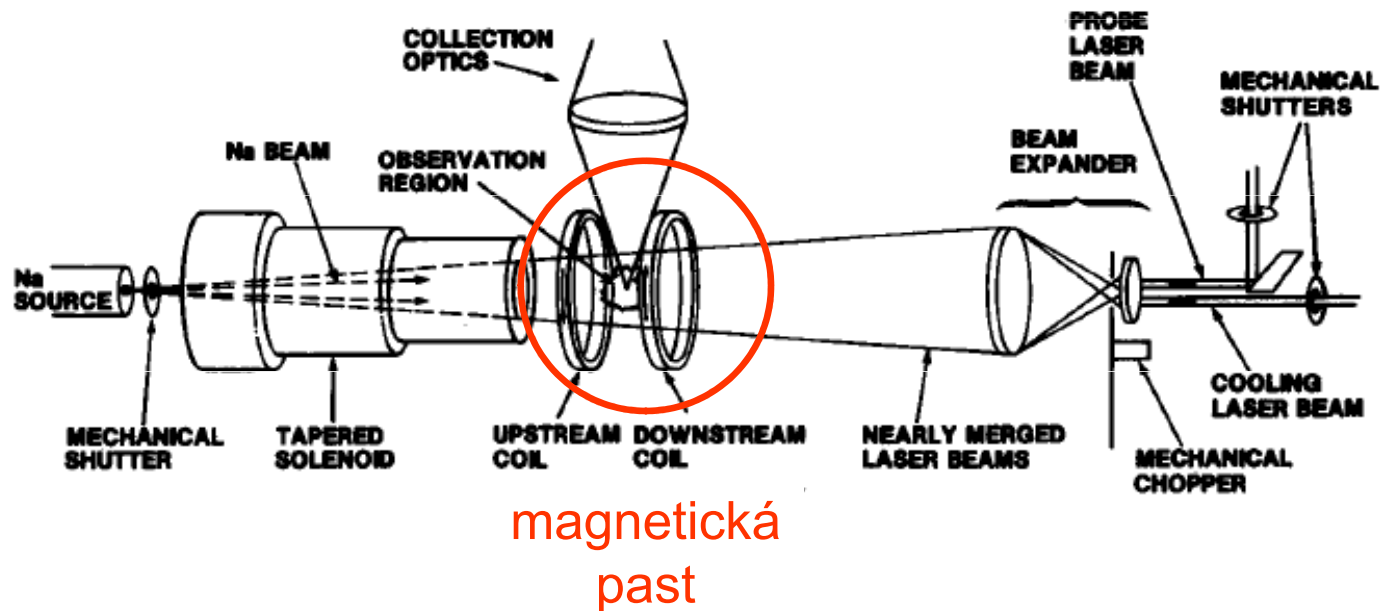
- *ladění pomocí Zeemanova jevu*



# Zlepšený brzdňný účinek

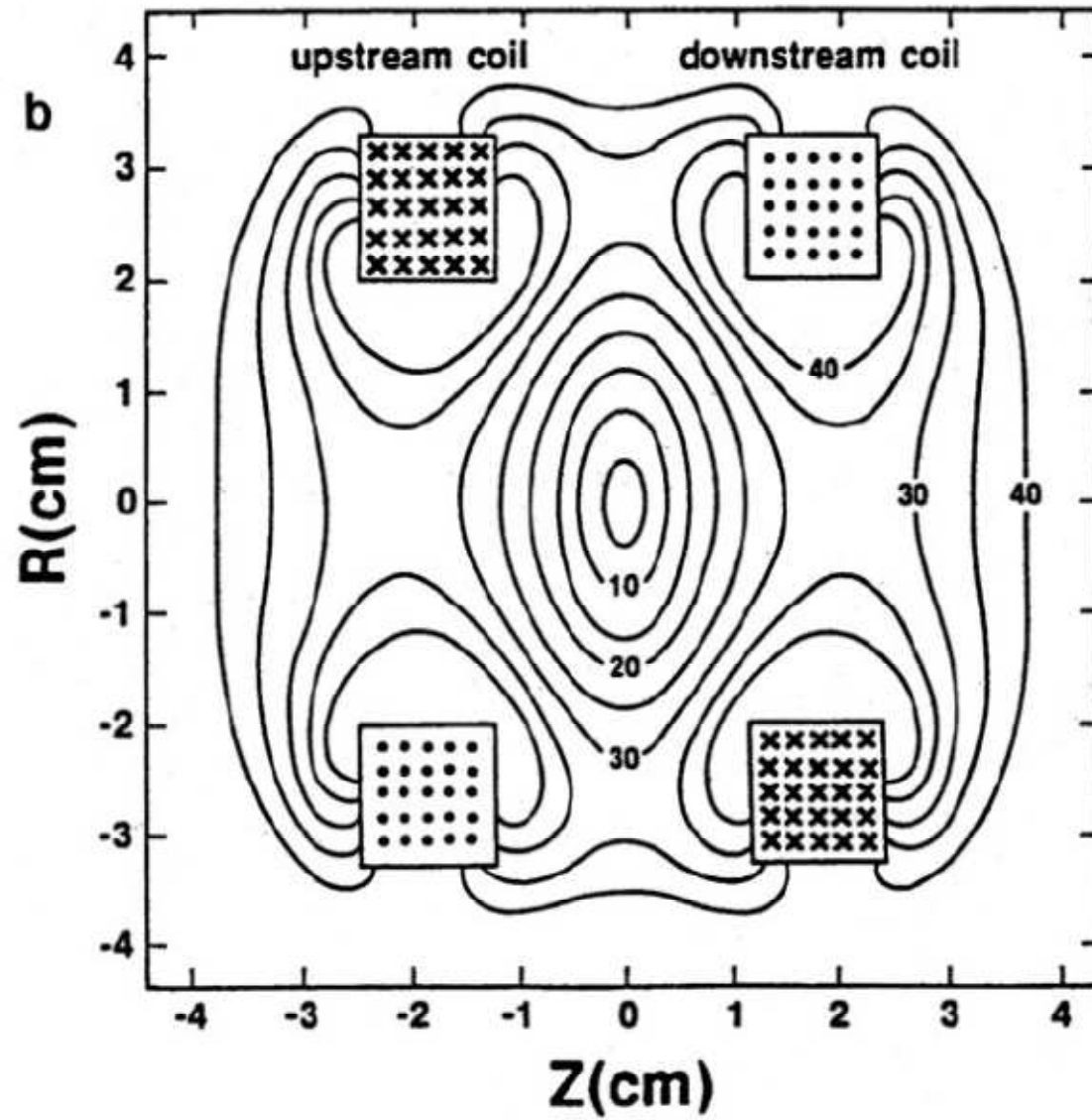


# Aparatura podle W. Phillipse



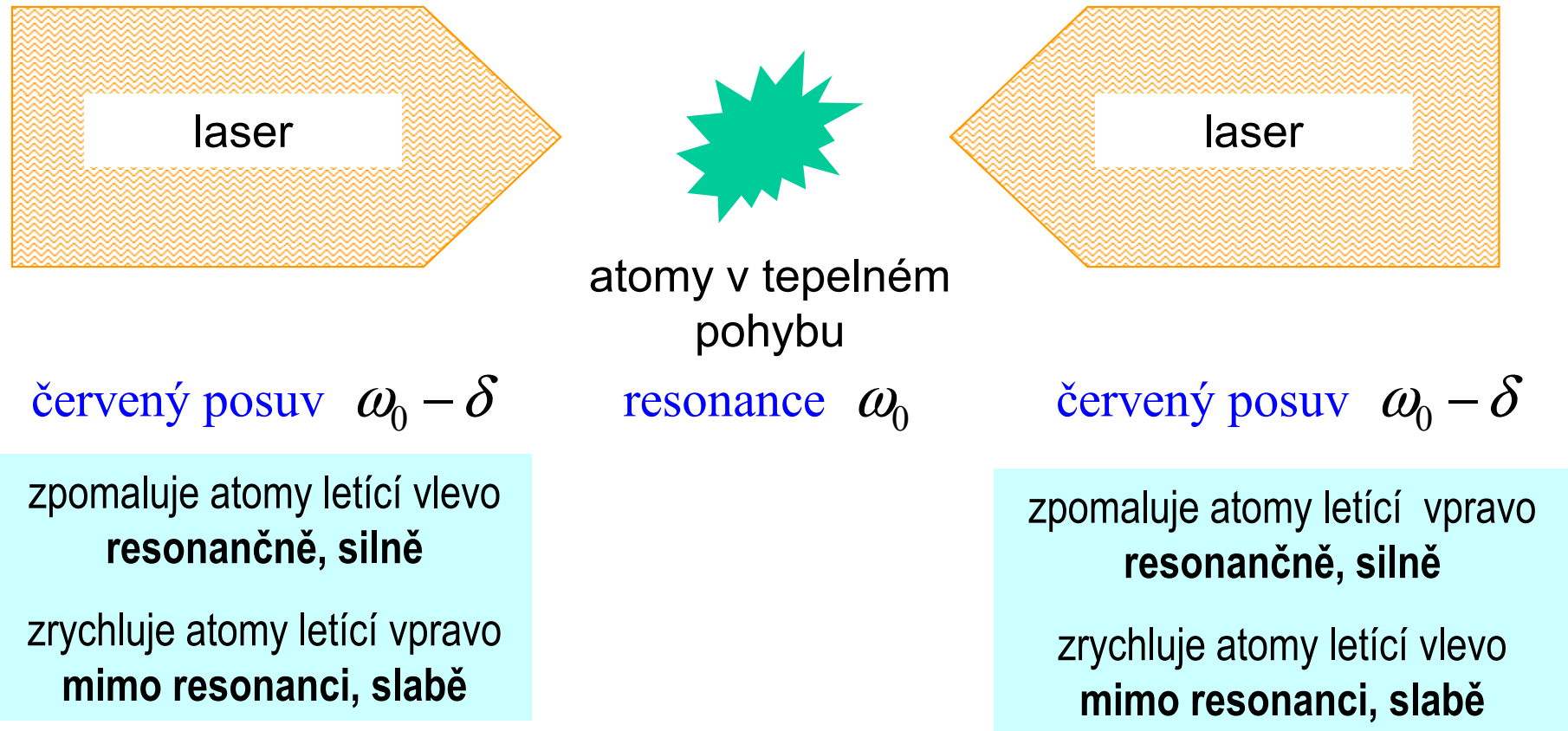
Zpomalené atomy doletěly do pasti a tam zastaveny dodatečným pulsem

# *Kvadrupólová magnetická past*



# Dopplerovo chlazení

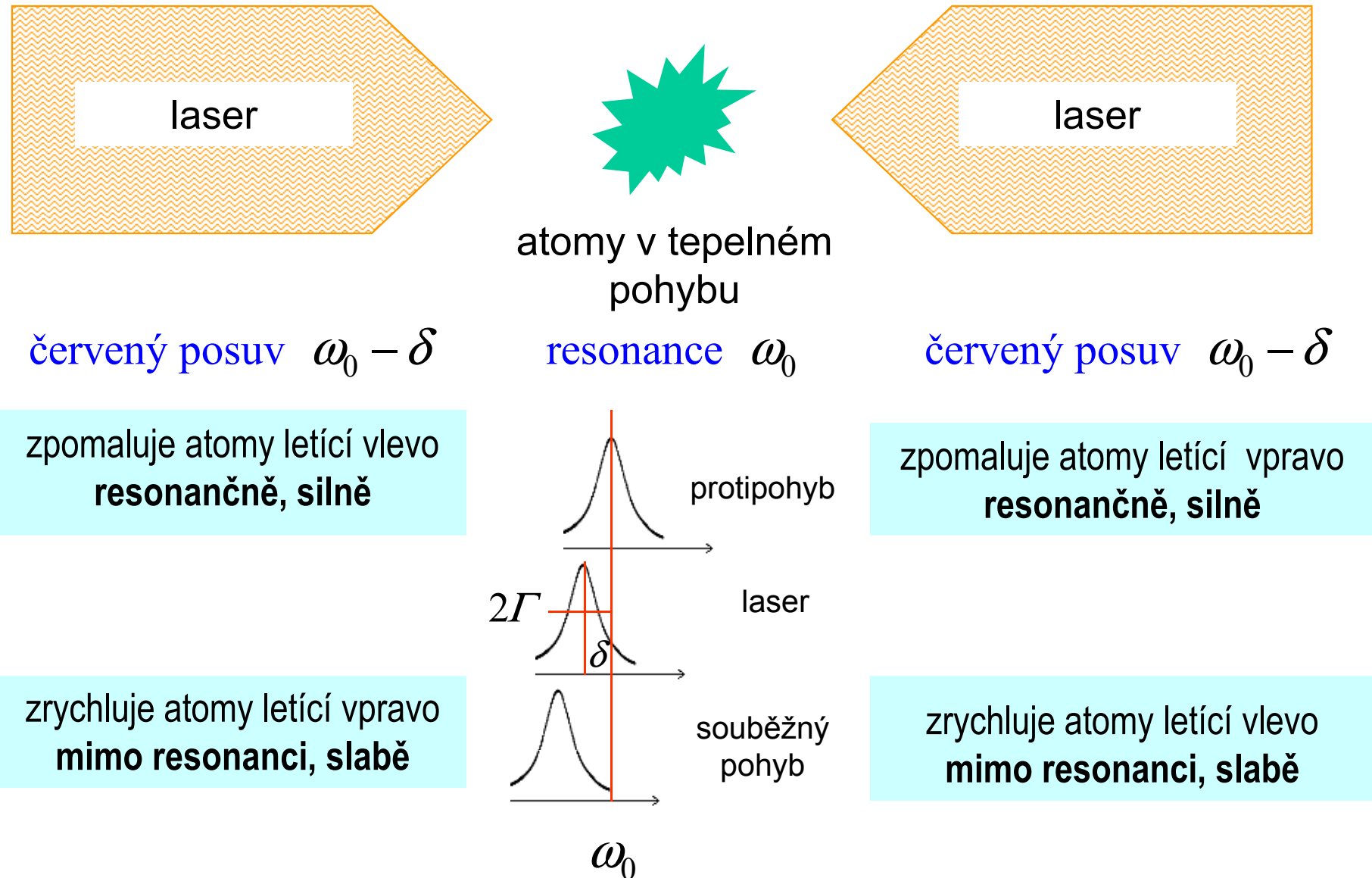
Princip popsali Hänsch a Schawlow 1985 (oba NP, ale za jiné věci)





# Dopplerovo chlazení

Princip popsali Hänsch a Schawlov 1985 (oba NP, ale za jiné věci)



