Aplikace

tenzorové

algebry

v geologii

M A S A R Y K O V A U N I V E R Z I T A
P Ř Í R O D O V Ě D E C K Á F A K U L T A

A p l i k a c e t e n z o r o v é a l g e b r y v g e o l o g i i

R o s t i s l a v M E L I C H A R

B R N O
Verze ze dne: 8. května 2011

Rostislav Melichar: Aplikace tenzorové algebry v geologii. *Masarykova univerzita v Brně.* Brno, 8. května 2011.

ISBN 00-00000-00-0

Předmluva

Předložený text je stručným přehledem základních termínů a pravidel pro počítání s tenzory; má spíše charakter mírně rozšířených vysokoškolských poznámek než normální učebnice. Cílem bylo spíše vymezit potřebné znalosti, než je vyložit jako v klasické učebnici matematiky. Text psaný velkým písmem je povinným obsahem základního kurzu, malým písmem jsou některé doplňkové informace a hvězdičkou jsou označeny podkapitoly, které jsou určeny pro hlubší porozumění problematiky pro zájemce.

Součástí kurzu je využití programu Excel s doplňkem Matrix, který lze volně získat. V Excelu je nutno zvládnout následující základní matematické operace, základní matematické funkce, vkládání vzorců, vkládání interaktivní proměnné do vzorců, přenášení a kopírování vzorců:

Operátory	český název
=	ruční vložení vzorce (vepsáním)
+	sčítání
−	odčítání
*	násobení
/	dělení

Funkce	český název
ODMOCNINA(a)	druhá odmocnina z čísla a
MOD(a; b)	zbytek po celočíselném dělení a/b
RADIANS(a)	převod úhlů ze stupňů na radiány
DEGREES(a)	převod úhlů z radiánů na stupně
SIN(a)	sinus úhlu v radiánech
COS(a)	cosinus úhlu v radiánech
TG(a)	tangens úhlu v radiánech
ARCSIN(a)	akus sinus – vrátí úhel v radiánech
ARCCOS(a)	akus cosinus – vrátí úhel v radiánech
ARCTG(a)	akus tangens – vrátí úhel v radiánech
ARCTG2(x; y)	akus tangens ze souřadnic x, y – vrátí úhel v radiánech

Ovládání	český název
$\boxed{\text{Ctrl}}+\boxed{\text{C}}$	zkopírovat do paměti
$\boxed{\text{Ctrl}}+\boxed{\text{X}}$	vyjmout do paměti
$\boxed{\text{Ctrl}}+\boxed{\text{V}}$	vložit z paměti

Ačkoliv Ecel obsahuje některé maticové funkce, je lepší užívat funkce doplňku Matrix, neboť Excelovské funkce někdy dávají chybné znaménko výsledku. V doplňku Matrix jsou definovány následující operace, které je nutno v kurzu zvládnout:

Funkce	český název
MAbs	norma (délka) vektoru nebo norma matice *Norm of vector or matrix*
MNorm	norma (délka) vektoru nebo norma matice *Vector of matrix norm*
MNormalize	vektor normovaný na jednotkovou délku (=směrový vektor) *Vectors normalization*
MAdd	součet vektorů nebo matic stejných rozměrů *Matrix addition*
MSub	rozdíl vektorů nebo matic stejných rozměrů *Matrix subtraction*
MMultS	skalární násobek vektoru nebo matice *Matrix scalar multiplication*
ProdScal	skalární součin dvou vektorů stejných rozměrů *Scalar product*
ProdVect	vektorový součin dvou vektorů v trojrozměrném prostoru *Vector product*
MProd	součin dvou nebo více matic, předchozí matice musí mít vždy počet sloupců rovný počtu řádků matice následují *Matrix product*
MT	transponovaná matice *Matrix transpose*
MDet	determinant čtvercové matice *Determinant*
MInv	inverzní matice z čtvercové regulární matice *Matrix inverse*
MEigenvalJacobi	matice charakteristických čísel symetrické čtvercové matice *Eigenvalues of symmetric matrix*
MEigenvecJacobi	matice charakteristických vektorů symetrické čtvercové matice *Eigenvectors of symmetric matrix*

Ovládání	český název
$\boxed{\text{Ctrl}} + \boxed{\text{Shift}} + \boxed{\text{OK}}$	vložení výsledku maticové funkce do všech vybraných buněk

Obsah

Kapitola 1

Kvantifikace deskriptivních údajů a základní algebraické struktury

1.1 Relační údaje

Při zpracovávání údajů nejprve zvládáme pouze porovnávání jevů (relace), později je umíme do různé míry kvantifikovat.

Základní relační vztahy

Rovnost a různost dat: jednotlivé údaje můžeme porovnávat a můžeme určit, zda jsou shodné ($a = b$) nebo rozdílné ($a \neq b$) . Neumíme je jinak srovnat, ani je seřadit podle velikosti.
Nerovnosti dat: jednotlivé údaje můžeme porovnávat, umíme určit, zda je den větší než druhý ($a > b$), umíme je seřadit podle velikosti ($a > b > c$) .

Základní vlastnosti relací

Vlastnost	**Rovnost**	**Různost**	**Nerovnost**
Reflexivnost:	$a = a$	–	–
Symetričnost:	$a = b \Rightarrow b = a$	$a \neq b \Rightarrow b \neq a$	$a > b \Rightarrow b < a$ (obrácené znaky)
Tranzitivnost:	$(a = b) \wedge (b = c)$ $\Rightarrow a = c$	z předpokladu $(a \neq b) \wedge (b \neq c)$ nelze usoudit, že $a \neq c$	$a > b \wedge b > c$ $\Rightarrow a > c$

Pro různost neplatí reflexivnost a tranzitivnost. Pro nerovnosti neplatí reflexivnost a symetričnost.

1.2 Kvantifikované údaje

Kvantifikované údaje se mohou lišit jednak podle míry možné kvantifikace, jednak mohou být složené. Vždy však jsou vyjádřeny čísly – proto také zavádíme "fyzikální"jednotky. Mezi složitější kvantitativní vztahy patří např. komplexní čísla a také tenzory, kterým je věnována hlavní část výkladu.

1.2.1 Míra kvantifikace

Rozdílové údaje: Můžeme určit rozdíl $(a - b)$, tj. o kolik je jeden údaj větší či menší nežli údaj druhý. Nevíme však, jaká je pozice absolutní nuly, a proto si často volíme nulu dohodou. Poměr velikostí údajů však určit nelze, nař. teplota ve stupních Celsia.
Poměrové údaje: Můžeme určit nejen rozdíl, ale i poměr velikostí $(a\,/\,b)$, neboť je známo, jaká je absolutní nula. Např. teplota v Kelvinech.

1.2.2 Veličiny podle míry složenosti

Fyzikální veličiny podle jejich složitosti rozdělujeme do několika typů:

- skalár – veličina je určena jedním ($3^0 = 1$) číslem (teplota, hustota, objem, . . .)
- vektor – veličina je určena třemi ($3^1 = 3$) čísly (napětí, síla, rychlost, . . .)

- tenzor 2. řádu – veličina je určena obecně $3^2 = 9$ čísly, matice $3{\times}3$ (napjatost, optická indikatrix, ...)
- tenzor 3. řádu – veličina je určena obecně $3^3 = 27$ čísly, zjednodušeně jako matice $3{\times}6$ (piezoelektrický jev, ...)
- tenzor 4. řádu – veličina je určena obecně $3^4 = 81$ čísly, zjednodušeně jako matice $6{\times}6$ (elastické vlastnosti, ...)
- tenzor ... atd.

Obecně můžeme všechny označit za tenzory, přitom skaláry za tenzory nultého řádu, vektory za tenzory prvního řádu a tenzory *s. s.* za tentory *s. l.* druhého řádu.

Skaláry

U skalární veličiny lze v každém místě (x, y, z) a čase (t) určit jednoznačně **velikost** (případně znaménko) dané veličiny:

$$a = f(x, y, z, t) \tag{1.1}$$

Skalární veličiny označujeme zpravidla malými nebo velkými písmeny latinské abecedy, a to tzv. matematickou kurzívou.

Vektory

Vektory mají v každém bodě a čase jak svoji **velikost**, tak i svůj **směr** (případně smysl – znaménko). Vektory znázorňujeme v maticovém zápisu jako sloupcový vektor. Značíme je obvykle malými písmeny (latinskými či řeckými), a to tučně nebo se šipkou nad tímto písmenem ($\mathbf{n} = \vec{n}$). Vektor se znázorňuje pomocí orientované (směrované) šipky, jejíž délka vyjadřuje velikost vektoru.

Tenzory

Tenzory se znázorňují elipsoidem, u kterého je nutno znát délky všech tří poloos a rovněž jejich orientaci.

Směr poloos, které jsou na sebe kolmé, je dán třemi nezávislými složkami jako ortogonální směrový systém.

Tenzory se označují obvykle velkými písmeny latinské abecedy tučně nebo v hranatých závorkách.

1.3 Základní algebraické operace

Algebraické operace umožňují kvantitativně zpracovávat vědecká data. **Algebraická operace přiřazuje uspořádané n-tici prvků (údajů) nejvýše jeden prvek výsledný.**

Podle počtu prvků, které do ní vstupují, rozlišujeme operace *unární* (s jedním prvkem), *binární* (se dvěma prvky), *ternární* (tříprvkové) atd. Binární algebraickou operaci vyznačujeme různými znaky umístěnými mezi oba prvky vstupujícími do operace, např. $+, -, \cdot, \times, :, /$ a další, pro obecné označení nějaké operace používáme obvykle $\circ$. Při aditivním charakteru operace (sčítání) užíváme $+$ nebo $\oplus$, při multiplikativním (násobení) zase $\cdot, \odot$ nebo $\times, \otimes$ apod.

Podle toho, zda jsou vstupní a výstupní prvky z téže množiny nebo nikoliv, rozlišujeme operace *vnitřní* (prvky ze stejné množiny) a nebo *vnější*, pokud výsledný prvek a prvky vstupní patří jiným množinám. U vnitřních operací můžeme rozlišit ještě operace „*na množině*“, které přiřazují výsledný prvek všem možným kombinacím prvků, a nebo operace „*v množině*“, které výsledný prvek přiřazují jen některým kombinacím.

1.3.1 Vlastnosti binárních algebraických operací

Následující vlastnosti mohou ale nemusí mít určitá algebraická operace. Při tom existence některých podmiňuje možnost dalších a případně také jejich použití. Pro jednoduchost odvolávání se na jednotlivé vlastnosti je u nich vzynačeno zkratkové označení písmenem.

Neomezená existence operace – vlastnost E

Ke každým dvěma prvkům $a, b \in \mathcal{A}$ vstupujícím do operace existuje i prvek výsledný: $a \circ b = c$. Tato vlastnost je důležitá pro to, zda se musíme starat o charakter vstupních dat, případně která data do operace vstupovat nemohou. Např. u dělení reálných čísel nelze užít nulu ve jmenovateli, zatímco u násobení čísel mohou do operace vstupovat všechna data.

Komutativnost operace – vlastnost K

Pro každé dva prvky $a, b \in \mathcal{A}$ platí: $a \circ b = b \circ a$.

Asociativnost operace – vlastnost A

Pro každé tři prvky $a, b, c \in \mathcal{A}$ platí: $(a \circ b) \circ c = a \circ (b \circ c)$.

Existence neutrálního prvku – vlastnost N

V množině prvků existuje takový prvek $e \in \mathcal{A}$, že pro každý prvek $a \in \mathcal{A}$ platí: $a \circ e = e \circ a = a)$.
Neutrální prvek je tedy takový, že v operaci nemění hodnotu prvku druhého.
Pokud se jedná o sčítání, označujeme takový prvek jako *nulový*: 0, v případě násobení jako prvek *jednotkový*: 1.

Existence inverzního prvku – vlastnost I

Pro každý prvek $a \in \mathcal{A}$ existuje prvek inverzní $\bar{a} \in \mathcal{A}$ takový, že platí: $a \circ \bar{a} = e$.
Prvky $a, \bar{a}$ označujeme jako *vzájemně inverzní* prvky. Jedná-li se o sčítání, označujeme inverzní prvek jako prvek *opačný* $-a$, u násobení jako prvek *převrácený* neboli reciproký a^{-1}.
Je-li operace asociativní, pak ke každému prvku $a \in \mathcal{A}$ existuje nejvýše jeden prvek inverzní $\bar{a} \in \mathcal{A}$ vzhledem k dané operaci, a platí: $(\bar{\bar{a}}) = a$.

Existence inverzní operace – vlastnost $\bar{\mathbf{L}}, \bar{\mathbf{P}}$

Pro prvky ve vztazích:

$$a \circ x = b \qquad\qquad x \circ a = b$$

existují takové operace, že platí:

$$x = a \boxed{\mathrm{L}} b \qquad\qquad x = b \boxed{\mathrm{P}} a$$

Prvou inverzní operaci $\boxed{\mathrm{L}}$ nazýváme jako pravou inverzi a druhou $\boxed{\mathrm{P}}$ jako levou. Je-li původní operace komutativní, pak jsou obě inverzní operace – pravá a levá – totožné.
Mohou nastat následující situace: existují obě inverzní (pravá i levá) operace, existuje pouze jedna z nich a nebo neexistuje žádná z nich. Pokud inverzní operace existují, mohou existovat NA nebo V množině, tj. jsou definovány pro všechny prvky nebo jen pro prvky některé.
Existence inverzní operace umožňuje řešení rovnic s danou operací. Jedná-li se o operaci sčítání, je inverzní operací odčítání, jde-li o násobení, je inverzní operací dělení.

Distributivnost jedné oprace vzhledem k operaci druhé – vlastnost D

Distributivnost vyjadřuje vztahy mezi dvěma operacemi, např. $\oplus$ a $\odot$. Je-li operace $\odot$ distributivní vzhledem k operaci $\oplus$, pak platí:

$$(a \oplus b) \odot c = (a \odot c) \oplus (b \odot c)$$

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c)$$

1.4 Algebraické struktury

Algebraická struktura je neprázdná množina prvků $\mathcal{A}$, na níž je definována alespoň jedna algebraická operace.

1.4.1 Struktury s jednou vnitřní operací

Grupoid je neprázná množina prvků, na níž je definována jedna operace s vlastností **E**.
Pologrupa je grupoid, jehož operace je asociativní.
Grupa je pologrupa, jejíž operace má i vlastnosti **N** a **I**. Definicí je zajištěna i existence inverzních operací na grupě.
Pokud má grupoid, pologrupa či grupa i vlastnost **K**, nazývá se komutativní neboli abelovský grupoid, pologrupa či grupa.

Algebraická struktura		Vlastnosti operace				
		E neomezenost	**K** komutativnost	**A** asociativnost	**N** neutrální p.	**I** inverzní p.
Grupoid	nekomutativní	•	–	–	–	–
	komutativní	•	•	–	–	–
Pologrupa	nekomutativní	•	–	•	–	–
	komutativní	•	•	•	–	–
Grupa	nekomutativní	•	–	•	•	•
	komutativní	•	•	•	•	•

Tabulka 1.1: Algebraické struktury s jednou vnitřní operací. **E** – neomezená existence operace, **N**– existence neutrálního prvku, **I**– existence inverzních prvků.

Algebraická struktura	Vlastnosti první operace					Vlastnosti druhé operace					Vzájemně
	$\mathbf{E}_1$	$\mathbf{K}_1$	$\mathbf{A}_1$	$\mathbf{N}_1$	$\mathbf{I}_1$	$\mathbf{E}_2$	$\mathbf{K}_2$	$\mathbf{A}_2$	$\mathbf{N}_2$	$\mathbf{I}_2$	**D**
Polookruh	•	•	•	–	–	•	(•)	(•)	–	–	•
Okruh	•	•	•	•	•	•	(•)	(•)	–	–	•
Těleso	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•	•

Tabulka 1.2: Algebraické struktury se dvěma vnitřními operacemi. **E** – neomezená existence operace, **K**– komutativnost, **A**– asociativnost, **N**– existence neutrálního prvku, **I**– existence inverzních prvků, **D** – distributivnost druhé operace vzhledem k první.