# Dopplerovo chlazení

Princip popsali Hänsch a Schawlow 1985 (oba NP, ale za jiné věci)

rozladění se mění podle teploty

laser

$$m \langle v_i^2 \rangle = k_B T = \frac{\hbar \Gamma}{4} \left( \frac{\Gamma}{2\delta} + \frac{2\delta}{\Gamma} \right)$$

laser

atomy v tepelném  
pohybu

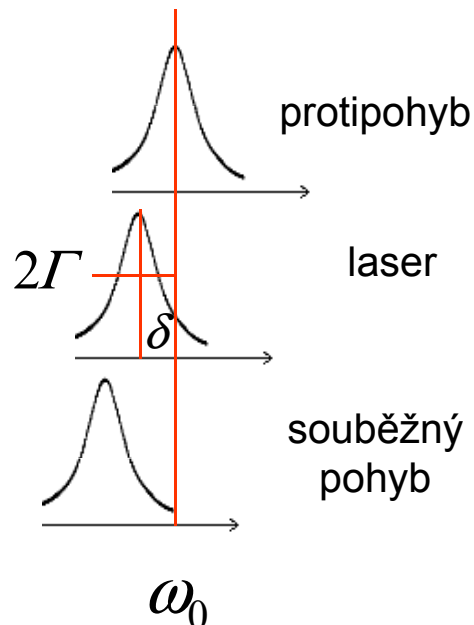
červený posuv  $\omega_0 - \delta$

resonance  $\omega_0$

červený posuv  $\omega_0 - \delta$

zpomaluje atomy letící vlevo  
**resonančně, silně**

zpomaluje atomy letící vpravo  
**resonančně, silně**



zrychluje atomy letící vpravo  
**mimo resonanci, slabě**

zrychluje atomy letící vlevo  
**mimo resonanci, slabě**

# Dopplerovo chlazení

Princip popsali Hänsch a Schawlow 1985 (oba NP, ale za jiné věci)

rozladění se mění podle teploty

laser

$$m \langle v_i^2 \rangle = k_B T = \frac{\hbar \Gamma}{4} \left( \frac{\Gamma}{2\delta} + \frac{2\delta}{\Gamma} \right)$$

laser

atomy v tepelném  
pohybu

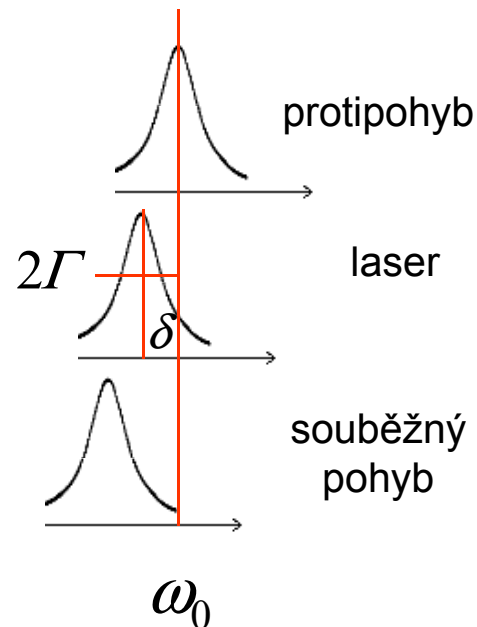
červený posuv  $\omega_0 - \delta$

resonance  $\omega_0$

červený posuv  $\omega_0 - \delta$

zpomaluje atomy letící vlevo  
resonančně, silně

zpomaluje atomy letící vpravo  
resonančně, silně



zrychluje atomy letící vpravo  
mimo resonanci, slabě

mezní teplota

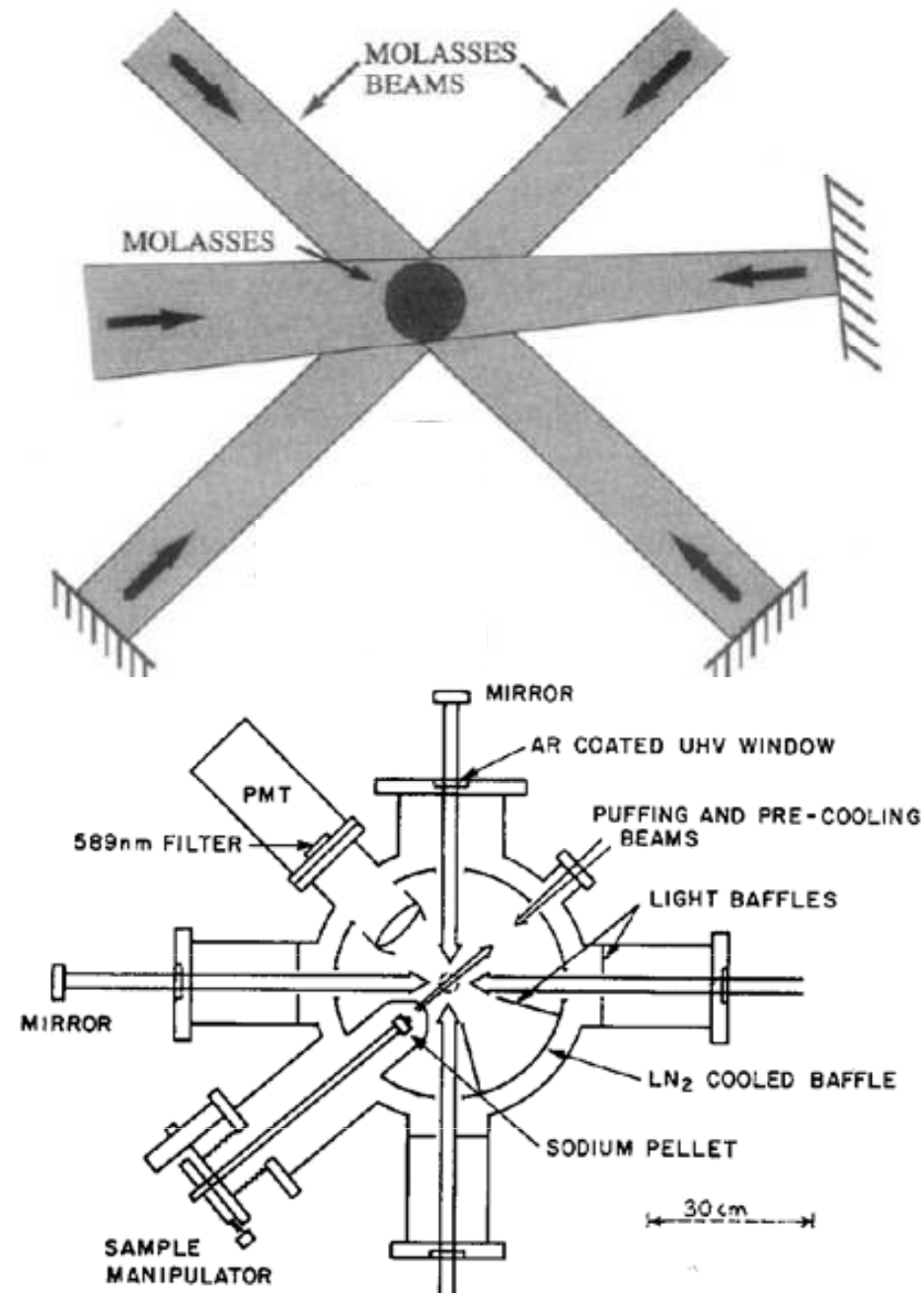
$$k_B T_{\text{Dopp}} = \frac{\hbar \Gamma}{2}$$

# Tři zkřížené svazky: 3D Dopplerovo chlazení podle Chu

je třeba 20 000 fotonů  
k zastavení z pokojové  
teploty

brzdná síla je pak  
úměrná rychlosti:  
viskózní prostředí,  
„syrup“

Pro intenzivní laser je  
to otázka milisekund



## *Dopplerovo chlazení: realizace Chu*

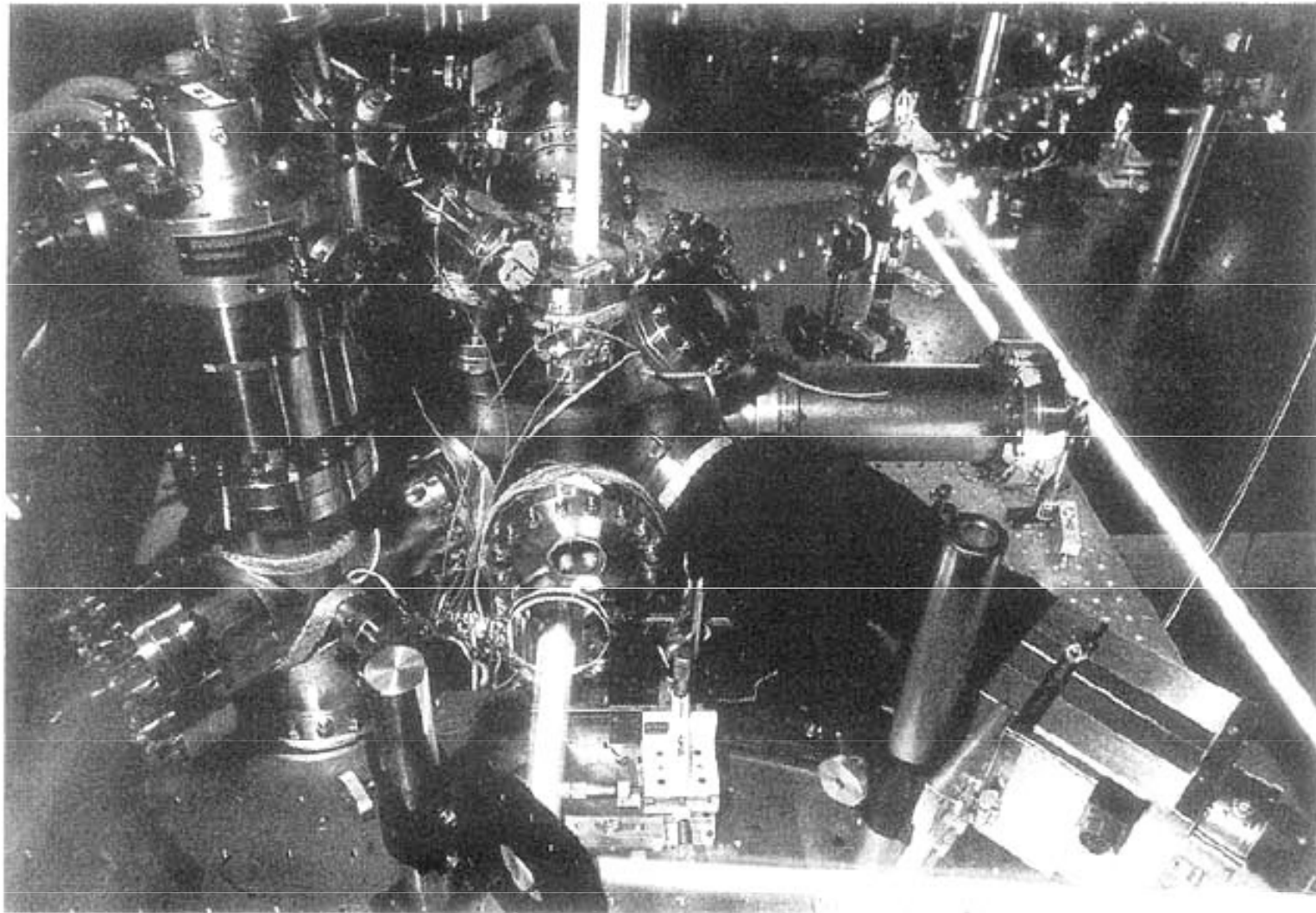
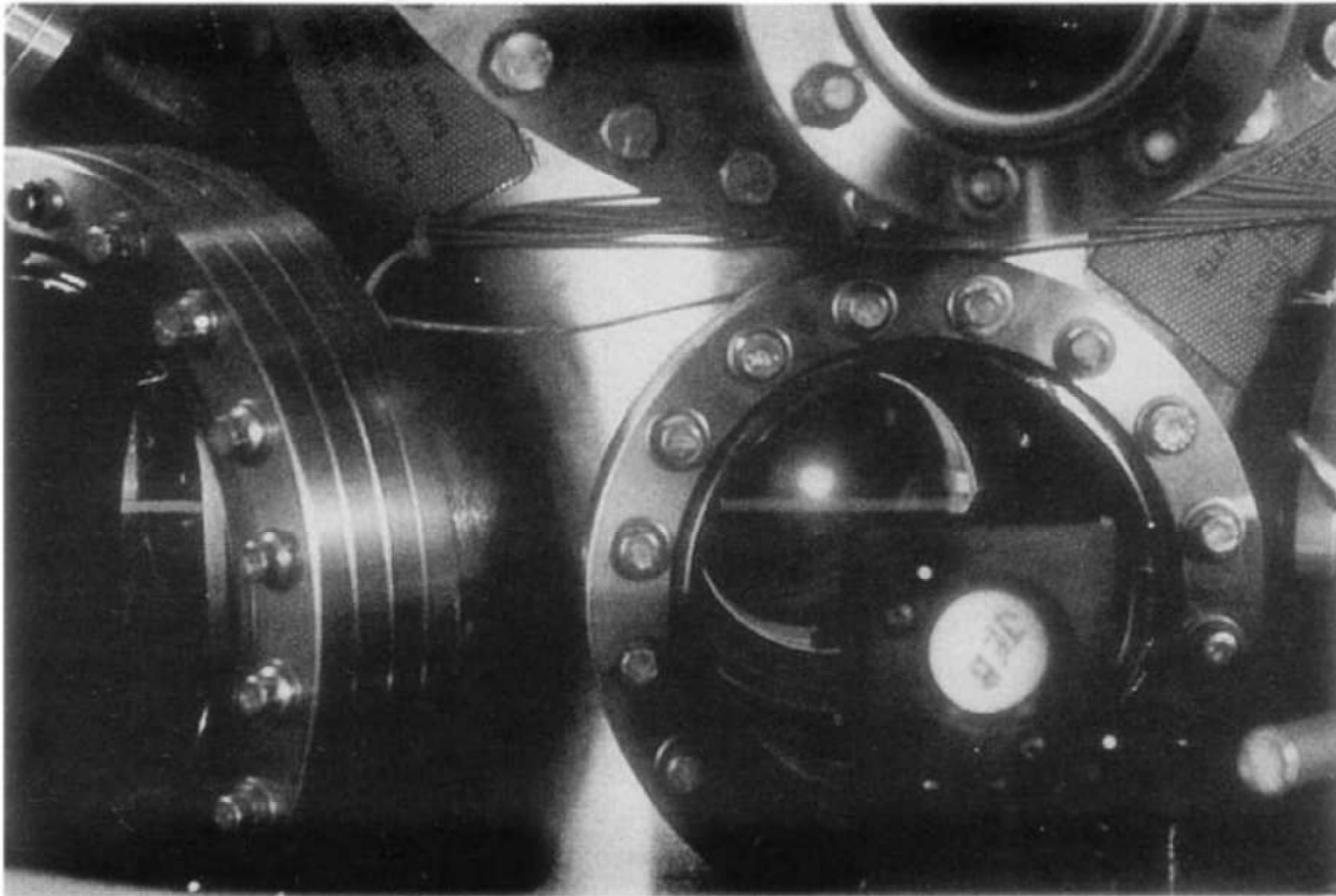
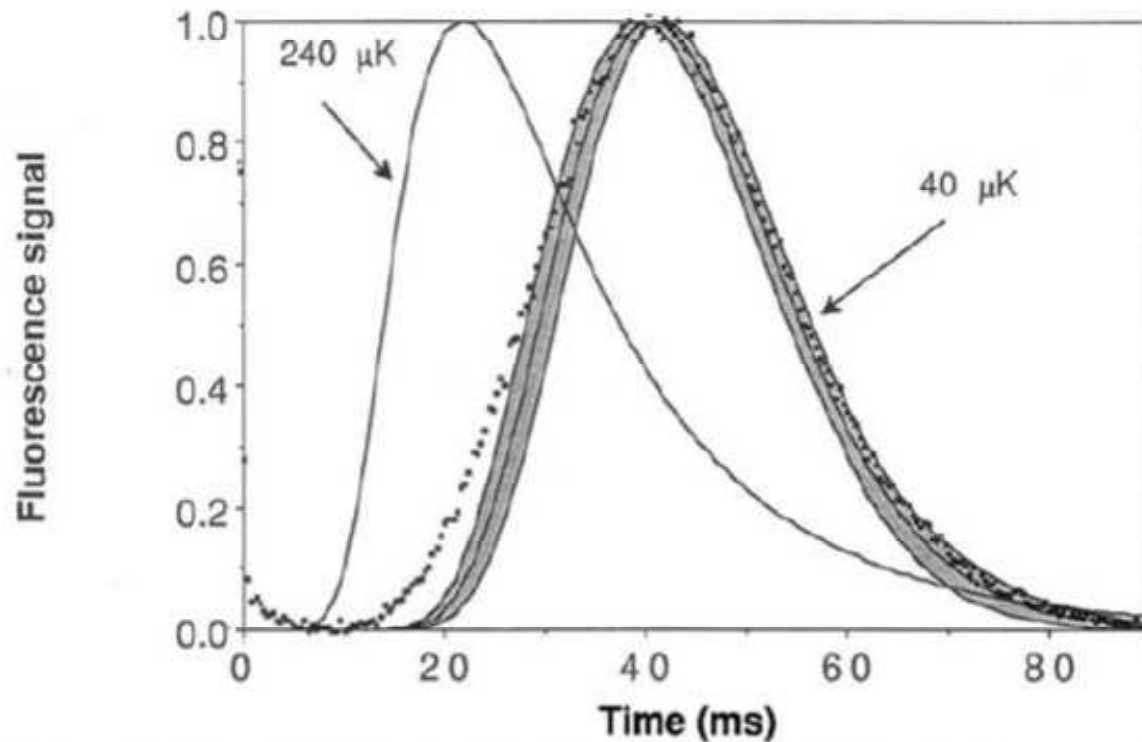


Figure 3 a. A photograph of the apparatus used to demonstrate optical molasses and the first optical trap for atoms. The photograph is a double exposure made by photographing the apparatus under normal lighting conditions and then photographing the laser beams by moving a white card along the beam path in a darkened room. The 10 Hz pulsed laser used to evaporate the sodium pellet (doubled YAG at 532nm) appears as dots of light.