1.4.2 Struktury se dvěma vnitřními operacemi

Polookruh je neprázdná množina, na níž jsou definovány dvě vnitřní operace, první (sčítání) a druhá (násobení). První má vlastnosti $\mathbf{E}_1$, $\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{K}_1$ a druhá **E**2 a dále mají společnou vlastnost **D** druhé operace vzhledem k operaci první.
Okruh je polookruh, jehož první operace má jěště vlastnosti $\mathbf{N}_1$ $\mathbf{I}_1$.

Platí-li komutatinost a asociativnost, příp. odě vlastnosti druhé operace, nazývá se polookruhh nebo okruh jako komutativní, asociativní, příp. asociativněkomutativní.
Těleso je asociativně-komutativní okruh, kde druhá operace má navíc vlastnosti $\mathbf{N}_2$ a $\mathbf{I}_2$ pro všechny nenulové prvky.

Kapitola 2

Základy vektorové matematiky

2.1 Základní informace o vektorech

Etymologie

Vektor= přenašeč (z místa na místo), cestovatel.

Definice

Vektor je složená veličina, určená jednak velikostí, jednak směrem. Její složenost se vyjadřuje při zápisu zpravidla polotučným písmem, obecně se užívají malá písmena, např. **a**.

Souřadnicové soustavy

Pro numerická řešení studovaných problémů užíváme téměř výhradně pravotočivé ortogonální ekvidistantní souřadné soustavy:

- **ekvidistantní** – na všech osách je stejné a rovnoměrné dělení.
- **ortogonální** – mezi souřadnými osami jsou pravé úhly
- **pravotočivá** – kladný směr rotace je pravotočivý. „Točivost“ souřadné soustavy určíme pomocí pravidla pravé ruky: *„Natočíme-li palec pravé ruky do kladného směru osy, pak ostatní prsty ukazují kladný směr rotace kolem ní.“* Tento kladný směr určuje zároveň vzájemnou pozici obou dalších os: kladná část osy $+z$ je orientována o 90° v kladném směru rotace od osy $+y$.

Směry souých os označujeme pomocí jednotkových vektorů $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ a $\mathbf{e}_3$ (tzv. ortonormální báze).

Geografické souřadnice

Geografický souřadný systém je určen klasickou konvencí:

- osa x je vodorovná a její kladná část směřuje k severu
- osa y je vodorovná a její kladná část směřuje k východu
- osa z je vertikální a její kladná část směřuje dolů

Směry souřadných os jsou určeny jednotkovými směrovými vektory $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ a $\mathbf{z}$.

$$[\mathbf{x}] = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}_G \qquad [\mathbf{y}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}_G \qquad [\mathbf{z}] = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}_G \tag{2.1}$$

Složky vektorů určené v geografické souřadnicové soustavě jsou označovány indexy x, y a z.

Při některých postupech potřebujeme určit, která část prostoru je kladná. Konvenčně si ji definujeme s ohledem na historický vývoj takto:

hodnota na ose:			část
z	y	x	poloprostoru
$+$	libovolné	libovolné	
	$+$	libovolné	kladná část
		$+$	
0	0	0	vektor nulové délky neurčuje směr
		$-$	
	$-$	libovolné	záporná část
$-$	libovolné	libovolné	

Za kladnou část prostoru tedy považujeme její spodní (dolní) polovinu, u vodorovných směrů jejich východní část a konečně u severojižních vodorovných směrů za kladnou část považujeme směr k severu.

Formy zápisu vektorů

Vektor v trojrozměrném prostoru je uspořádané trojice čísel, kterou zapisujeme do složených závorek (**vektorový tvar**):

$$\mathbf{a} = \vec{a} = \{a_1; a_2; a_3\} \tag{2.2}$$

K zápisu můžeme použít i matickové matematiky. Potom všechny vektory považujeme za sloupcové, avšak při k potřebě jejich zápisu v řádku používáme transponovanou podobu (**maticový tvar**):

$$\mathbf{a} = [\mathbf{a}] = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = [a_1\, a_2\, a_3]^{\mathrm{T}} \tag{2.3}$$

Pro některá odvození je vhodný **algebraický tvar** zápisu vektoru:

$$\mathbf{a} = a_1.\mathbf{e_1} + a_2.\mathbf{e_2} + a_3.\mathbf{e_3} \tag{2.4}$$

kde $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ a $\mathbf{e_3}$ jsou vektory báze vektorového prostoru. Poslední tvar můžeme označit jako **goniometrický** či **eulerovský tvar**:

$$\mathbf{a} = a.(\cos\alpha_1.\mathbf{e_1} + \cos\alpha_2.\mathbf{e_2} + \cos\alpha_3.\mathbf{e_3}) \tag{2.5}$$

$$\mathbf{a} = a.\,(\cos\phi.(\cos\alpha.\mathbf{e_1} + \sin\alpha.\mathbf{e_2}) + \sin\phi.\mathbf{e_3}) \tag{2.6}$$

kde a je velikost vektoru a α_i jsou směrové a ϕ a α Eulerovy úhly.

Vlastnosti

Vektor má svou velikost (délku) a směr.

Délka vektoru

Absolutní hodnota neboli velikost vektoru je jeho délka, počítáme ji pomocí Pythagogovy věty:

$$a = |\mathbf{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \tag{2.7}$$

Příklad

Vektor rychlosti desek, vektor síly, vektor polohový, vektor

2.2 Sčítání vektorů

Součet vektorů je je opět vektor, který určíme jako součet odpovídajících složek:

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \{a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3\} = \begin{bmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \\ a_3 + b_3 \end{bmatrix} = (a_1 + b_1).\mathbf{e_1} + (a_2 + b_2).\mathbf{e_2} + (a_3 + b_3).\mathbf{e_3} \tag{2.8}$$

Je-li výsledný vektor součtu $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$, pak pro jeho složky c_i platí:

$$c_i = a_i + b_i \tag{2.9}$$

Základní vlastnosti vektorového sčítání

Existence operace – sčítat lze pouze vektory téhož významu a rozměru, jinak je existence operace neomezená.

Komutativnost – sčítání je komutativní operací: $\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a}$.

Asociativnost – sčítání je asociativní operací: $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c})$, závorku tedy nemusíme psát.

Existence neutrálního prvku – existuje nulový vektor ($\mathbf{0} = \vec{0}$), který původní vektor v operaci nemění: $\mathbf{a} + \mathbf{0} = \mathbf{a}$. Při tom je nutno si uvědomit, že nulový skalár (nula, 0) a nulový vektor ($\mathbf{0} = \vec{0}$) jsou různé veličiny.

Existence inverzního prvku – každému prvku $\mathbf{a}$ existuje inverzní prvek $(-\mathbf{a})$, pro něž platí: $\mathbf{a}+(-\mathbf{a}) = \mathbf{0}$.

Existence inverzní operace – existuje inverzní operace, která umožňuje řešit rovnici: $\mathbf{a} + \mathbf{x} = \mathbf{b}$ a $\mathbf{x} + \mathbf{a} = \mathbf{b}$ (vzhledem ke komutativnosti sčítání jsou rovnice ekvivalentní). Inverzní operace se nazývá **odčítání**: $\mathbf{x} = \mathbf{b} - \mathbf{a}$. Prvek $\mathbf{x}$ je určen jednoznačně.

Další vlastnosti operace sčítání vektorů

Trojúhelníková nerovnost: $|\mathbf{a}+\mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| + |\mathbf{b}|$

2.2.1 Odčítání vektorů

Rozdíl vektorů je je opět vektor, který určíme jako rozdíl odpovídajících složek:

$$\mathbf{a}-\mathbf{b} = \{a_1-b_1; a_2-b_2; a_3-b_3\} = \begin{bmatrix} a_1-b_1 \\ a_2-b_2 \\ a_3-b_3 \end{bmatrix} = (a_1-b_1).\mathbf{e_1} + (a_2-b_2).\mathbf{e_2} + (a_3-b_3).\mathbf{e_3} \tag{2.10}$$

Je-li výsledný vektor odčítání $\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b}$, pak pro jeho složky c_i platí:

$$c_i = a_i - b_i \tag{2.11}$$

Základní vlastnosti vektorového odčítání

Existence operace – odčítat lze pouze vektory téhož významu a rozměru, jinak je existence operace neomezená.

Komutativnost – odčítání není komutativní operací: $\mathbf{a}-\mathbf{b} \neq \mathbf{b}-\mathbf{a}$, je antikomutativní: $\mathbf{a}-\mathbf{b} = -(\mathbf{b}-\mathbf{a})$. Obrácením pořadí při odčítání je výsledkem vektor stejné délky, stejného směru, ale v opačném směru – výsledkem je tedy vektor opačný.

Existence neutrálního prvku – existuje nulový vektor ($\mathbf{0} = \vec{0}$), který původní vektor v operaci nemění: $\mathbf{a} - \mathbf{0} = \mathbf{a}$.

Příklad

Skládání pohybu litosférických desek, výpočet vzájemného pohybu dvou desek prostřednictvím desky třetí.

2.3 Skalární násobek vektoru

Opakovaným sčítáním (při platnosti asociativnosti sčítání) těchže vektorů můžeme dospět k představě skalárního násobku vektoru:

$$\mathbf{a}+\mathbf{a}+\mathbf{a}+\cdots+\mathbf{a} = n.\mathbf{a} \tag{2.12}$$

Skalárním násobkem vektoru je vektor, který má stejný směr jako původní vektor a velikost danou součinem skaláru a absolutní velikosti vektoru. Součin vektoru a skaláru vypočteme jako součin každé složky vektoru a dané skalární veličiny:

$$k.\mathbf{a} = \{k.a_1; k.a_2; k.a_3\} = \begin{bmatrix} k.a_1 \\ k.a_2 \\ k.a_3 \end{bmatrix} = k.a_1.\mathbf{e_1} + k.a_2.\mathbf{e_2} + k.a_3.\mathbf{e_3} \tag{2.13}$$

Základní vlastnosti skalárního násobku vektoru

Pro násobení vektoru a skaláru platí komutativní, asociativní i distributivní zákon, násobení číslem 1 původní vektor nemění:

Existence operace – do operace může vstupovat jakýkoliv skalár a vektor, existence operace je tedy zcela neomezená.

Komutativnost – skalární násobek vektoru je komutativní operací: $k.\mathbf{a} = \mathbf{a}.k$

Asociativnost – skalární násobek vektoru je asociativní operací: $(k.\mathbf{a}).\ell = k.(\mathbf{a}.\ell)$, resp. $k.(\ell.\mathbf{a}) = (k.\ell).\mathbf{a}$, závorku tedy nemusíme psát.

Distributivnost vzhledem ke sčítání skalárů – $(k+\ell).\mathbf{a} = k.\mathbf{a} + \ell.\mathbf{a}$

Distributivnost vzhledem ke sčítání vektorů – $k.(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = k.\mathbf{a} + k.\mathbf{b}$

Existence neutrálního skalárního prvku – existuje jednotkový skalár ($k = 1$), který původní vektor v operaci nemění: $1.\mathbf{a} = \mathbf{a}$. Neutrální vektorový prvek nemůže existovat, neboť výsledkem operace není skalár.

Existence inverzního skalárního prvku – každému prvku k existuje inverzní prvek (k^{-1}), pro něž platí: $k.k^{-1}.\mathbf{a} = \mathbf{a}$. Inverzní vektorový prvek nemůže existovat, neboť výsledkem operace není skalár.

Existence inverzní operace pro vektor – existuje inverzní operace pro určení neznámého vektoru $\mathbf{x}$, která umožňuje řešit rovnici: $k.\mathbf{x} = \mathbf{b}$ Prvek $\mathbf{x}$ je určen jednoznačně: $\mathbf{x} = \mathbf{b}/k$. Inverzní operace se nazývá **dělení skalárem**.

Existence inverzní operace pro vektor – inverzní operace obecně neexistuje. Inverzní operace pro určení neznámého skaláru x z rovnice $x.\mathbf{a} = \mathbf{b}$ je možná pouze v případě rovnoběžnosti vektorů $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$. Prvek x je potom určen jednoznačně. Nejsou-li vektory rovnoběžné (obecný případ), nemá rovnice žádné řešení a inverzní operace neexistuje.

Další vlastnosti skalárního násobku vektoru

Násobení nulou: $0.\mathbf{a} = \mathbf{0}$
Násobení nulovým vektoremu: $k.\mathbf{0} = \mathbf{0}$

2.3.1 Dělení skalárem

Dělení číslem $k \neq 0$ provádíme jako násobení vektoru jeho převrácenou hodnotou $1/k$:

$$\frac{\mathbf{a}}{k} = \begin{bmatrix} a_1/k \\ a_2/k \\ a_3/k \end{bmatrix} = \frac{a_1}{k} \cdot \mathbf{e_1} + \frac{a_2}{k} \cdot \mathbf{e_2} + \frac{a_3}{k} \cdot \mathbf{e_3} \tag{2.14}$$

Záporný vektor vzniklý vynásobením vektoru $\mathbf{a}$ číslem -1:

$$-\mathbf{a} = \begin{bmatrix} -a_1 \\ -a_2 \\ -a_3 \end{bmatrix} = -a_1.\mathbf{e_1} - a_2.\mathbf{e_2} - a_3.\mathbf{e_3} \tag{2.15}$$

nám umožní realizovat odčítání, neboť

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b}) = \begin{bmatrix} a_x - b_x \\ a_y - b_y \\ a_z - b_z \end{bmatrix} = (a_1 - b_1).\mathbf{e_1} + (a_2 - b_2).\mathbf{e_2} + (a_3 - b_3).\mathbf{e_3} \tag{2.16}$$

Jednotkový – směrový vektor

Jednotkový vektor je vektor jednotkové délky $|\mathbf{a}^0| = 1$. Ke každému vektoru s výjimkou vektoru nulového můžeme jednoznačně určit jednotkový vektor:

$$\mathbf{a}^0 = \frac{\mathbf{a}}{a} = \begin{bmatrix} a_1/a \\ a_2/a \\ a_3/a \end{bmatrix} = \frac{a_1}{a}.\mathbf{e_1} + \frac{a_2}{a}.\mathbf{e_2} + \frac{a_3}{a}.\mathbf{e_3} \tag{2.17}$$

Jednotkový vektor určuje pouze směr daného vektoru, proto jej také označujeme jako **směrový vektor**. Výpočet jednotkového vektoru označujeme jako normování a výsledný jednotkový vektor jako **vektor normovaný**. Původní (nenulový) vektor můžeme psát jako skalární násobek jeho velikosti a směrového (jednotkového) vektoru:

$$\mathbf{a} = a.\mathbf{a}^0 = a.a_1^0.\mathbf{e_1} + a.a_2^0.\mathbf{e_2} + a.a_3^0.\mathbf{e_3} \tag{2.18}$$

Vlastnosti jednotkového vektoru:

$$|\mathbf{a}^0| = 1 \tag{2.19}$$

Velikosti jednotlivých složek odpovídají směrovým kosinům:

$$a_1 = \cos\alpha_1 \tag{2.20}$$
$$a_2 = \cos\alpha_2 \tag{2.21}$$
$$a_3 = \cos\alpha_3 \tag{2.22}$$

kde úhly α_i jsou úhly mezi i-tým vektorem báze (souřadnou osou) a daným vektorem.