*Dopplerovo chlazení: realizace Chu*



## Změřená teplota hluboko pod Dopplerovou limitou



Pod Dopplerovou mezí 240  $\mu\text{K}$

... dodatečné chlazení tzv. Sisyfovým jevem objasnil *Cohen-Tannoudji*

Reviews of Modern Physics, Vol. 70, No. 3, July 1998

## *Užitečnost laserového chlazení*

- delší pozorovací doba umožňuje lepší zkoumaní (spektroskopie)
- vytvoření a studium Boseova-Einsteinova kondenzátu plynů
- atomový laser (Wolfgang Ketterle, 1996)
- atomové hodiny s vysokou přesností (navigace)

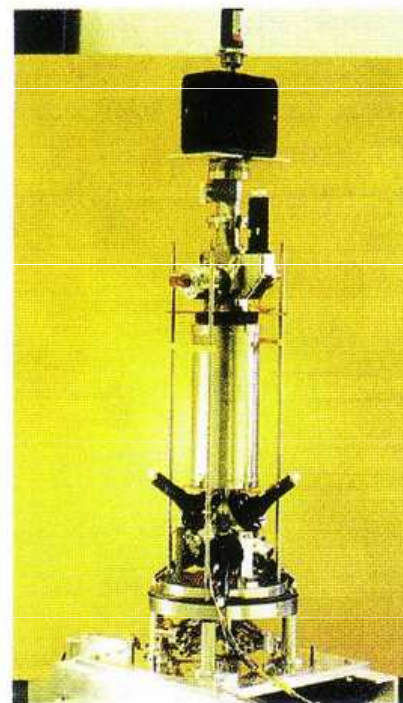
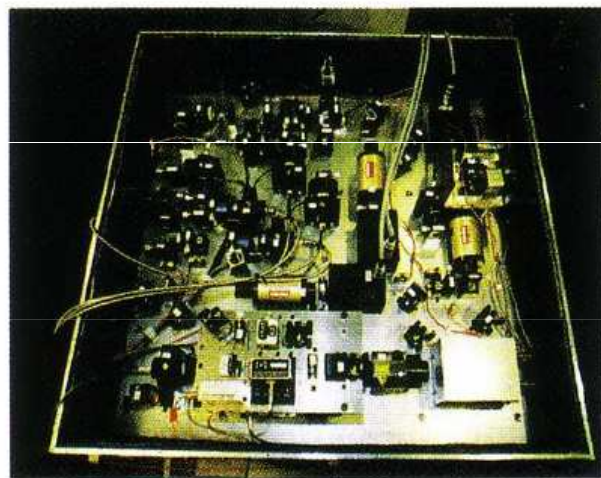


Figure 11. The microgravity clock prototype. The left part is the 60 cm × 60 cm × 15 cm optical bench containing the diode laser sources and the various optical components. The right part is the clock itself (about one meter long) containing the optical molasses, the microwave cavity and the detection region.



## *Užitečnost laserového chlazení*

- delší pozorovací doba umožňuje lepší zkoumaní (spektroskopie)
- vytvoření a studium Boseova-Einsteinova kondenzátu plynů
- atomový laser (Wolfgang Ketterle, 1996)
- atomové hodiny s vysokou přesností (navigace)

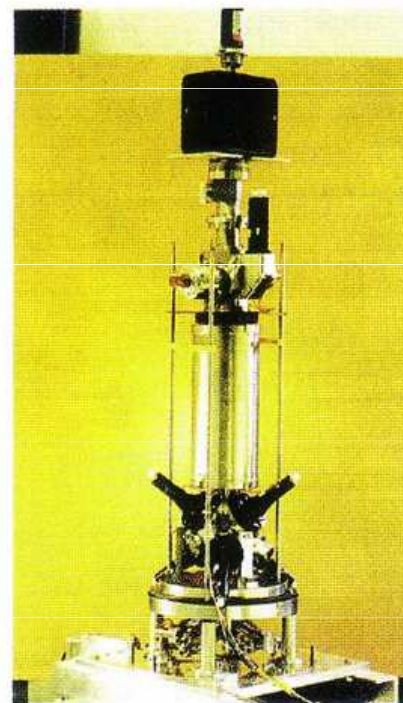
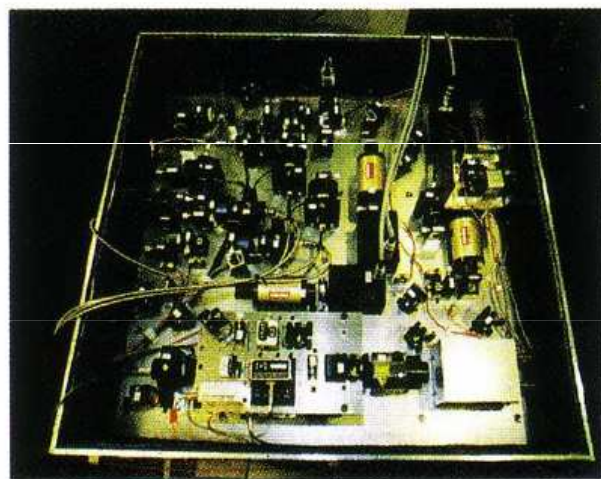


Figure 11. The microgravity clock prototype. The left part is the 60 cm × 60 cm × 15 cm optical bench containing the diode laser sources and the various optical components. The right part is the clock itself (about one meter long) containing the optical molasses, the microwave cavity and the detection region.

Bose-Einsteinova kondensace atomů

# Nobelisté II.



## The Nobel Prize in Physics 2001

"for the achievement of Bose-Einstein condensation in dilute gases of alkali atoms, and for early fundamental studies of the properties of the condensates"



**Eric A. Cornell**

1/3 of the prize  
USA

University of  
Colorado, JILA  
Boulder, CO, USA

b. 1961



**Wolfgang  
Ketterle**

1/3 of the prize  
Federal Republic of  
Germany

Massachusetts  
Institute of  
Technology (MIT)  
Cambridge, MA, USA

b. 1957



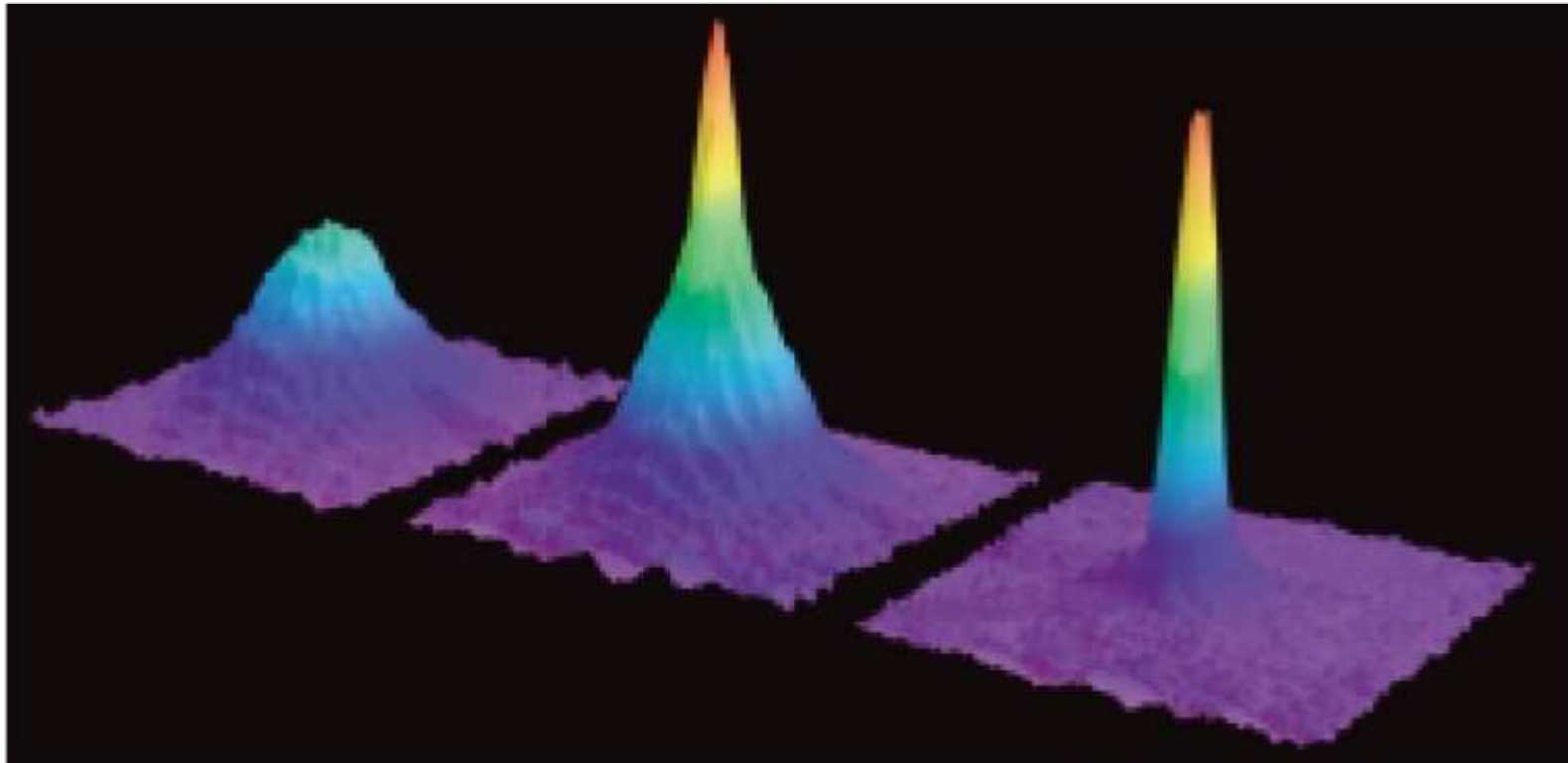
**Carl E. Wieman**

1/3 of the prize  
USA

University of  
Colorado, JILA  
Boulder, CO, USA

b. 1951

## BEC pozorovaná metodou TOF



*Figure 7.* Observation of Bose-Einstein condensation by absorption imaging. Shown is absorption vs. two spatial dimensions. The Bose-Einstein condensate is characterized by its slow expansion observed after 6 ms time-of-flight. The left picture shows an expanding cloud cooled to just above the transition point; middle: just after the condensate appeared; right: after further evaporative cooling has left an almost pure condensate. The total number of atoms at the phase transition is about  $7 \times 10^5$ , the temperature at the transition point is  $2 \mu\text{K}$ .

Bosony a Fermiony

## *Bosony and Fermiony v křostce*

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

## *Bosony and Fermiony v křostce*

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou **nerozlišitelné**

## *Bosony and Fermiony v křostce*

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné



## *Bosony and Fermiony v křostce*

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

## *Bosony and Fermiony v kostce*

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2)$$

## *Bosony and Fermiony v křostce*

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

## *Bosony and Fermiony v kostce*

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\lambda^2 = 1$$

## Bosony and Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\lambda^2 = 1$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
<b>fermiony</b>	<b>bosony</b>
antisymmetrická $\Psi$	symmetrická $\Psi$

## Bosony and Fermiony v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\lambda^2 = 1$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
<b>fermiony</b>	<b>bosony</b>
antisymmetrická $\Psi$	symmetrická $\Psi$
polo-číselný spin	celočíselný spin

# Bosony and Fermions v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\lambda^2 = 1$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
<b>fermiony</b>	<b>bosony</b>
antisymmetrická $\Psi$	symmetrická $\Psi$
polo-číselný spin	celočíselný spin

přichází  
odnikud  
"empirický  
fakt"

# Bosony and Fermions v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\lambda^2 = 1$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
<b>fermiony</b>	<b>bosony</b>
antisymmetrická $\Psi$	symmetrická $\Psi$
polo-číselný spin	celočíselný spin
elektrony	fotony

přichází  
odnikud  
"empirický  
fakt"



# Bosony and Fermions v kostce

nezávislý kvantový postulát

Identické částice jsou nerozlišitelné

Permutace částic nevede ke vzniku nového stavu

Dvě částice

$$\Psi(x_1, x_2) \rightarrow \Psi(x_2, x_1) = \lambda \Psi(x_1, x_2) = \lambda^2 \Psi(x_2, x_1)$$

$$\lambda^2 = 1$$

$\lambda = -1$	$\lambda = +1$
<b>fermiony</b>	<b>bosony</b>
antisymmetrická $\Psi$	symmetrická $\Psi$
polo-číselný spin	celočíselný spin
elektrony	fotony

přichází  
odnikud  
"empirický  
fakt"

*celkem dobře znáte*

*ted' pro nás důležité*

## Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (... **neinteragující**)

base jedno-částicových stavů (  $\alpha$  úplný soubor kvantových čísel)

$$\{|\alpha\rangle\} \quad \langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad |\psi\rangle = \sum |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle$$

$$\langle x|\alpha\rangle = \varphi_{\alpha}(x)$$

## Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (... **neinteragující**)

base jedno-částicových stavů (  $\alpha$  úplný soubor kvantových čísel)

$$\{|\alpha\rangle\} \quad \langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad |\psi\rangle = \sum |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle$$

$$\langle x|\alpha\rangle = \varphi_\alpha(x)$$

**FOCKŮV PROSTOR** prostor mnoha-částicových stavů

basové stavy ... symetrizované součiny jedno-částicových stavů **pro bosony**

... antisymetrizované součiny jedno-částicových stavů **pro fermiony**

určeny **posloupností obsazovacích čísel**      **0, 1, 2, 3, ... pro bosony**

**0, 1**      ... **pro fermiony**

## Representace obsazovacích čísel

Nezávislé částice (... **neinteragující**)

base jedno-částicových stavů (  $\alpha$  úplný soubor kvantových čísel)

$$\{|\alpha\rangle\} \quad \langle\alpha|\beta\rangle = \delta_{\alpha\beta} \quad |\psi\rangle = \sum |\alpha\rangle \langle\alpha|\psi\rangle$$

$$\langle x|\alpha\rangle = \varphi_\alpha(x)$$

**FOCKŮV PROSTOR** prostor mnoha-částicových stavů

basové stavy ... symetrizované součiny jedno-částicových stavů **pro bosony**

... antisymetrizované součiny jedno-částicových stavů **pro fermiony**

určeny **posloupností obsazovacích čísel** **0, 1, 2, 3, ... pro bosony**

**0, 1** ... **pro fermiony**

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \dots\}$$

$$\Psi_{\{n_\alpha\}} = |n_1, n_2, n_3, \dots, n_p, \dots\rangle \quad n\text{-částicový stav} \quad n = \sum n_p$$

# Representace obsazovacích čísel pro fermiony

Representace obsazovacích čísel (v podstatě *druhé kvantování*)

.... pro **fermiony**

**Pauliho princip**

*fermiony jsou distanční typ jako rackové*

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \dots\}$$

$$\Psi_{\{n_\alpha\}} = |n_1, n_2, n_3, \dots, n_p, \dots\rangle \quad n\text{-částicový stav } n = \sum n_p, n_p = 0, 1$$

$$|0\rangle = |0, 0, 0, \dots, 0, \dots\rangle \quad 0\text{-částicový stav } \mathbf{vakuum}$$

$$|1_p\rangle = |0, 0, 0, \dots, 1, \dots\rangle \quad 1\text{-částic. } \varphi_{\alpha_p}(x)$$

$$|\dots\rangle = |0, 1, 1, \dots, 0, \dots\rangle \quad 2\text{-částic. } (\varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_2}(x') - \varphi_{\alpha_1}(x')\varphi_{\alpha_2}(x))/\sqrt{2}$$

$$|\dots\rangle = |0, 2, 0, \dots, 0, \dots\rangle \quad 2\text{-částic. } \cancel{\varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_1}(x')} \text{ není dovoleno}$$

$$|F\rangle = |\underbrace{1, 1, \dots, 1}_N, 0, \dots\rangle \quad N\text{-částicový základní stav}$$

$N$

...