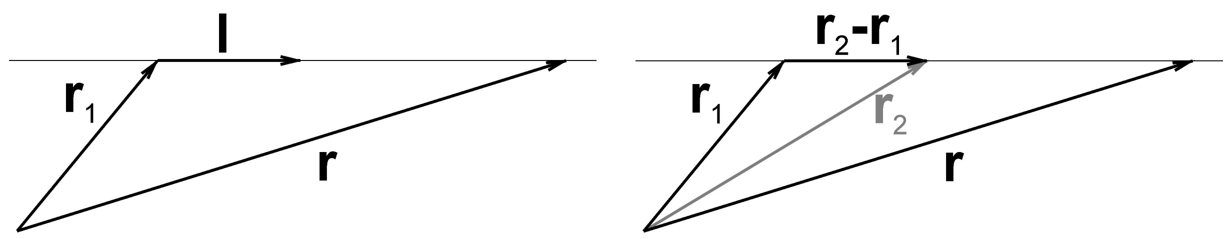
Lineární závislost vektorů

Platí-li lineární závislost mezi vektory $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3} \ldots \mathbf{a_n}$ vyjádřená vztahem:

$$k_1.\mathbf{a_1} + k_2.\mathbf{a_2} + k_3.\mathbf{a_3} + \cdots + \mathbf{a_n} = \mathbf{0} \tag{2.23}$$

kde k_1, k_2, $k_3 \ldots k_n$ jsou libovolná nenulová čísla, pak vektory $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$, $\mathbf{a_3} \ldots \mathbf{a_n}$ označujeme jako lineárně závislé. Jedná-li se o dva vektory, říkáme, že jsou *kolineární* a jsou navzájem paralelní. Jedná-li se o tři vektory, říkámě, že jsou *komplanární* a všechny tři potom leží v jedné rovině. Více než tři vektory jsou v trojrozměrném prostoru vždy lineárně závislé, proto také každý vektor v trojrozměrném prostoru můžeme rozložit na maximálně tři lineárně nezávislé vektory (složky). Jsou-li vektory lineárně závislé, lze ze vztahu ref linearnizavislost vyjádřit jeden z vektorů ($\mathbf{a_i}$) pomocí skalárních násobků zbylých vektorů:

$$\mathbf{a_i} = -\frac{k_1}{k_i} \cdot \mathbf{a_1} - \frac{k_2}{k_i} \cdot \mathbf{a_2} - \frac{k_3}{k_i} \cdot \mathbf{a_3} - \cdots - \frac{k_n}{k_i} \cdot \mathbf{a_n} \tag{2.24}$$



Obrázek 2.1: Odvození vektorové rovnice přímky.

***Vektorová rovnice přímky**

Přímka daná polohovým vektorem jednoho bodu $\mathbf{r}_1$ a směrovým vektorem $\mathbf{l}$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + k.\mathbf{l}$$

kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor jakéhokoliv bodu přímky a k je libovolné reálné číslo (parametr).

Přímka daná polohovými vektory dvou bodů přímky:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + k.(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$$

2.4 Skalární součin

Skalární součin je součet součinů odpovídajících složek. Je to skalár, jehož velikost je dána součinem velikostí odbou vektorů a kosinu úhlu δ, který svírají:

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = a_1.b_1 + a_2.b_2 + a_3.b_3 = ab.\cos\delta \tag{2.25}$$

Skalárního součinu s výhodou užíváme k testování vzájemné orientace dvou vektorů. Pro kolmé vektory platí:

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = 0 \tag{2.26}$$

a pro paralelní vektory:

$$\mathbf{a}.\mathbf{b} = ab \tag{2.27}$$

Jsou-li oba vektory jednotkové délky, pak je součin roven jedné.

Součin libovolného vektoru $\mathbf{a}$ a vektoru jednotkového $\mathbf{b}^0$ je roven délce průmětu prvního do směru druhého:

$$\mathbf{a}.\mathbf{b}^0 = a.\cos\delta \tag{2.28}$$

Tak můžeme určit i složky vektoru v dané bázi vektorového prostoru:

$$a_1 \quad = \mathbf{a}.\mathbf{e_1} \tag{2.29}$$

$$a_2 \quad = \mathbf{a}.\mathbf{e_2} \tag{2.30}$$

$$a_3 \quad = \mathbf{a}.\mathbf{e_3} \tag{2.31}$$

Poznámka: Zde je uveden vektorový zápis skalárního součinu. V textu je užíván maticový zápis: $\mathbf{a}.\mathbf{b} = \mathbf{a}^\mathsf{T}.\mathbf{b}$ (podrobněji viz níže).

Pravidla pro skalární součiny

Pro skalární součiny platí komutativní a distributivní zákon.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}.\mathbf{a} &= \mathbf{a}^2 && (2.32)\\
|\mathbf{a}| &= \sqrt{\mathbf{a}^2} && (2.33)\\
\mathbf{a}.\mathbf{b} &= \mathbf{b}.\mathbf{a} && (2.34)\\
k\,.\,(\mathbf{a}.\mathbf{b}) &= (k.\mathbf{a})\,.\,\mathbf{b} = \mathbf{a}\,.\,(k.\mathbf{b}) && (2.35)\\
\mathbf{a}.\mathbf{b} &= ab\,.\,\mathbf{a}^0.\mathbf{b}^0 && (2.36)\\
(k.\mathbf{a})\,.\,(\ell.\mathbf{b}) &= k\ell\,.\,(\mathbf{a}.\mathbf{b}) && (2.37)\\
(\mathbf{a}+\mathbf{b}).\mathbf{c} &= \mathbf{a}.\mathbf{c}+\mathbf{b}.\mathbf{c} && (2.38)\\
& && (2.39)
\end{aligned}$$

Poznámka: V maticovém zápisu není násobení komutativní, platí však: $\mathbf{a}^\mathsf{T}.\mathbf{b} = \mathbf{b}^\mathsf{T}.\mathbf{a}$ (viz níže).

Řešení rovnic se skalárním součinem

Řešením rovnice se skalárním součinem $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = 0$ jsou všechny vektory, které jsou kolmé na vektor $\mathbf{a}$.

Řešením rovnice se skalárním součinem $\mathbf{a}\cdot\mathbf{x} = k$ jsou všechny vektory, pro něž platí $|\mathbf{x}|.\cos\delta_{\mathbf{x},\mathbf{a}} = \frac{|\mathbf{a}|}{k}$. Jsou to všechny vektory, které mají stejný průmět na vektor $\mathbf{a}$ (terminopolární vektory). Jsou to všechny vektory, které mají počátek v počátku vektoru $\mathbf{a}$a konec ležící v rovině kolmé k vektoru $\mathbf{a}$ a ležící ve vzdálenosti $\frac{b}{|\mathbf{a}|}$.

Při skalárním součinu se ztrácí informace o složce vektoru $\mathbf{x}$, která je kolmá na vektor $\mathbf{a}$. Proto také nelze vytvořit inverzní operaci ke skalárnímu součinu vektorů.

*Vektorová rovnice roviny

Rovina daná polohovým vektorem jednoho bodu $\mathbf{r}_1$ a normálovým vektorem roviny $\mathbf{n}$:

$$(\mathbf{r}-\mathbf{r}_1)\cdot\mathbf{n} = 0$$

kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor jakéhokoliv bodu roviny.

Rovina daná polohovými vektory tří bodů $(\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3)$:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + k.(\mathbf{r}_2-\mathbf{r}_1) + \ell.(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_1)$$

kde $\mathbf{r}$ je polohový vektor jakéhokoliv bodu přímky a k a ℓ jsou libovolná reálná čísla (parametry).

2.5 Vektorový součin

Vektorový součin svou vektorů je vektor, který je kolmý na oba činitele a jeho velikost je dána součinem velikostí obou činitelů a sinu úhlu δ, který svírají:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= \begin{bmatrix} a_2b_3-a_3b_2 \\ a_3b_1-a_1b_3 \\ a_1b_2-a_2b_1 \end{bmatrix} && (2.40)\\
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{e_1} & \mathbf{e_2} & \mathbf{e_3} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = (a_2b_3-a_3b_2).\mathbf{e_1} + (a_3b_1-a_1b_3).\mathbf{e_2} + (a_1b_2-a_2b_1).\mathbf{e_3} && (2.41)\\
|\mathbf{a}\times\mathbf{b}| &= |\mathbf{a}|.|\mathbf{b}|.\sin\delta && (2.42)\\
\mathbf{a}\times\mathbf{b} &= ab\,.\,\mathbf{a}^0\times\mathbf{b}^0 && (2.43)\\
& && (2.44)
\end{aligned}$$

Základní vlastnosti vektorového součinu

Existence operace – vektorově násobit lze pouze vektory téhož významu a rozměru, jinak je existence operace neomezená. Jako binární operace (tj. do níž vstupují právě dva činitelé) existuje pouze v trojrozměrném prostoru.

Komutativnost – vektorový součin není komutativní operací: $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$. Obrácením pořadí při vektorovém násobení je výsledkem vektor stejné délky, stejného směru, ale v opačném směru – výsledkem je tedy vektor opačný. Platí tedy rovnost pro délky: $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{b} \times \mathbf{a}|$.

Asociativnost – vektorový součin není asociativní operací:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a}.\mathbf{c}).\mathbf{b} - (\mathbf{a}.\mathbf{b}).\mathbf{c} \quad (2.45)$$

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a}.\mathbf{c}).\mathbf{b} - (\mathbf{b}.\mathbf{c}).\mathbf{a} \quad (2.46)$$

(2.47)

výsledky nejsou stejné – závorku tedy musíme psát.

Distributivnost – vektorový součin je distributivní vzhledem k odčítání a sčítání vektorů, a to jak při násobení zprava, tak i při násobení zleva:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c} \quad (2.48)$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c} \quad (2.49)$$

Existence neutrálního prvku – neexistuje vektor $(\mathbf{x})$, který původní vektor v operaci nemění: $\mathbf{a} \times \mathbf{x} = \mathbf{a}$, pokud vektor $\mathbf{a}$ není nulový $(\mathbf{a} = \vec{0})$.

Existence inverzního prvku – neexistuje inverzní prvek, protože neexistuje neutrální prvek.

Existence inverzní operace – neexistuje ani inverzní operace.

Další pravidla pro upravování vektorvých součinů

Opakované vektorové násobení – při vektorovém násobení opakovaně týmž vektorem je výsledkem nulový vektor: $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$.

*Vektor plochy

Jako vektor plochy označujeme vektor, který je na danou plochu kolmý (normálový vektor) a který má velikost rovnu velikosti dané plochy. Např. vektor plochy tvaru obecného kosodélníku omezeného dvěma vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je roven vektorovému součinu obou vektorů. Nebo vektor plochy tvaru trojúhleníku omezeného dvěma vektory $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ je roven:

$$\mathbf{n_p} = \frac{1}{2}\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \frac{1}{2}\mathbf{b} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}\mathbf{a} \times (\mathbf{b} - \mathbf{a}) = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{a} = \frac{1}{2}(\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times \mathbf{b} \quad (2.50)$$

Vektor povrchu tělesa je vektorový součet všech ploch stěn tohoto tělesa, které tvoří jeho povrch. Pro uzavřené povrchy je tento součet roven nule.

2.5.1 Složené a vícenásobné součiny vektorů

Kombinace vektorového násobení a skalárního násobku

$$k\,.(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (k.\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (k.\mathbf{b}) \quad (2.51)$$

$$|k.(\mathbf{a} \times \mathbf{b})| = |k|.|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \quad (2.52)$$

$$(k.\mathbf{a}) \times (\ell.\mathbf{b}) = k\ell\,.(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (2.53)$$

(2.54)

Smíšený součin

Smíšený součin je skalární veličina d, jejíž geometrická interpretace je objem hranolu s hranami odpovídajícími jednotlivým vektorům:

$$d = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}).\mathbf{c} = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = abc.\sin\delta\cos\gamma \quad (2.55)$$

$$d = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1b_2c_3 - a_1b_3c_2 + a_2b_3c_1 - a_2b_1c_3 + a_3b_1c_2 - a_3b_2c_1 \quad (2.56)$$

kde úhel δ je úhel mezi vektorem **a** a **b** a úhel γ je úhel mezi vektorem **c** a kolmicí na vektory **a** a **b**. Pravidla pro používání smíšeného součinu: smíšený součin není komutativní, tvoří-li trojice systém pravotočivý je součin kladný, jedná-li se o levotočivý systém, má součin zápornou hodnotu.

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}.(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) &= (\mathbf{a}\times\mathbf{b}).\mathbf{c} = (\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) && (2.57)\\
(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) &= (\mathbf{b},\mathbf{c},\mathbf{a}) = (\mathbf{c},\mathbf{a},\mathbf{b}) && (2.58)\\
(\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}) &= (\mathbf{a},\mathbf{c},\mathbf{b}) = (\mathbf{b},\mathbf{a},\mathbf{c}) && (2.59)\\
(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}) &= -(\mathbf{c},\mathbf{b},\mathbf{a}) && (2.60)
\end{aligned}$$

Další násobné součiny vektorů

$$\begin{aligned}
(\mathbf{a}.\mathbf{b})\,.\,\mathbf{c} &= ab.\cos\delta\,.\,\mathbf{c} && (2.61)\\
(\mathbf{a}.\mathbf{b})\,.\,\mathbf{c} &\neq \mathbf{a}\,.\,(\mathbf{b}.\mathbf{c}) && (2.62)\\
(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= (\mathbf{d},\mathbf{a},\mathbf{b}).\mathbf{c}-(\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}).\mathbf{d} = (\mathbf{c},\mathbf{d},\mathbf{a}).\mathbf{b}-(\mathbf{b},\mathbf{b},\mathbf{c}).\mathbf{d} && (2.63)\\
\mathbf{a}\times[\mathbf{b}\times(\mathbf{c}\times\mathbf{d})] &= (\mathbf{b}.\mathbf{d}).(\mathbf{a}\times\mathbf{c})-(\mathbf{b}.\mathbf{c}).(\mathbf{a}\times\mathbf{d}) && (2.64)\\
[(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}]\times\mathbf{d} &= (\mathbf{a}.\mathbf{c}).(\mathbf{b}\times\mathbf{d})-(\mathbf{b}.\mathbf{c}).(\mathbf{a}\times\mathbf{d}) && (2.65)\\
(\mathbf{a}\times\mathbf{b}).(\mathbf{c}\times\mathbf{d}) &= (\mathbf{b}.\mathbf{d}).(\mathbf{a}.\mathbf{c})-(\mathbf{b}.\mathbf{c}).(\mathbf{a}.\mathbf{d}) && (2.66)
\end{aligned}$$

2.6 Vztahy mezi směrovými vektory

2.6.1 Obecné vztahy mezi vektory jednoho souřadnicového systému

Jednotkové směrové vektory souřadnicových os mají jednotkovou délku, pro vztah geografických a napjatostních souřadnic pak platí tyto vztahy:

$$x_i^2 + x_j^2 + x_k^2 = 1 \qquad x_i^2 + y_i^2 + z_i^2 = 1 \qquad (2.67)$$

Směrové vektory souřadnicových os jsou na sebe kolmé, tj. jejich skalární součiny jsou rovny nule:

$$x_i x_j + y_i y_j + z_i z_j = 0 \qquad x_i y_i + x_j y_j + x_k y_k = 0 \qquad (2.68)$$

Všechny tyto vztahy vedou k závislosti složek matice transformace **R**, která má sice devět složek, avšak pouze tři jsou na sobě nezávislé.

Uvedené vztahy využíváme také k vyloučení parametrů s indexem 2, např. pomocí vzorců:

$$n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1 \quad \text{odkud získáme} \quad n_2^2 = 1 - n_1^2 - n_3^2 \qquad (2.69)$$

$$n_1 l_1 + n_2 l_2 + n_3 l_3 = 0 \quad \text{odkud získáme} \quad n_2 l_2 = -n_1 l_1 - n_3 l_3 \qquad (2.70)$$

2.6.2 *Reciproké vektory a rozklad vektoru do libovolné báze

K systému tří nekomplanárních vektorů $\mathbf{e_1}$, $\mathbf{e_2}$ a $\mathbf{e_3}$ lze vytvořit systém tří reciprokých vektorů $\mathbf{e_1^*}$, $\mathbf{e_2^*}$ a $\mathbf{e_3^*}$. Vlastnosti reciprokých vektorů:

- skalární součin daného vektoru a k němu reciprokého (inverzního) je roven jedné:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e_1^*}.\mathbf{e_1} &= 1 && (2.71)\\
\mathbf{e_2^*}.\mathbf{e_2} &= 1 && (2.72)\\
\mathbf{e_3^*}.\mathbf{e_3} &= 1 && (2.73)
\end{aligned}$$

- každý reciproký vektor je kolmý na některou ze stěn rovnoběžnostěnu vymezeného původními vektory, tj.

$$\begin{aligned}
\mathbf{e_1^*}.\mathbf{e_2} &= 0 \qquad \mathbf{e_1^*}.\mathbf{e_3} = 0 && (2.74)\\
\mathbf{e_2^*}.\mathbf{e_1} &= 0 \qquad \mathbf{e_2^*}.\mathbf{e_3} = 0 && (2.75)\\
\mathbf{e_3^*}.\mathbf{e_1} &= 0 \qquad \mathbf{e_3^*}.\mathbf{e_2} = 0 && (2.76)
\end{aligned}$$