Aufbau princip pro atomy

*M* 3*s*

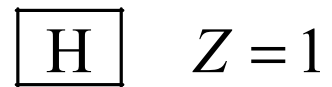
2*p<sub>x</sub>* 2*p<sub>y</sub>* 2*p<sub>z</sub>*

*L* 2*s*

*K* 1*s*

# Příklady

Aufbau princip pro atomy



*M* 3*s*

2*p<sub>x</sub>*    2*p<sub>y</sub>*    2*p<sub>z</sub>*

*L* 2*s*

*K* 1*s* ↑

# Příklady

Aufbau princip pro atomy



*M* 3s

2p<sub>x</sub>    2p<sub>y</sub>    2p<sub>z</sub>

*L* 2s

*K* 1s ↑↓



# Příklady

Aufbau princip pro atomy



*M*     $3s$

$2p_x$        $2p_y$        $2p_z$

*L*     $2s$  ↑

*K*     $1s$  ↑↓

# Příklady

Aufbau princip pro atomy



*M*     $3s$

$2p_x$      $2p_y$      $2p_z$

*L*     $2s$     ↑↓

*K*     $1s$     ↑↓

# Příklady

Aufbau princip pro atomy



*M*     $3s$

$2p_x \uparrow$      $2p_y$      $2p_z$

*L*     $2s \uparrow\downarrow$

*K*     $1s \uparrow\downarrow$

# Příklady

Aufbau princip pro atomy



*M*     $3s$

$2p_x \uparrow\downarrow$      $2p_y$      $2p_z$

*L*     $2s \uparrow\downarrow$

*K*     $1s \uparrow\downarrow$

# Příklady

Aufbau princip pro atomy



*M* 3s

2p<sub>x</sub> ↑↓ 2p<sub>y</sub> ↑ 2p<sub>z</sub>

*L* 2s ↑↓

*K* 1s ↑↓

# Příklady

Aufbau princip pro atomy



*M* 3s

2p<sub>x</sub> ↑↓ 2p<sub>y</sub> ↑↓ 2p<sub>z</sub>

*L* 2s ↑↓

*K* 1s ↑↓

# Příklady

Aufbau princip pro atomy



*M* 3s

2p<sub>x</sub> ↑↓ 2p<sub>y</sub> ↑↓ 2p<sub>z</sub> ↑

*L* 2s ↑↓

*K* 1s ↑↓

# Příklady

Aufbau princip pro atomy



*M* 3s

2p<sub>x</sub> ↑↓ 2p<sub>y</sub> ↑↓ 2p<sub>z</sub> ↑↓

*L* 2s ↑↓

*K* 1s ↑↓



Aufbau princip pro atomy



$M$   $3s \uparrow$

$2p_x \uparrow\downarrow$   $2p_y \uparrow\downarrow$   $2p_z \uparrow\downarrow$

$L$   $2s \uparrow\downarrow$

$K$   $1s \uparrow\downarrow$

# Representace obsazovacích čísel pro bosony

Representace obsazovacích čísel (v podstatě *druhé kvantování*)

.... pro **bosony**

**princip identity**

*bosony jsou kontaktní typ jako opice*

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots, \alpha_p, \dots\}$$

$$\Psi_{\{n_\alpha\}} = |n_1, n_2, n_3, \dots, n_p, \dots\rangle \quad n\text{-částicový stav } n = \sum n_p, n_p = 0, 1, 2, 3, \dots$$

$$|0\rangle = |0, 0, 0, \dots, 0, \dots\rangle \quad 0\text{-částicový stav } \mathbf{vakuum}$$

$$|1_p\rangle = |0, 0, 0, \dots, 1, \dots\rangle \quad 1\text{-částic. } \varphi_{\alpha_p}(x)$$

$$|\dots\rangle = |0, 1, 1, \dots, 0, \dots\rangle \quad 2\text{-částic. } \left(\varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_2}(x') + \varphi_{\alpha_1}(x')\varphi_{\alpha_2}(x)\right)/\sqrt{2}$$

$$|\dots\rangle = |0, 2, 0, \dots, 0, \dots\rangle \quad 2\text{-částic. } \varphi_{\alpha_1}(x)\varphi_{\alpha_1}(x') \text{ je dovoleno}$$

$$|B\rangle = |N, 0, 0, \dots, 0, \dots\rangle \quad N\text{-částicový základní stav}$$

všechny na jednom orbitalu

$$\varphi_{\alpha_1}(x_1)\varphi_{\alpha_1}(x_2)\cdots\varphi_{\alpha_1}(x_N)$$

# Příklady bosonů

částice -- kvanta  
 $N$  se nezachovává

bosony

komplexní částice  
 $N$  se zachovává

elementární  
částice

fotony

kvazičástice

fonony  
magnony

atomy

${}^4\text{He}$ ,  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{23}\text{Na}$ ,  ${}^{87}\text{Rb}$   
alkalické kovy

excitované  
atomy

# Příklady bosonů (rozšíření tabulky)

částice -- kvanta  
 $N$  se nezachovává

bosony

komplexní částice  
 $N$  se zachovává

elementární  
částice

fotony

kvazičástice

fonony  
magnony

složené  
kvazičástice

excitony  
Cooperovy páry

atomy

${}^4\text{He}$ ,  ${}^7\text{Li}$ ,  ${}^{23}\text{Na}$ ,  ${}^{87}\text{Rb}$   
alkalické kovy

excitované  
atomy

ionty

molekuly

*Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson*

### **ZÁKLADNÍ PODMÍNKA**

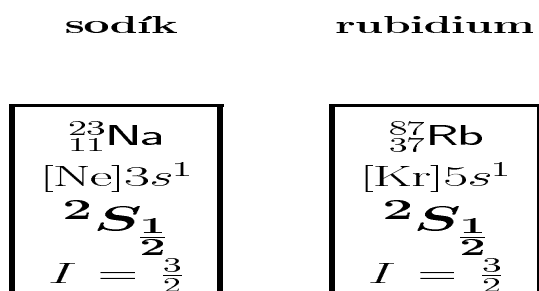
Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

*Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson*

## ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

ALKALICKÉ KOVY



$$\vec{F} = \underbrace{\vec{L} + \vec{S}}_{\vec{J}} + \vec{I}$$

$$S = \frac{1}{2} \quad (I = \frac{3}{2})$$

$$L = 0$$

$$L = 1$$

$$J = \frac{1}{2}$$

$$J = \frac{1}{2}$$

$$J = \frac{3}{2}$$

$$F = 1, 2$$

$$F = 1, 2$$

$$F = 0, 1, 2, 3$$



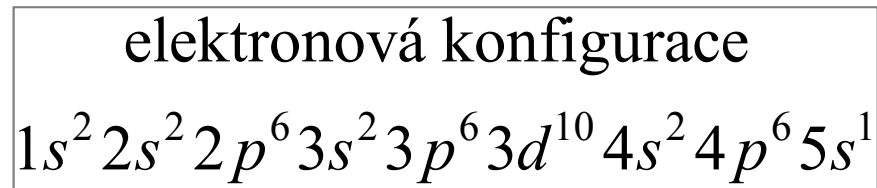
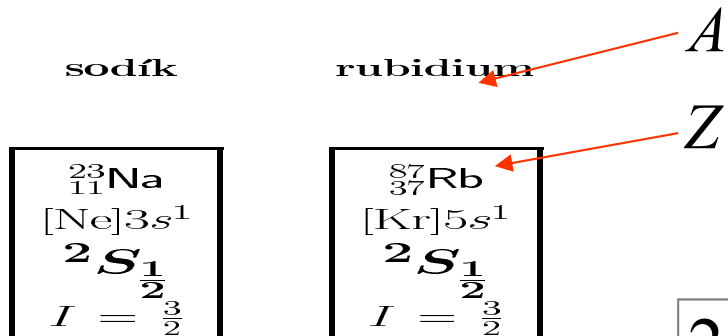
Spektroskopické charakteristiky sodíku

*Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson*

## ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

ALKALICKÉ KOVY



$$\vec{F} = \underbrace{\vec{L} + \vec{S}}_{\vec{J}} + \vec{I}$$

$$S = \frac{1}{2} \quad (I = \frac{3}{2})$$

$$L = 0$$

$$J = \frac{1}{2}$$

$$F = 1, 2$$

$$L = 1$$

$$J = \frac{1}{2}$$

$$F = 1, 2$$

$$J = \frac{3}{2}$$

$$F = 0, 1, 2, 3$$

$$2S+1 L_J$$

$$\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$$

$$J = |S - L|, \dots, S + L = \frac{1}{2}$$

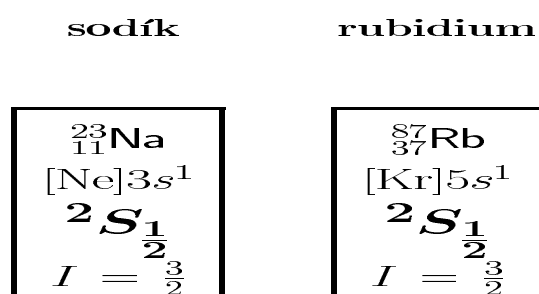
Spektroskopické charakteristiky sodíku

*Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson*

## ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

ALKALICKÉ KOVY



## Rubidium

37 elektronů	}	<i>celk. elektronový spin</i>	$S = \frac{1}{2}$
37 protonů		<i>celk. jaderný spin</i>	$I = \frac{3}{2}$
50 neutronů			

$$\vec{F} = \underbrace{\vec{L} + \vec{S}}_{\vec{J}} + \vec{I}$$

$$S = \frac{1}{2} \quad (I = \frac{3}{2})$$

$$L = 0$$

$$L = 1$$

$$J = \frac{1}{2}$$

$$J = \frac{1}{2}$$

$$J = \frac{3}{2}$$

$$F = 1, 2$$

$$F = 1, 2$$

$$F = 0, 1, 2, 3$$

Spektroskopické charakteristiky sodíku



*Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson*

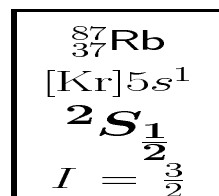
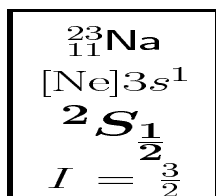
## ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

ALKALICKÉ KOVY

sodík

rubidium



$$\vec{F} = \underbrace{\vec{L} + \vec{S}}_{\vec{J}} + \vec{I}$$

$$S = \frac{1}{2} \quad (I = \frac{3}{2})$$

$$L = 0$$

$$L = 1$$

$$J = \frac{1}{2}$$

$$J = \frac{1}{2}$$

$$J = \frac{3}{2}$$

$$F = 1, 2$$

$$F = 1, 2$$

$$F = 0, 1, 2, 3$$

## Rubidium

37 elektronů

*celk. elektronový spin*

$$S = \frac{1}{2}$$

37 protonů

50 neutronů

*celk. jaderný spin*

$$I = \frac{3}{2}$$

*celkový spin atomu*

$$\vec{F} = \vec{S} + \vec{I}$$

$$F = |S - I|, \dots, S + I = 1, 2$$

Spektroskopické charakteristiky sodíku

*Jak může komplexní částice, například atom, vystupovat jako jednotný celek --- boson*

## ZÁKLADNÍ PODMÍNKA

Identita zahrnuje charakteristiky jako hmotnost, náboj, ale také hodnoty pozorovatelných příslušných vnitřním stupňům volnosti, které **se nesmějí měnit v průběhu studovaného dynamického procesu.**

ALKALICKÉ KOVY

sodík	rubidium	
$  \begin{array}{c}  {}^{23}_{11}\text{Na} \\  [\text{Ne}]3s^1 \\  {}^2S_{\frac{1}{2}} \\  I = \frac{3}{2}  \end{array}  $	$  \begin{array}{c}  {}^{87}_{37}\text{Rb} \\  [\text{Kr}]5s^1 \\  {}^2S_{\frac{1}{2}} \\  I = \frac{3}{2}  \end{array}  $	
$\vec{F} = \underbrace{\vec{L} + \vec{S}}_{\vec{J}} + \vec{I}$		
$S = \frac{1}{2} \quad (I = \frac{3}{2})$		
$L = 0$	$L = 1$	
$J = \frac{1}{2}$	$J = \frac{1}{2}$	$J = \frac{3}{2}$
$F = 1, 2$	$F = 1, 2$	$F = 0, 1, 2, 3$

## Rubidium

37 elektronů	<i>celk. elektronový spin</i>	$S = \frac{1}{2}$
37 protonů	}	<i>celk. jaderný spin</i>
50 neutronů		

*celkový spin atomu*

$$\vec{F} = \vec{S} + \vec{I}$$

$$F = |S - I|, \dots, S + I = 1, 2$$

Spektroskopické charakteristiky sodíku

Koexistují dvě rozlišitelné odrůdy; mohou být odděleny sdruženým působením hyperjemných interakcí a Zeemana štěpení v magnetickém poli

Bose-Einsteinova kondensace  
BEC

## *Ideální klasický plyn*

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

# Ideální kvantový plyn

$$T = 0$$

Fermiony  
elektrony

$$|F\rangle = |1, 1, \dots, 1, 0, \dots\rangle$$

Bosony  $N = \text{const.}$   
atomy

$$|B\rangle = |N, 0, 0, \dots, 0, \dots\rangle$$

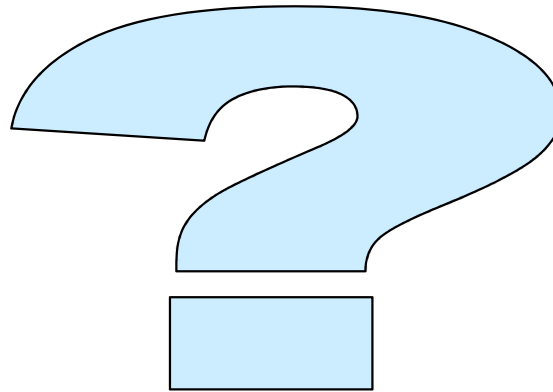
Bosony  
fotony

$$|\text{vac}\rangle$$

# Ideální kvantový plyn

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn



$$T = 0$$

Fermiony  
elektrony

$$|F\rangle = |1, 1, \dots, 1, 0, \dots\rangle$$

Bosony  $N = \text{const.}$   
atomy

$$|B\rangle = |N, 0, 0, \dots, 0, \dots\rangle$$

Bosony  
fotony

$$|\text{vac}\rangle$$

# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

$N$

$N$

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

chemický potenciál fixuje  
střední počet částic

fermiony

bosony

FD

$N$

$N$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$



# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

$N$

$N$

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

$$|F\rangle = |1, 1, \dots, 1, 0, \dots\rangle$$

$$|B\rangle = |N, 0, 0, \dots, 0, \dots\rangle$$

$$|\text{vac}\rangle$$

# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

FD

$N$

$N$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

vymrzání

$$|F\rangle = |1, 1, \dots, 1, 0, \dots\rangle$$

$$|B\rangle = |N, 0, 0, \dots, 0, \dots\rangle$$

$$|\text{vac}\rangle$$

# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

$N$

$N$

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

$T \rightarrow 0$

Aufbau princip

$$|F\rangle = |1, 1, \dots, 1, 0, \dots\rangle$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$T \rightarrow 0$

$$|B\rangle = |N, 0, 0, \dots, 0, \dots\rangle$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \rightarrow 0$

vymrzání

$$|\text{vac}\rangle$$

# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

$N$

$N$

FD

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

$T \rightarrow 0$

Aufbau princip

$$|F\rangle = |1, 1, \dots, 1, 0, \dots\rangle$$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$T \rightarrow 0$

?

$$|B\rangle = |N, 0, 0, \dots, 0, \dots\rangle$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \rightarrow 0$

vymrzání

$$|\text{vac}\rangle$$

# Ideální kvantové plyny

$$\langle n \rangle = e^{-\beta(\varepsilon - \mu)} \quad \text{Boltzmannovo rozdělení}$$

vysoké teploty, zředěný plyn

fermiony

bosony

FD

$N$

$N$

BE

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} + 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta(\varepsilon - \mu)} - 1}$$

$$\langle n \rangle = \frac{1}{e^{\beta\varepsilon} - 1}$$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