Z druhého požadavku vyplývá, že vektor $\mathbf{e_1^*}$ bude paralelní, tj. skalárním násobkem určitého čísla k_1 a vektorového součinu $\mathbf{e_2} \times \mathbf{e_3}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{e_1^*} &= k_1 \,.\, \mathbf{e_2} \times \mathbf{e_3} && (2.77)\\ \mathbf{e_1^*}.\mathbf{e_1} &= k_1 \,.\, (\mathbf{e_2} \times \mathbf{e_3}) \,.\, \mathbf{e_1} \;=\; 1 && (2.78)\\ k_1 &= \frac{1}{(\mathbf{e_2}, \mathbf{e_3}, \mathbf{e_1})} = \frac{1}{(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})} && (2.79) \end{aligned}$$

Potom lze vyjádřit reciproké vektory jako:

$$\mathbf{e_1^*} = \frac{\mathbf{e_2} \times \mathbf{e_3}}{(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})}, \qquad \mathbf{e_2^*} = \frac{\mathbf{e_3} \times \mathbf{e_1}}{(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})}, \qquad \mathbf{e_3^*} = \frac{\mathbf{e_1} \times \mathbf{e_2}}{(\mathbf{e_1}, \mathbf{e_2}, \mathbf{e_3})} \qquad (2.80)$$

Reciproké vektory lze s výhodou použít pro rozklad vektoru do systému tří nekomplanárních vektorů. Máme-li rozložit vektor $\mathbf{u}$ do složek daných vektorovou bází $\mathbf{a_1}$, $\mathbf{a_2}$ a $\mathbf{a_3}$ podle vzorce:

$$\mathbf{u} \;=\; u_1.\mathbf{a_1} + u_2.\mathbf{a_2} + u_3.\mathbf{a_3} \qquad (2.81)$$

Jednotlivé složky u_1, u_2 a u_3 lze vyjádřit vztahy:

$$u_1 = \mathbf{u}.\mathbf{a_1^*}, \qquad u_2 = \mathbf{u}.\mathbf{a_2^*}, \qquad u_3 = \mathbf{u}.\mathbf{a_3^*}, \qquad (2.82)$$

Kapitola 3

Základy maticové matematiky

3.1 Matice

3.1.1 Základní termíny

Řádek matice, sloupec matice.

Rozměry matice jsou dány počtem řádků a sloupců: $[{}_m\mathbf{C}_n]$ – m-řádků a n-sloupců.

Matice obdélníková $m \neq n$, čtvercová $m = n$.

3.1.2 Transponování matice

= prohozaní řádků za sloupce a naopak:

$[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}]^{\mathrm{T}}$

$c_{ij} = a_{ji}$

Determinant matice

$\det[\mathbf{T}] = t_{12}^2.t_{33} + t_{13}^2.t_{22} + t_{23}^2.t_{11} - t_{11}.t_{22}.t_{33} - 2.t_{12}.t_{13}.t_{23}$

3.2 Základní operace s maticemi

3.2.1 Sčítání matic

$[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}] + [\mathbf{B}]$

$c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

3.2.2 Odčítání matic

$[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}] - [\mathbf{B}]$

$c_{ij} = a_{ij} - b_{ij}$

3.2.3 Násobení matice skalárem

$[\mathbf{C}] = k.[\mathbf{A}]$

$c_{ij} = k.a_{ij}$

3.2.4 Násobení matic

$[{}_m\mathbf{C}_n] = [{}_m\mathbf{A}_r].[{}_r\mathbf{B}_n]$

$c_{ij} = \sum_k a_{ik}.b_{kj}$

3.2.5 Inverze matice

$[\mathbf{C}] = [\mathbf{A}]^{-1}$

$c_{ij} = \frac{A_{ij}}{\det \mathbf{A}}$

kde A_{ij} je doplněk k prvku a_{ij}, počítá se jako subdeterminant matice vzniklé vynecháním i-tého řádku a j-tého sloupce a násobený znaménkovým koeficientem $(-1)^{i+j}$. Inverzní matice k matici ortogonální (např. matice rotace) je rovna matici transponované.

3.2.6 Rozklad matice na sloupcové a řádkové vektory

Jednotlivé sloupcové vektory $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3]$ lze vypočítat podle vzorce:

$$\mathbf{a}_i = \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_i \tag{3.1}$$

Jednotlivé prvky matice v daném souřadném systému lze vypočítat podle vzorce:

$$a_{ij} = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_j \tag{3.2}$$

3.2.7 Invarianty matice 3×3

Invarianty jsou hodnoty matice, které nezávisí na zvoleném souřadnicivém systému.

První invariant

První invariant = stopa (trace) matice:
$I_1 = \mathrm{tr}\mathbf{A} = a_{11} + a_{22} + a_{33}$

Druhý invariant

Jakou hodnotu má první invariant inverzní matice?

$$\mathrm{tr}\mathbf{A}^{-1} = \bar{a}_{11} + \bar{a}_{22} + \bar{a}_{33} = \frac{A_{11}}{\det\mathbf{A}} + \frac{A_{22}}{\det\mathbf{A}} + \frac{A_{33}}{\det\mathbf{A}} = \frac{1}{\det\mathbf{A}} \cdot (A_{11} + A_{22} + A_{33}) \tag{3.3}$$

Protože první invariant inverzní matice i determinant matice $\mathbf{A}$ jsou invarianty, musí být i součet subdeterminantů k prvkům hlavní diagonály (výraz v závorce) invariantem.

Třetí invariant

Jaký je objem rovnoběžnostěnu vymezeného třemi sloupcovými vektory matice $\mathbf{T} = [\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}]$?

$$V = (\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}) = \det\mathbf{T} \tag{3.4}$$

Je tedy determinant invariantem (objem se nezmění při změně souřadnic).

3.2.8 Rozklad tenzoru na symetrickou a antisymetrickou složku

Libovolný tenzor vyjádřený maticí $\mathbf{T}$ lze rozložit na dvě složky, jednu symetrickou $\mathbf{T_s}$ a druhou antisymetrickou $\mathbf{T_a}$:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T_s} + \mathbf{T_a} \tag{3.5}$$

Pro symetrickou složkuku platí:

$$\mathbf{T_s}^{\mathsf{T}} = \mathbf{T_s} \tag{3.6}$$

A podobně pro antisymetrickou (antimetrickou) složku:

$$\mathbf{T_a}^{\mathsf{T}} = -\mathbf{T_a} \tag{3.7}$$

Tyto dvě složky lze vyjádřit vztahy:

$$\mathbf{T_s} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} + \mathbf{T}^{\mathsf{T}}) = \begin{bmatrix} t_{11} & \frac{1}{2}(t_{12}+t_{21}) & \frac{1}{2}(t_{13}+t_{31}) \\ \frac{1}{2}(t_{12}+t_{21}) & t_{22} & \frac{1}{2}(t_{23}+t_{32}) \\ \frac{1}{2}(t_{13}+t_{31}) & \frac{1}{2}(t_{23}+t_{32}) & t_{33} \end{bmatrix} \tag{3.8}$$

$$\mathbf{T_a} = \frac{1}{2}(\mathbf{T} - \mathbf{T}^{\mathsf{T}}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(t_{12}-t_{21}) & \frac{1}{2}(t_{13}-t_{31}) \\ \frac{1}{2}(t_{21}-t_{12}) & 0 & \frac{1}{2}(t_{23}-t_{32}) \\ \frac{1}{2}(t_{31}-t_{13}) & \frac{1}{2}(t_{32}-t_{23}) & 0 \end{bmatrix} \tag{3.9}$$

a pro transponovaný tenzor a jeho složky platí:

$$\mathbf{T}^{\mathsf{T}} = \mathbf{T_s} - \mathbf{T_a} \tag{3.10}$$

3.2.9 Rozklad symetrické matice na matici diagonální a matici rotace (spektrální rozklad matrice)

Matici $[_3\mathbf{T}_3]$ s prvky t_{ij} lze spektrálně rozložit pomocí charakteristických čísel a vektorů na tvar:

$$[_3\mathbf{T}_3] = \begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & t_{13} \\ t_{12} & t_{22} & t_{23} \\ t_{13} & t_{23} & t_{33} \end{bmatrix} = \tau_1.[\mathbf{t}_1].[\mathbf{t}_1]^{\mathrm{T}} + \tau_2.[\mathbf{t}_2].[\mathbf{t}_2]^{\mathrm{T}} + \tau_3.[\mathbf{t}_3].[\mathbf{t}_3]^{\mathrm{T}} \tag{3.11}$$