$T \rightarrow 0$

Aufbau princip

BEC

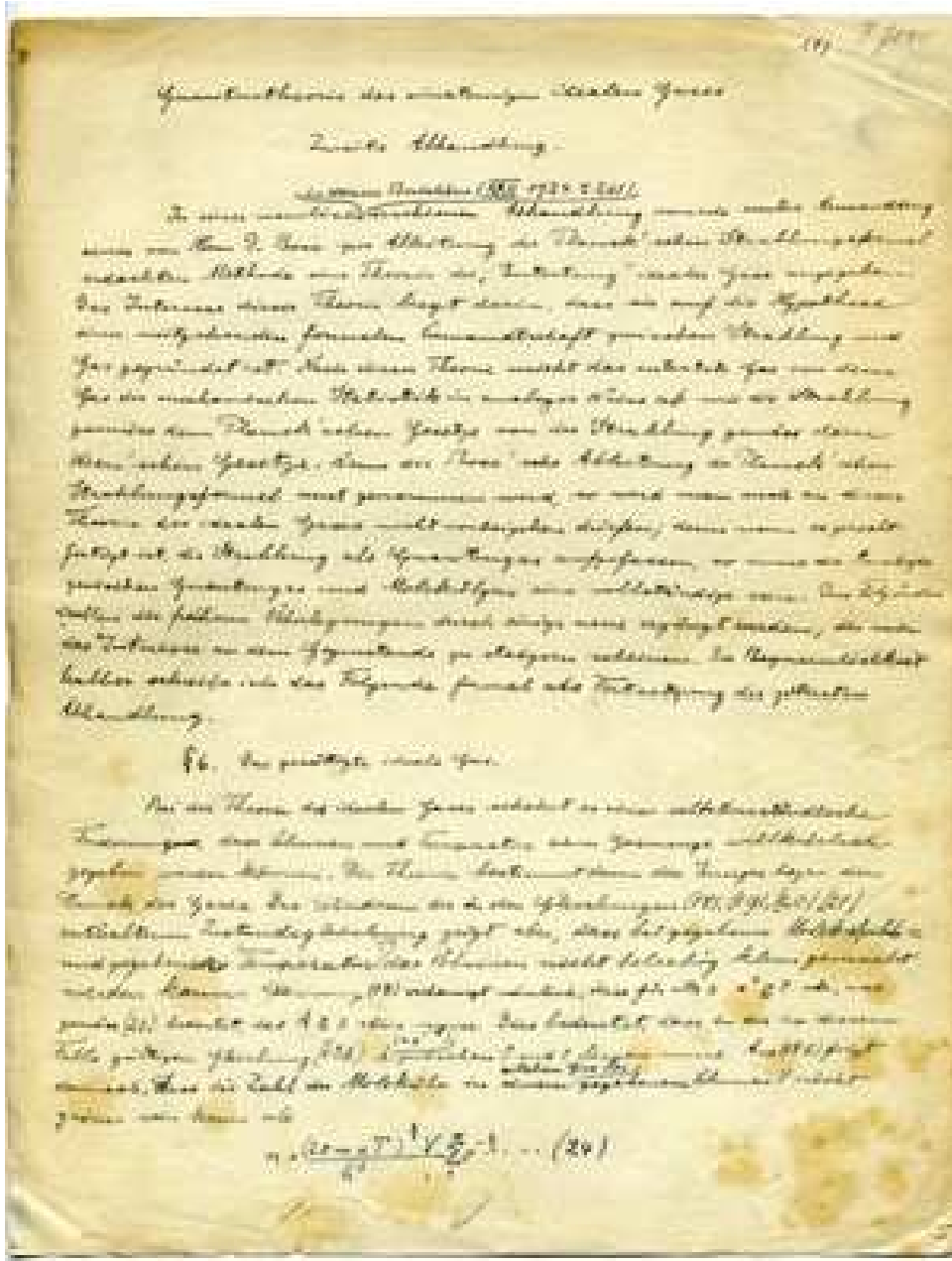
vymrzání

$$|F\rangle = |1, 1, \dots, 1, 0, \dots\rangle$$

$$|B\rangle = |N, 0, 0, \dots, 0, \dots\rangle$$

$$|\text{vac}\rangle$$

# Einsteinův rukopis s odvozením BEC



## Podstata BEC

S klesající teplotou atomy ztrácejí energii a „stékají“ do nižších stavů. Těch však ubývá:

$$\mathcal{N}(E < k_B T) = \text{const} \times T^{3/2}$$

Daný počet atomů počínajíc jistou kritickou teplotou je příliš velký.

Přebytek se vyloučí do nejnižší hladiny, která je pak makroskopicky obsazena, tj. ze všech atomů je na ní makroskopický zlomek.

To je BEC kondensát.

Při nulové teplotě jsou na nejnižší hladině atomy všechny.

Přesný výpočet integrálů a tuto úvahu provedl Einstein ... předchozí folie.

$$\tilde{\mathcal{N}}_G(T) = V \times 4\pi \left( \frac{2mk_B T}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right) \equiv BT^{\frac{3}{2}}$$

## Kritická teplota pro BEC

### KRITICKÁ TEPLOTA

nejnižší teplota, při níž jsou všechny atomy ještě v plynné fázi:

$$N = \tilde{\mathcal{N}}_G(T_c) = V \times 4\pi \left( \frac{2mk_B T_c}{h^2} \right)^{\frac{3}{2}} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) \zeta\left(\frac{3}{2}\right)$$

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left( \frac{N}{2,612V} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,52725 \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{A} = 8,0306 \times 10^{-19} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{A}$$



## Kritická teplota pro BEC

### KRITICKÁ TEPLOTA

nejnižší teplota, při níž jsou všechny atomy ještě v plynné fázi:

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left( \frac{N}{2,612V} \right)^{\frac{2}{3}} = 0,52725 \frac{h^2}{4\pi u k_B} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{M} = 8,0306 \times 10^{-19} \cdot \frac{n^{\frac{2}{3}}}{M}$$

Několik odhadů:

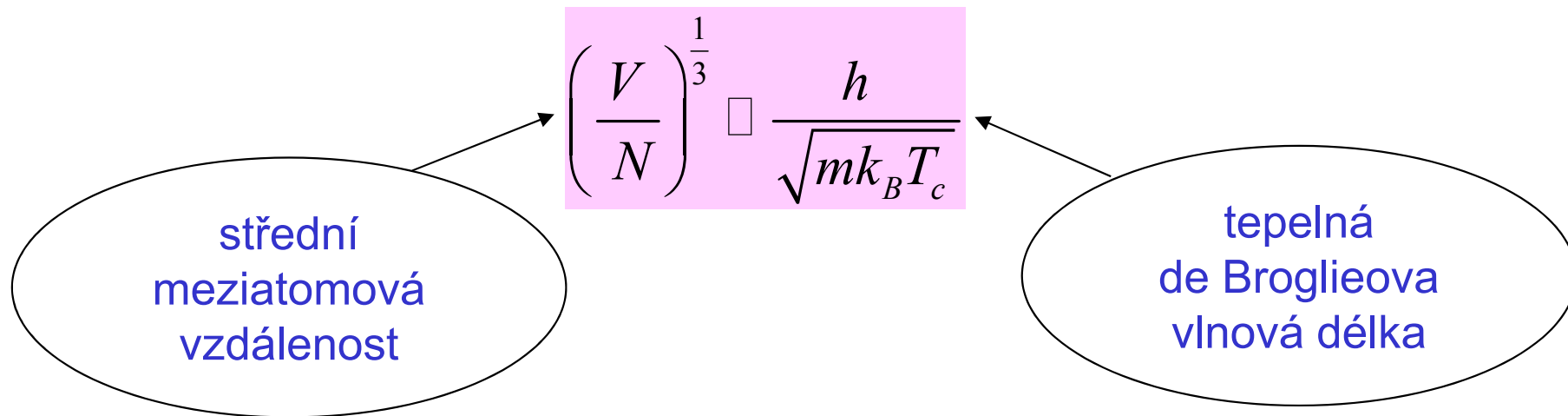
system	$M$	$n$	$T_c$
He-4 kapalně	4	$2 \times 10^{28}$	1.47 K
Na past	23	$2 \times 10^{20}$	1.19 $\mu$ K
Rb past	87	$2 \times 10^{17}$	3.16 nK

## Fyzikální interpretace $T_C$

formule pro kritickou teplotu

$$T_c = \frac{h^2}{4\pi m k_B} \cdot \left( \frac{N}{2,612V} \right)^{\frac{2}{3}}$$

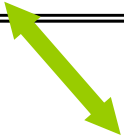
upravíme na



Kvantový přechod nastane když

vlnová oblaka atomů se začnou překrývat

## de Broglieho vlnová délka pro atomy a molekuly


$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{p}$$

Tepelné energie jsou malé .... platí NR vzorce

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{2mE_{\text{kin}}}} \quad m = Au$$

V tepelné rovnováze

... rel. at. (mol.) hmotnost

$$\langle E_{\text{kin}} \rangle = \frac{3}{2} k_B T$$

tepelná vlnová  
délka

$$\lambda = \frac{2\pi\hbar}{\sqrt{3u k_B}} \cdot \frac{1}{\sqrt{AT}} = 2,5 \times 10^{-9} \cdot \frac{1}{\sqrt{AT}}$$

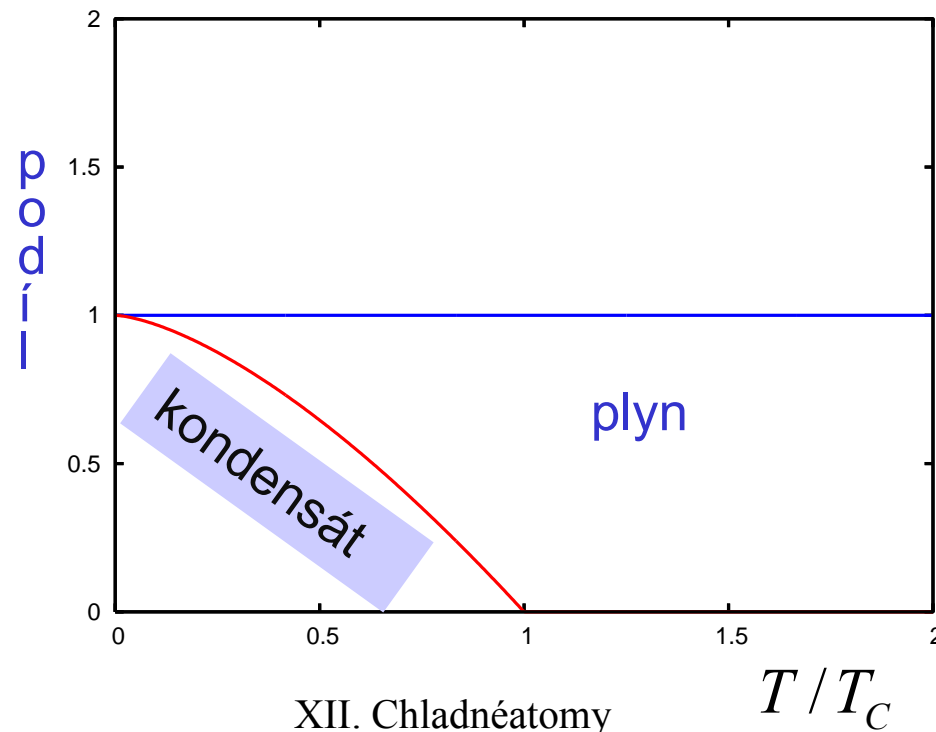
Dva užitečné vzorce

$$E_{\text{kin}} = \frac{3}{2} T / 11600 \quad \text{eV K} \quad \bar{v} = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = 158 \sqrt{\frac{T}{A}}$$

# Hustota kondensátu

$$n_G = \frac{\tilde{\mathcal{N}}(T)}{V} = B T^{\frac{3}{2}} = n \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} \quad \text{pro } T < T_C$$

$$n \equiv n_G + n_{BEC} = n \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} + n \left[ 1 - \left( \frac{T}{T_C} \right)^{\frac{3}{2}} \right]$$



## *Podrobnější rozbor BEC*

- Termodynamicky ... fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)

## *Podrobnější rozbor BEC*

- Termodynamicky ... fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)
- BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.
- BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve

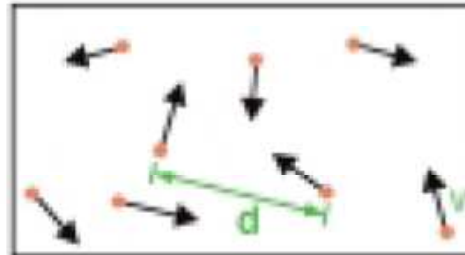
## *Podrobnější rozbor BEC*

- Termodynamicky ... fázový přechod, i když podivný
- Čistě kvantový efekt
- Mezi bosony nepůsobí reálné síly, jejich pohyb však JE reálně korelován působením principu identity (symetrické vlnové funkce)
- BEC je „kondenzace v prostoru hybností“ , na rozdíl od zkapalnění klasických plynů, které vede ke vzniku kapek v reálném prostoru souřadnic.
- BEC nebyla vlastně nikdy pozorována, protože obyčejné fázové přechody nastávaly mnohem dříve
- I když nebereme „momentum condensation“ doslova, BEC vyvolává kvantovou koherenci mezi vzdálenými místy, tak jako obyčejná rovinná vlna
- BEC je **makroskopický kvantový jev** ve dvou ohledech:
  - ♠ korelace makroskopické frakce všech atomů
  - ♠ odpovídající koherence prochází celým makroskopicky rozlehlým vzorkem

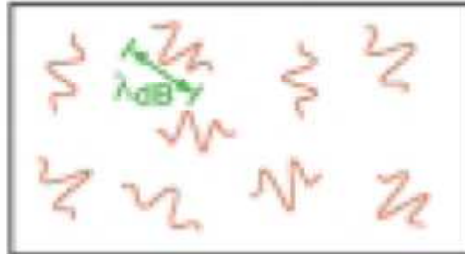
# BEC v atomových pastech



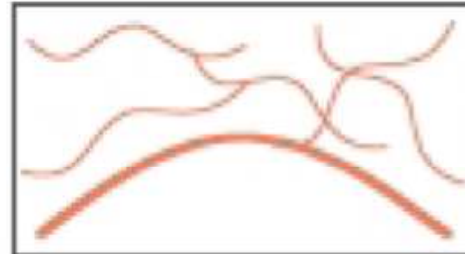
# Ketterle vysvětluje BEC švédskému králi



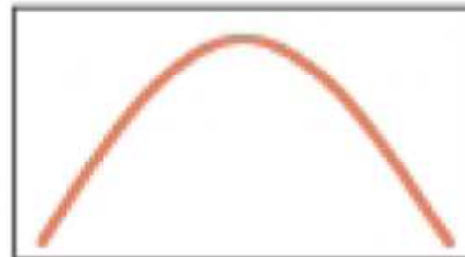
**High Temperature T:**  
thermal velocity  $v$   
density  $d^{-3}$   
"Billiard balls"



**Low Temperature T:**  
De Broglie wavelength  
 $\lambda_{dB} = h/mv \propto T^{-1/2}$   
"Wave packets"



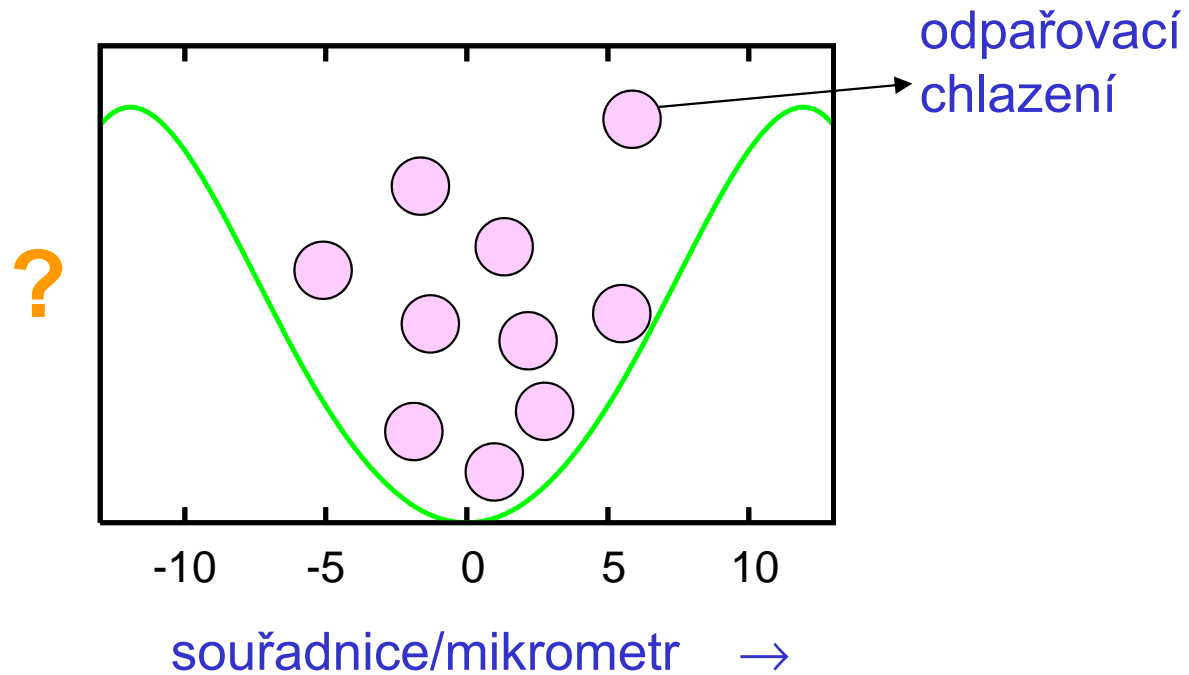
**$T = T_{crit}$ :**  
**Bose-Einstein Condensation**  
 $\lambda_{dB} \sim d$   
"Matter wave overlap"



**$T = 0$ :**  
**Pure Bose condensate**  
"Giant matter wave"

# Potenciál pasti

Typický profil



Jeden směr

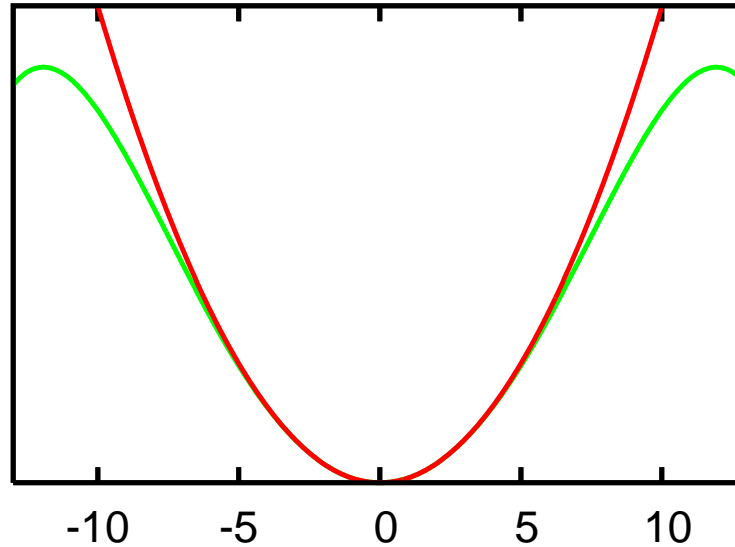
past zpravidla 3D

Pasti jsou z reálného světa, obláčky víceméně viditelné okem

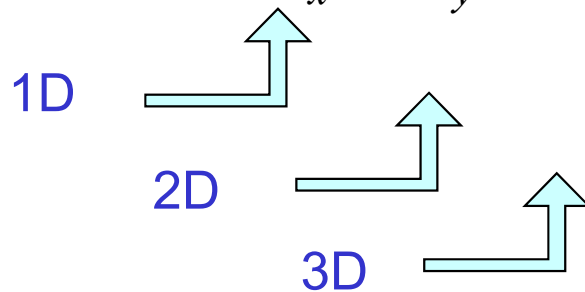
# Potenciál pasti

## Parabolická approximace

zpravidla anisotropní  
harmonický oscilátor  
*s axiální symetrií*

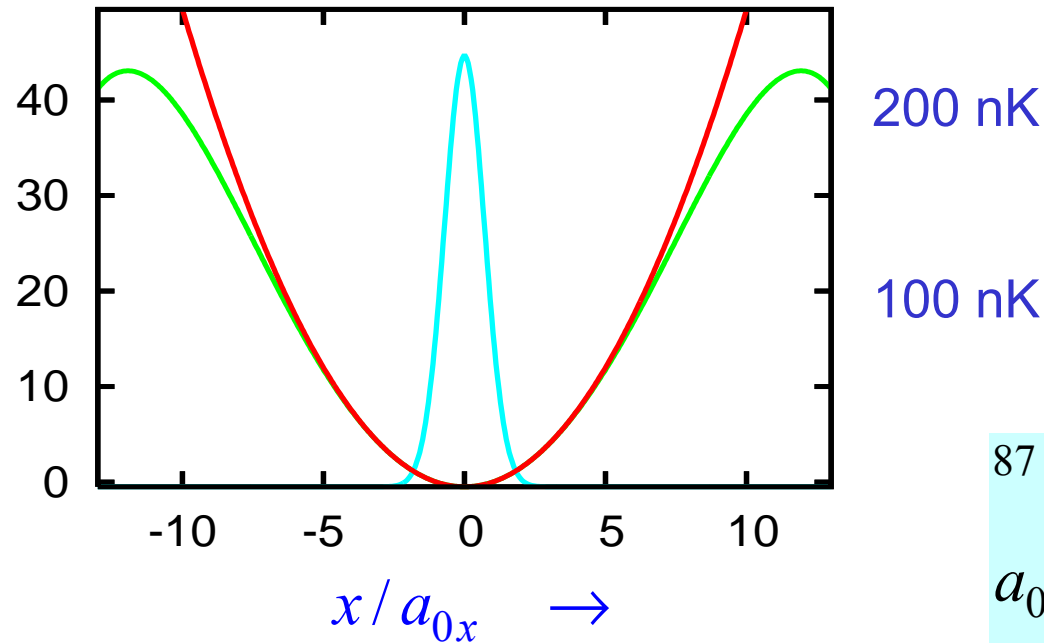


$$H = \frac{1}{2m} \mathbf{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega_x^2 x^2 + \frac{1}{2} m \omega_y^2 y^2 + \frac{1}{2} m \omega_z^2 z^2$$
$$= H_x + H_y + H_z$$



# Základní stav a potenciál

číslo hladiny  
lineárního  
oscilátoru



$^{87}\text{Rb}$

$a_0 = 1\mu\text{m}$

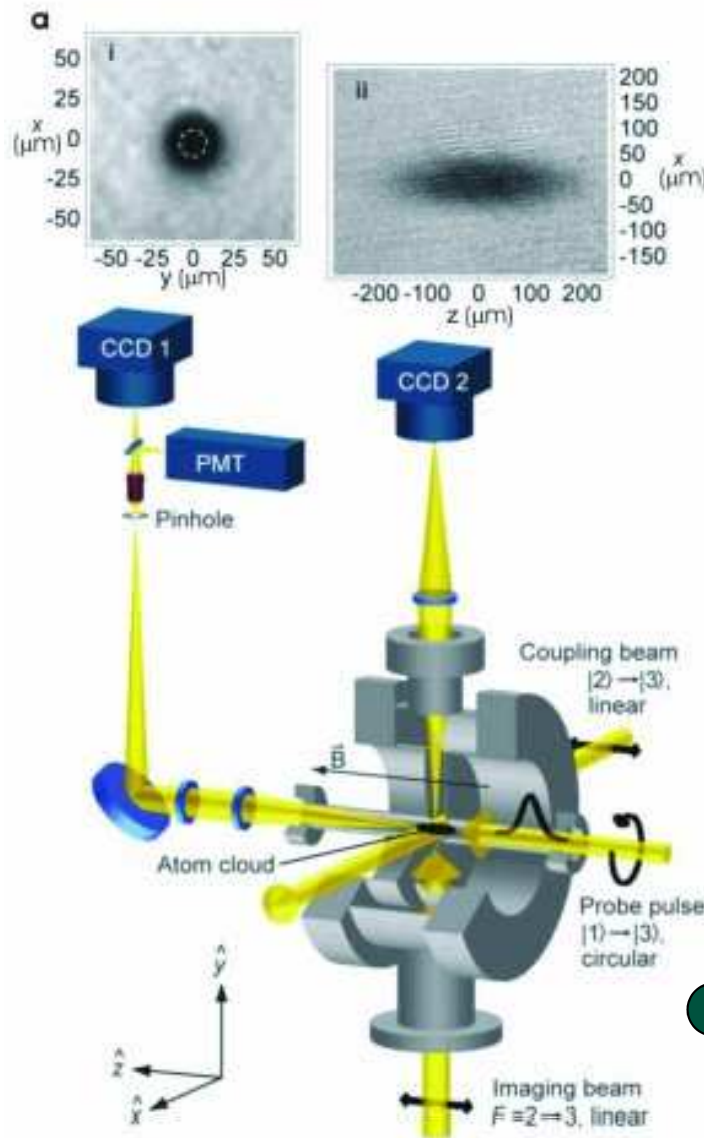
$\hbar\omega = 10\text{ nK}$

$$\psi_0(x, y, z) = \phi_{0x}(x)\phi_{0y}(y)\phi_{0z}(z)$$

$$\phi_0(u) = \frac{1}{\sqrt{a_0\pi}} e^{-\frac{u^2}{2a_0^2}}, \quad a_0 = \sqrt{\frac{\hbar}{m\omega}}, \quad E_0 = \frac{1}{2}\hbar\omega = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar^2}{ma_0^2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{\hbar^2}{Mu_m a_0^2}$$

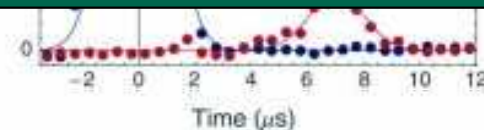
$$V(u) = \frac{1}{2}m\omega^2 u^2 = \frac{1}{2}\hbar\omega \left(\frac{u}{a_0}\right)^2$$

# Podrobnosti o studených parách sodíku v pasti

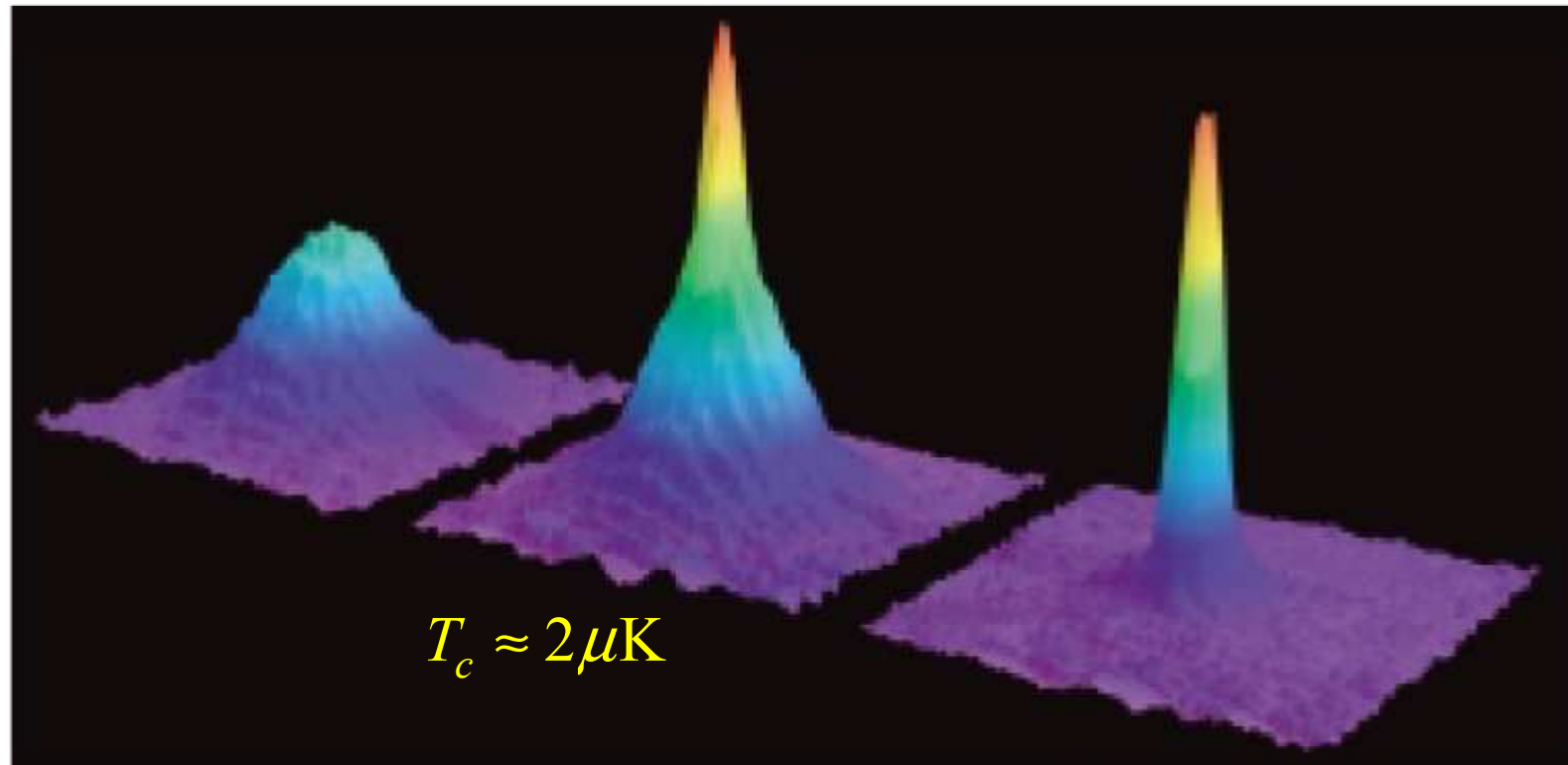


## OBLAK STUDENÝCH SODÍKOVÝCH ATOMŮ

- obláček je *makroskopický*
- vidíme *tepelné rozdělení*
  - cigárový tvar: *protažený rotační elipsoid*
- difusní obrysy: *Maxwellovo–Boltzmannovo rozdělení*
  - *prostorová hustota v parabolickém potenciálu*

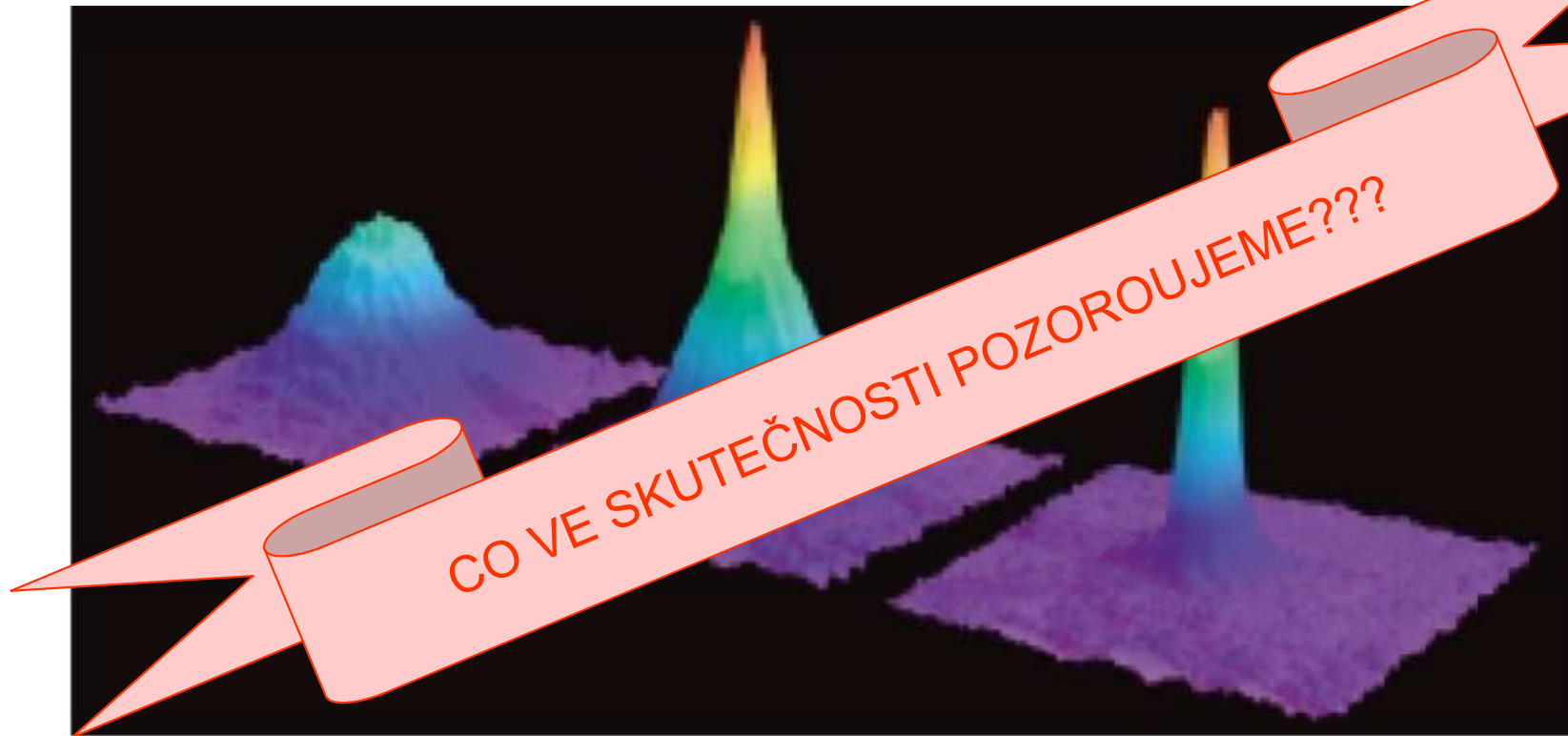


## *BEC pozorovaná metodou TOF*



*Figure 7.* Observation of Bose-Einstein condensation by absorption imaging. Shown is absorption vs. two spatial dimensions. The Bose-Einstein condensate is characterized by its slow expansion observed after 6 ms time-of-flight. The left picture shows an expanding cloud cooled to just above the transition point; middle: just after the condensate appeared; right: after further evaporative cooling has left an almost pure condensate. The total number of atoms at the phase transition is about  $7 \times 10^5$ , the temperature at the transition point is  $2 \mu\text{K}$ .

## BEC pozorovaná metodou TOF



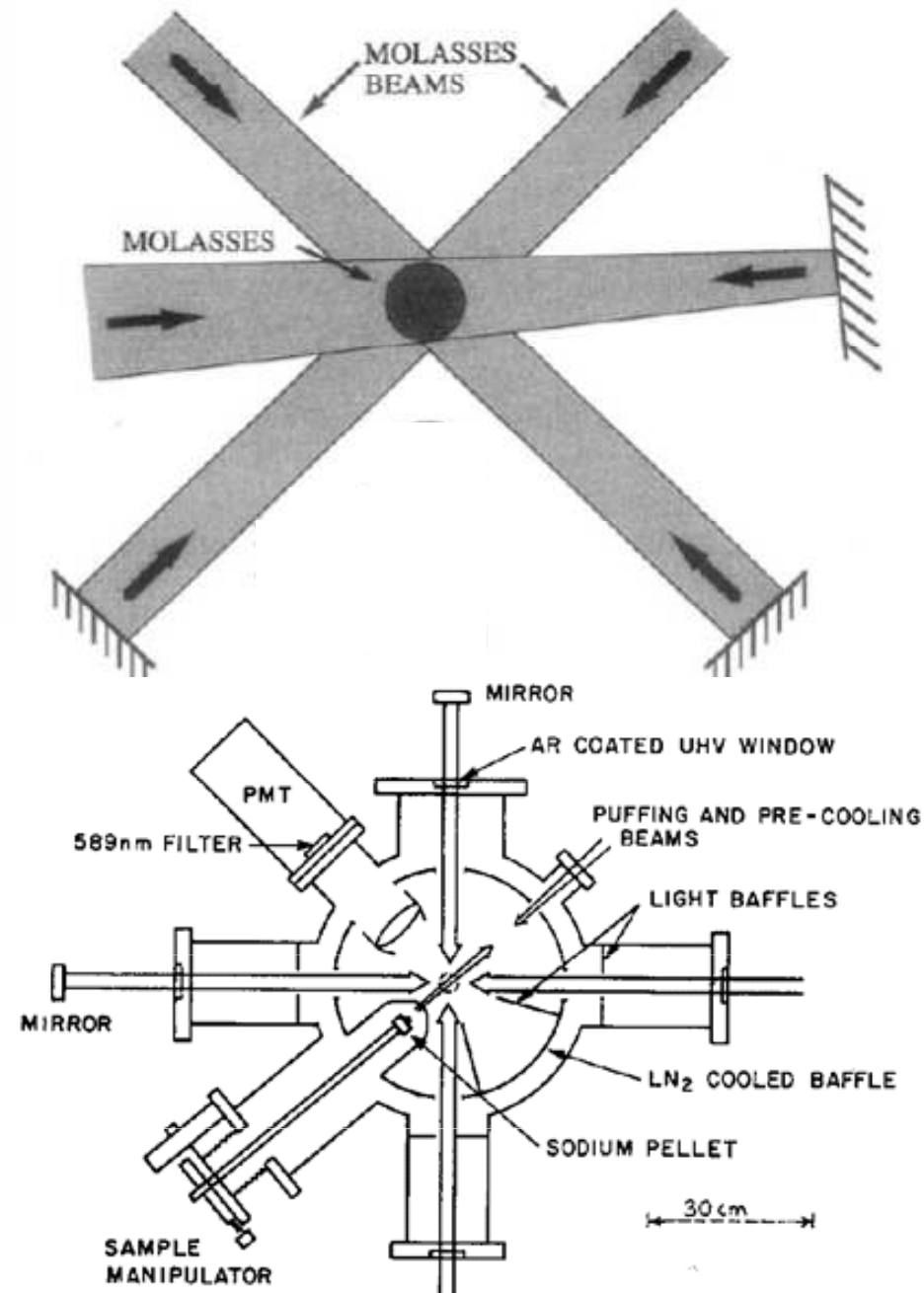
*Figure 7.* Observation of Bose-Einstein condensation by absorption imaging. Shown is absorption vs. two spatial dimensions. The Bose-Einstein condensate is characterized by its slow expansion observed after 6 ms time-of-flight. The left picture shows an expanding cloud cooled to just above the transition point; middle: just after the condensate appeared; right: after further evaporative cooling has left an almost pure condensate. The total number of atoms at the phase transition is about  $7 \times 10^5$ , the temperature at the transition point is  $2 \mu\text{K}$ .

# Tři zkřížené svazky: 3D Dopplerovo chlazení podle Chu

je třeba 20 000 fotonů  
k zastavení z pokojové  
teploty

brzdná síla je pak  
úměrná rychlosti:  
viskózní prostředí,  
„syrup“

Pro intenzivní laser je  
to otázka milisekund



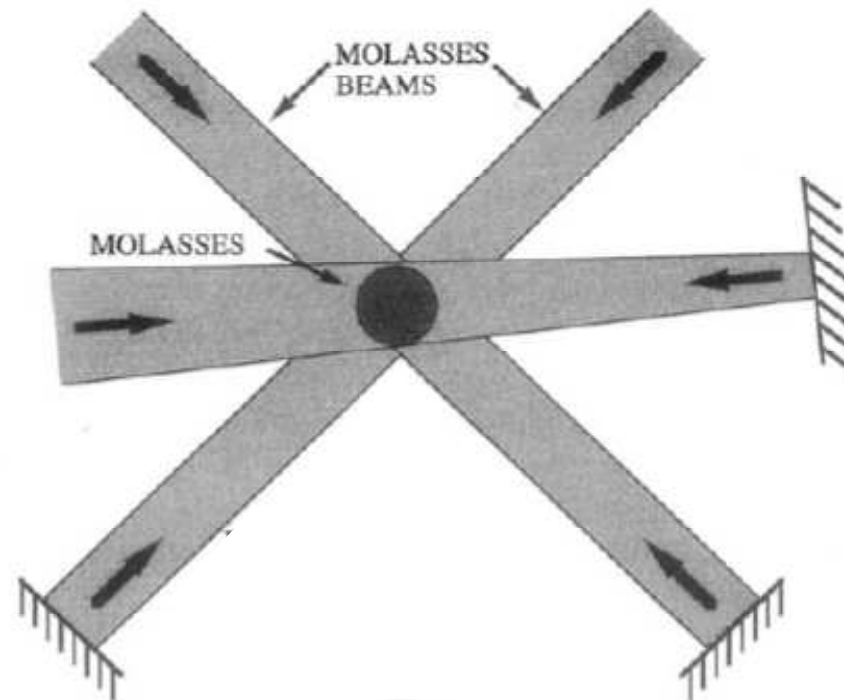


## TOF experiment: příprava oblaku

20 000 fotonů je třeba  
k zastavení atomu z  
pokojové teploty

brzdná síla úměrná  
rychlosti, připomíná  
viskosní prostředí,  
"sirup"

Pro silné lasery  
záležitost milisekund



## *TOF experiment: fáze balistického rozletu oblaku*

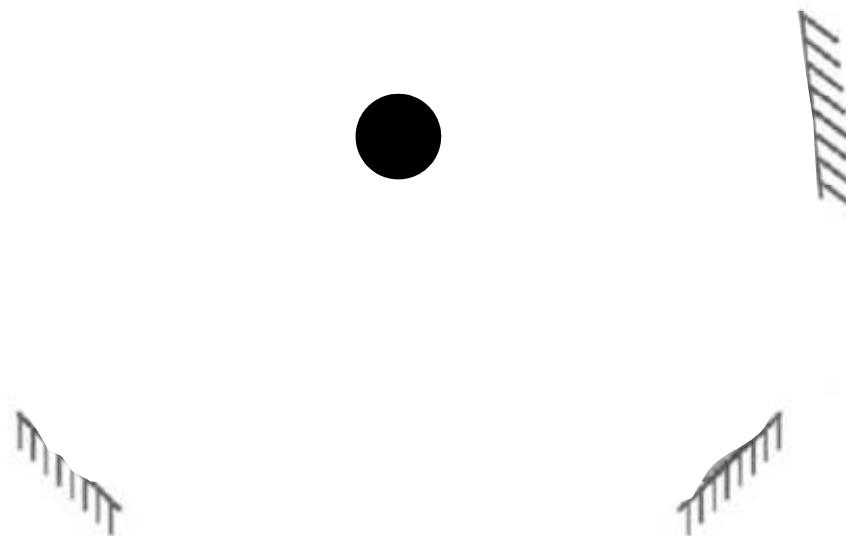
20 000 fotonů je třeba  
k zastavení atomu z  
pokojové teploty

brzdná síla úměrná  
rychlosti, připomíná  
viskosní prostředí,  
"sirup"

Pro silné lasery  
záležitost milisekund

měření tepelného  
rozdělení: vypneme  
lasery. Atomy klesají v  
tíhovém poli

Zároveň se rozletují  
balistickým způsobem



## *TOF experiment: fáze balistického rozletu oblaku*

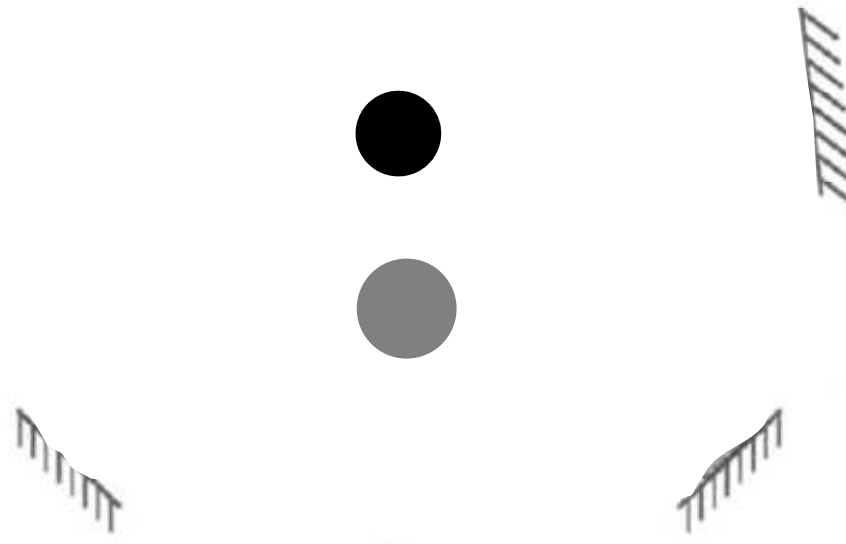
20 000 fotonů je třeba  
k zastavení atomu z  
pokojové teploty

brzdná síla úměrná  
rychlosti, připomíná  
viskosní prostředí,  
"sirup"

Pro silné lasery  
záležitost milisekund

měření tepelného  
rozdělení: vypneme  
lasery. Atomy klesají v  
tíhovém poli

Zároveň se rozletují  
balistickým způsobem



## *TOF experiment: fáze balistického rozletu oblaku*

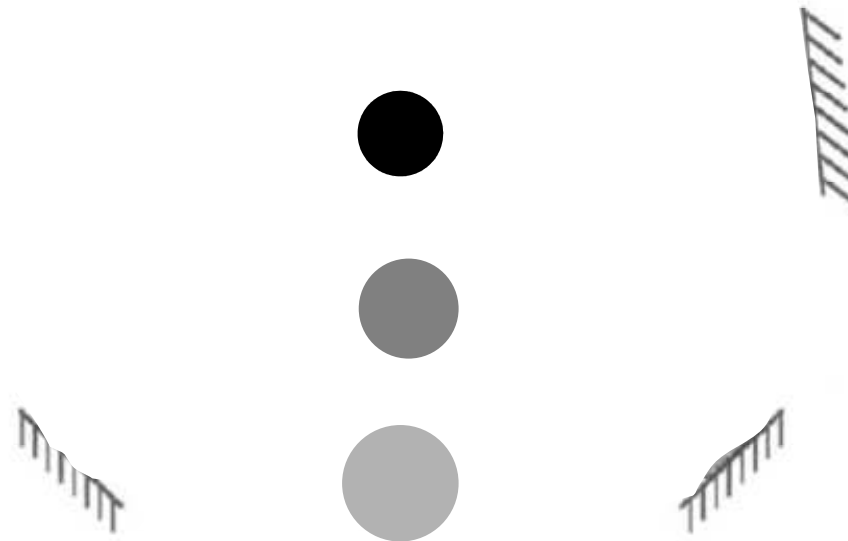
20 000 fotonů je třeba  
k zastavení atomu z  
pokojové teploty

brzdná síla úměrná  
rychlosti, připomíná  
viskosní prostředí,  
"sirup"

Pro silné lasery  
záležitost milisekund

měření tepelného  
rozdělení: vypneme  
lasery. Atomy klesají v  
tíhovém poli

Zároveň se rozletují  
balistickým způsobem



# TOF experiment: měření distribuce (hybností)

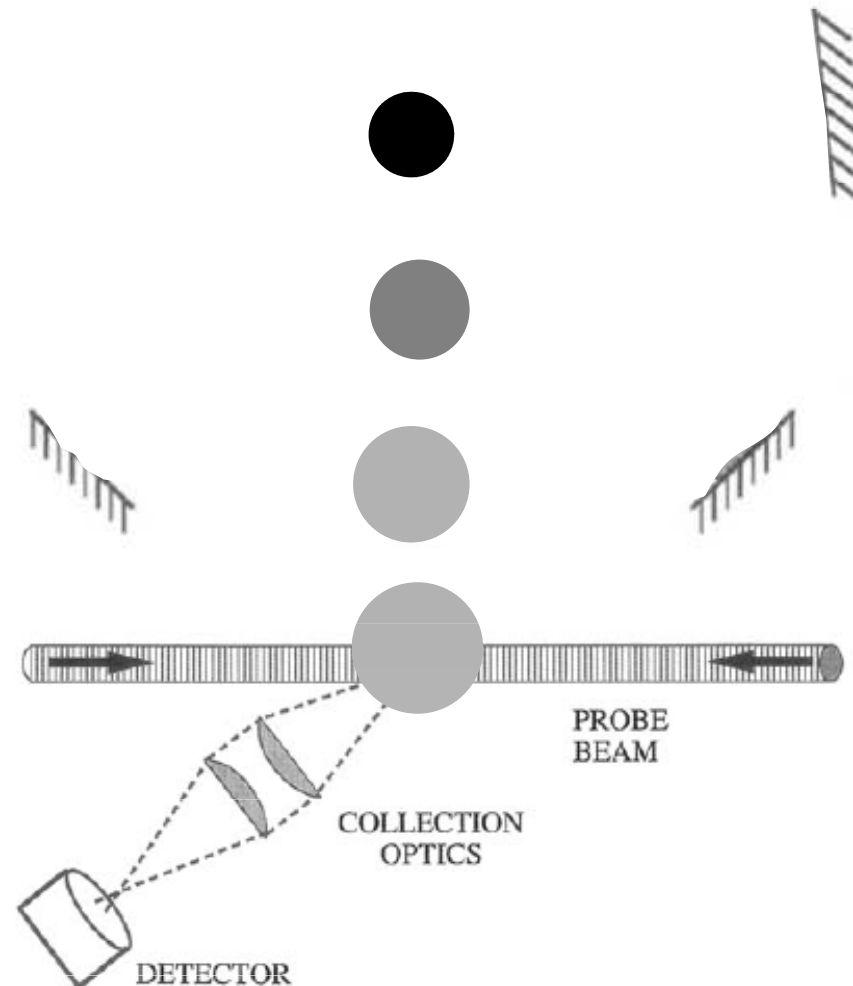
20 000 fotonů je třeba  
k zastavení atomu z  
pokojové teploty

brzdná síla úměrná  
rychlosti, připomíná  
viskosní prostředí,  
"sirup"

Pro silné lasery  
záležitost milisekund

měření tepelného  
rozdělení: vypneme  
lasery. Atomy klesají v  
tíhovém poli

Zároveň se rozletují  
balistickým způsobem



sondovací laserový  
svazek vyvolá  
fluorescenci atomů

z tvaru a velikosti  
obláčky je určeno  
rychlostní rozdělení

# BEC pozorovaná v rozdělení rychlostí metodou TOF

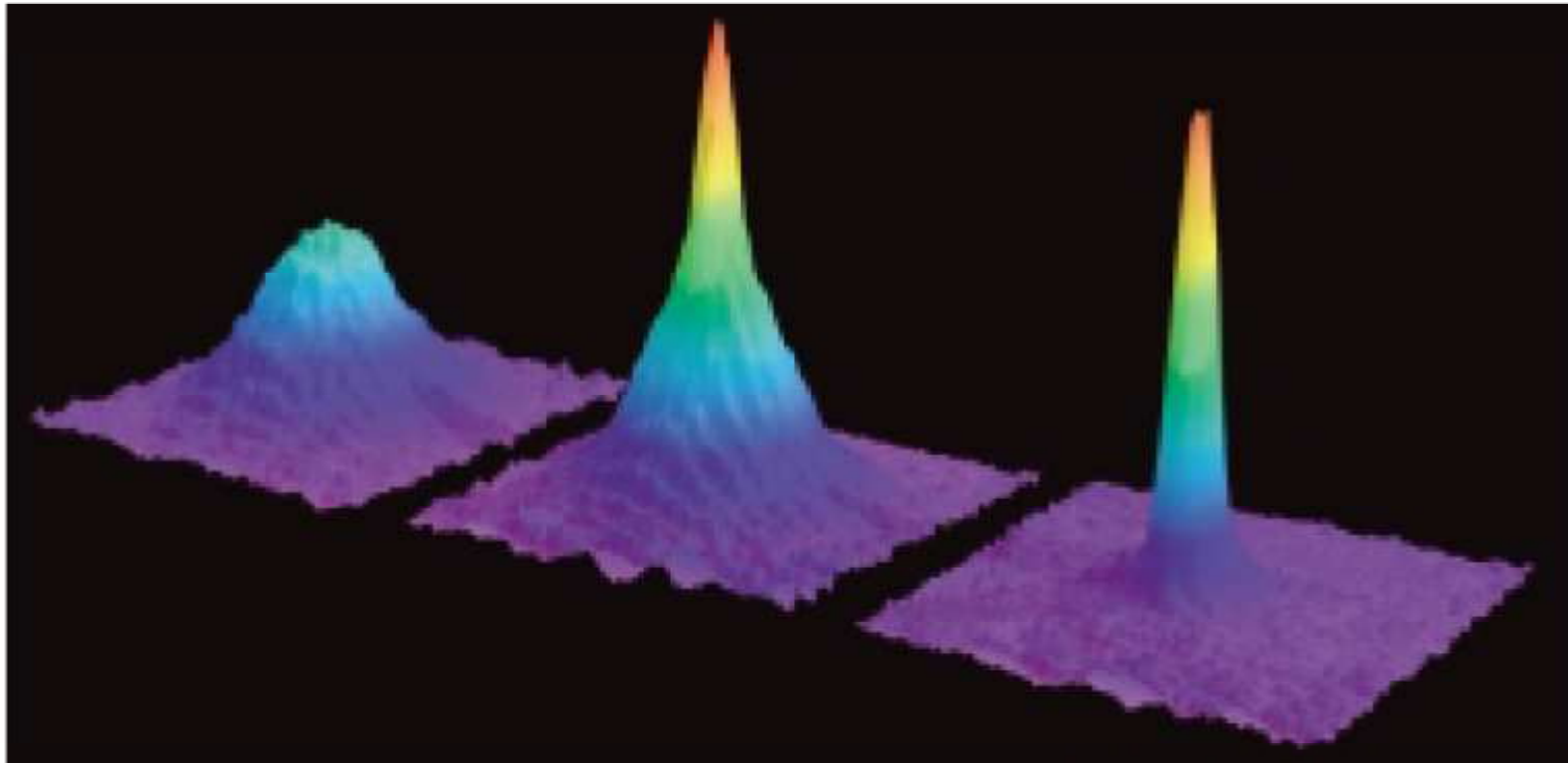


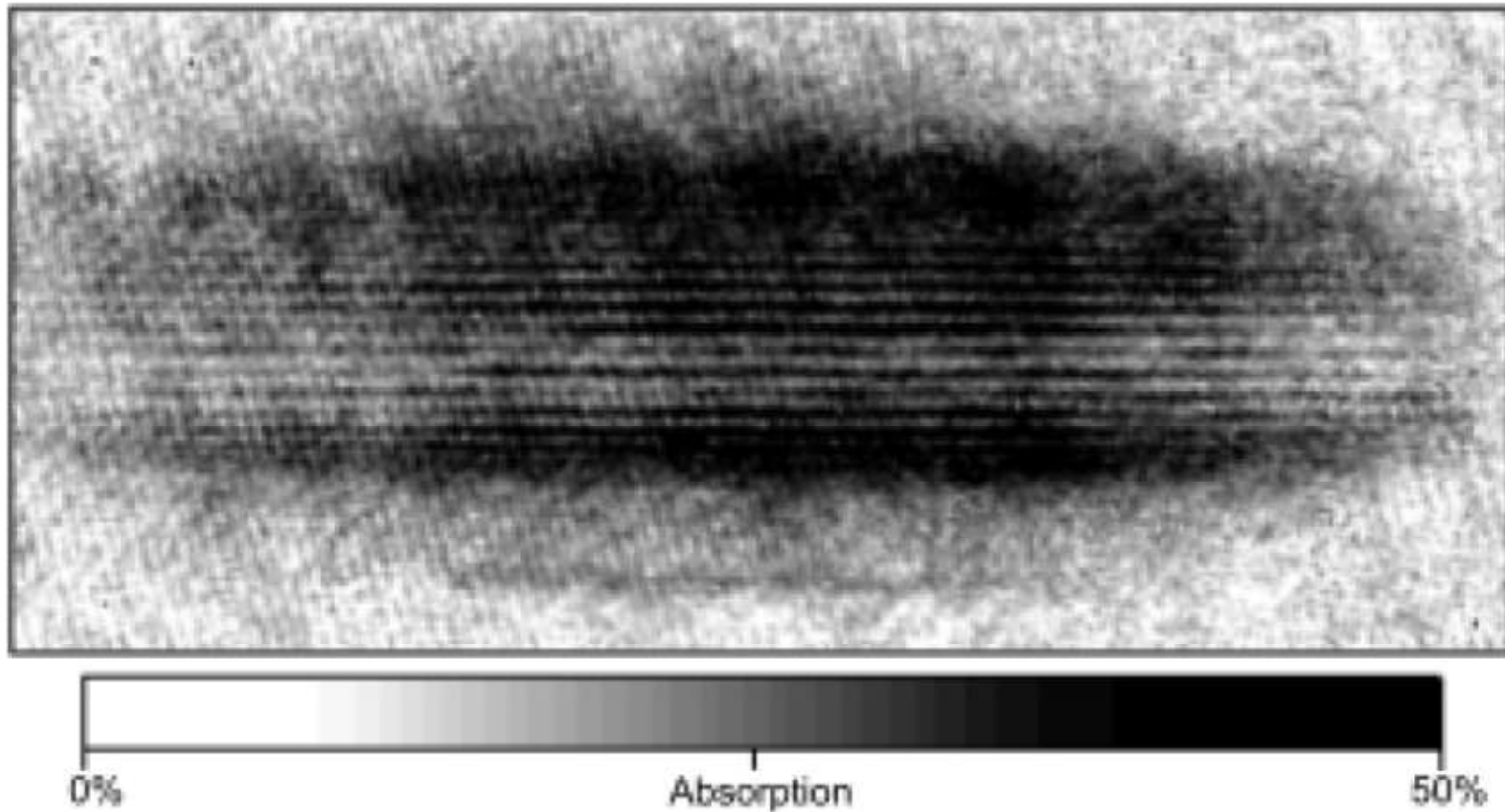
Figure 7. Comparison of the BEC vs. two species observed above the evaporative transition

## Kvalitativní vlastnosti:

- ♠ Gaussovy profily
- ♠ široké vs. úzké
- ♠ isotropní vs. anisotropní

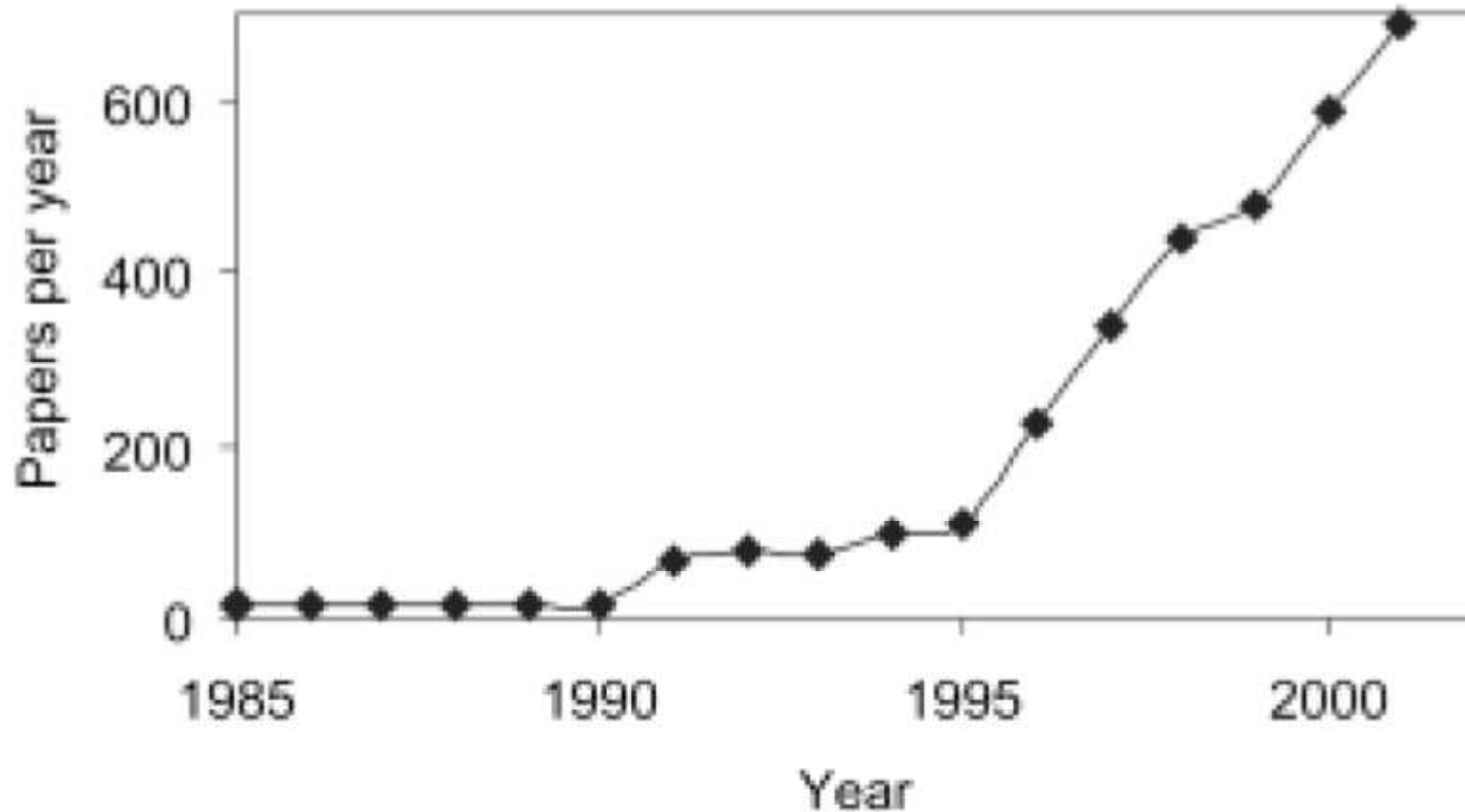
by absorption imaging. Shown is absorption image of the condensate is characterized by its slow expansion. The left image shows an expanding cloud cooled to just above the transition point where the condensate appeared; right: after further expansion. The total number of atoms at the phase transition point is  $2 \mu\text{K}$ .

## *Interference atomů*



Dva koherentní kondensáty se pronikají a interferují.  
Vertikální vzdálenost proužků je  $15\ \mu\text{m}$   
Vodorovný rozměr obláčku  $1,5\text{mm}$

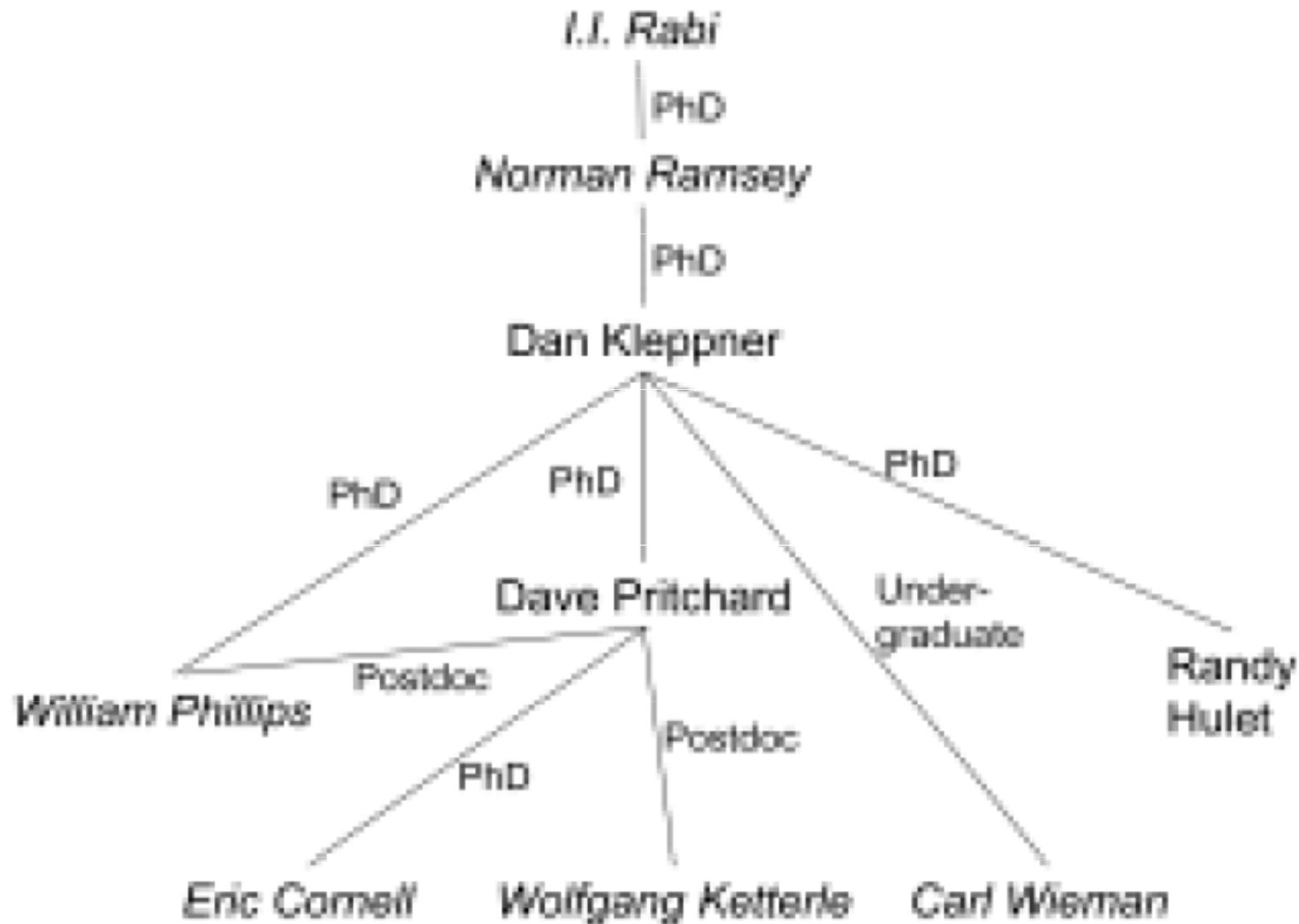
## *Boom BEC, teď ještě mnohem živější*



*Figure 1.* Annual number of published papers, which have the words “Bose” and “Einstein” in their title, abstracts or keywords. The data were obtained by searching the ISI (Institute for Scientific Information) database.



# *Strom nobelistů (kursivou) v atomové fyzice*



*The end*