Charakteristická čísla vypočteme řešením kubické rovnice:

$$\tau^3 + A.\tau^2 + B.\tau + C = 0 \tag{3.12}$$

kde:

$$A = -\mathrm{tr}\,[\mathbf{T}] = -(t_{11} + t_{22} + t_{33}) \tag{3.13}$$

$$B = t_{11}.t_{22} + t_{11}.t_{33} + t_{22}.t_{33} - t_{12}^2 - t_{13}^2 - t_{23}^2 \tag{3.14}$$

$$C = \det[\mathbf{T}] = t_{12}^2.t_{33} + t_{13}^2.t_{22} + t_{23}^2.t_{11} - t_{11}.t_{22}.t_{33} - 2.t_{12}.t_{13}.t_{23} \tag{3.15}$$

Postup řešení kubické rovnice:

$$P = \frac{B - \frac{A^2}{3}}{3} \tag{3.16}$$

$$Q = \frac{\frac{2.A^3}{27} - \frac{A.B}{3} + C}{2} \tag{3.17}$$

$$\cos\psi = -\frac{Q}{\sqrt{|P|^3}} \tag{3.18}$$

$$r = 2.\sqrt{|P|} \tag{3.19}$$

a jednotlivé charakteristické hodnoty matice jsou rovny:

$$\tau_i = r.\cos\frac{\psi}{3} - \frac{A}{3} \tag{3.20}$$

$$\tau_j = -r.\cos\frac{\psi - 180°}{3} - \frac{A}{3} \tag{3.21}$$

$$\tau_k = -r.\cos[\frac{\psi + 180°}{3} - \frac{A}{3} \tag{3.22}$$

Složky charakteristických vektorů vypočteme např. ze vztahů:

$$E = t_{11} - \tau_i \tag{3.23}$$

$$F = (t_{22} - \tau_i).E - t_{12}^2 \tag{3.24}$$

$$G = E.t_{23} - t_{13}.t_{12} \tag{3.25}$$

$$t_{xi} = t_{12}.G - t_{13}.F \tag{3.26}$$

$$t_{yi} = -G.E \tag{3.27}$$

$$t_{zi} = E.F \tag{3.28}$$

Druhé dva charakteristické vektory $\mathbf{t}_j$ a $\mathbf{t}_k$ získáme dosazením dalších charakteristických čísel matice τ_j a τ_k. Nakonec charakteristické vektory převedeme na jednotkovou délku.

Kapitola 4

Transformace souřadnicových systémů

Transformaci jednoho souřadnicového systému vyjadřujeme maticí rotace $[{}_p\mathbf{R}_n]$, která vyjadřuje transformaci ze souřadného systému p (původní) do systému n (nový). Za systém p, n si lze dosadit geografický, napjatostní nebo zlomový systém.

$$[{}_p\mathbf{R}_n] = \begin{bmatrix} \cos\alpha_{11} & \cos\alpha_{12} & \cos\alpha_{13} \\ \cos\alpha_{21} & \cos\alpha_{22} & \cos\alpha_{23} \\ \cos\alpha_{31} & \cos\alpha_{32} & \cos\alpha_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{bmatrix} \tag{4.1}$$

Úhly α_{ij} jsou úhly mezi souřadnými osami, první index i určuje původní souřadnici, druhý j novou. Řádky tvoří složky vektorů nových souřadných os v původní souřadnicové soustavě, sloupce tvoří vektory vyjadřující orientaci původních souřadnicových os v nové souřadnicové soustavě.

4.1 Rotace veličin

4.1.1 Rotace vektoru

Transformaci souřadnic libovolného vektorového prvku v původní souřadnicové soustavě $\mathbf{a}_p$ do nové souřadnicové soustavy $\mathbf{a}_n$ počítáme podle vzorce:

$$[\mathbf{a}_n] = [{}_p\mathbf{R}_n].[\mathbf{a}_p] \tag{4.2}$$

a pokud známe matici pro obrácenou transformaci $[{}_n\mathbf{R}_p]$, můžeme snadno provést i zpětnou transformaci:

$$[\mathbf{a}_p] = [{}_n\mathbf{R}_p].[\mathbf{a}_n] \tag{4.3}$$

Matici pro obrácenou transformaci $[{}_n\mathbf{R}_p]$ matici lze určit podle vzorce

$$[{}_n\mathbf{R}_p] = [{}_p\mathbf{R}_n]^{-1} \tag{4.4}$$

avšak výpočet inverzní matice $[{}_p\mathbf{R}_n]^{-1}$ je poměrně náročný (viz matematická příloha). Matice rotace je zvláštním typem matic – je to tzv. ortogonální matice – a pro tento typ matic platí:

$$[{}_p\mathbf{R}_n]^{-1} = [{}_p\mathbf{R}_n]^{\mathsf{T}} \tag{4.5}$$

kde $[{}_p\mathbf{R}_n]^{\mathsf{T}}$ je tzv. transponovaná matice, tj. matice, v níž jsou oproti matici původní zaměněny řádky a sloupce. Zpětnou transformaci vypočteme podle vzorce:

$$[\mathbf{a}_p] = [{}_p\mathbf{R}_n]^{\mathsf{T}}.[\mathbf{a}_n] \tag{4.6}$$

4.1.2 Rotace tenzoru

Transformaci souřadnic tenzorových veličin (např. napjatosti) provádíme podle složitějších vzorců. Tenzorová veličina určuje vztah mezi dvěma vektorovými veličinami $\mathbf{a}$ a $\mathbf{b}$ v původních i v nových souřadnicích (např. vztah orientace plochy a napětí na ní působící):

$$[\mathbf{b}_p] = [\mathbf{T}_p] \,.\, [\mathbf{a}_p] \tag{4.7}$$

$$[\mathbf{b}_n] = [\mathbf{T}_n] \,.\, [\mathbf{a}_n] \tag{4.8}$$

Chceme-li zjistit vztah jak tenzor $\mathbf{T}_n$ v nových souřadnicích získat transformací tenzoru $\mathbf{T}_p$ z původní souřadnicové soustavy, postupujeme podle následujícího odvození. Vyjdeme ze vztahu pro rotaci (transformaci) vektoru $\mathbf{b}$ z původních do nových souřadnic (4.2), který upravíme dosazením 4.7 a 4.8:

$$\begin{aligned}
[\mathbf{b}_n] &= [{}_p\mathbf{R}_n] \,.\, [\mathbf{b}_p] \\
[\mathbf{T}_n] \,.\, [\mathbf{a}_n] &= [{}_p\mathbf{R}_n] \,.\, [\mathbf{T}_p] \,.\, [\mathbf{a}_p] \\
[\mathbf{T}_n] \,.\, [{}_p\mathbf{R}_n] \,.\, [\mathbf{a}_p] &= [{}_p\mathbf{R}_n] \,.\, [\mathbf{T}_p] \,.\, [\mathbf{a}_p] \\
[\mathbf{T}_n] \,.\, [{}_p\mathbf{R}_n] &= [{}_p\mathbf{R}_n] \,.\, [\mathbf{T}_p] \\
[\mathbf{T}_n] &= [{}_p\mathbf{R}_n] \,.\, [\mathbf{T}_p] \,.\, [{}_p\mathbf{R}_n]^\mathsf{T} \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

4.2 Vlastnosti matice rotace

4.2.1 *Matice rozdílu orientace

Rozdíl orientace je tenzor ΔR, který lze určit jako součin tenzorů rotace, které určují orientaci obou prvků – nejprve rotujeme z orientace prvk A do referenční soustavy souřadnic a pak rotujeme do orientace prvku B:

$$\Delta R = R_B.R_A^\mathsf{T} \qquad (4.10)$$

4.2.2 *Charakteristická čísla matice rotace

Charakteristické hodnoty a vektory lze určit z rovnice

$$\mathbf{Ra} = \lambda.\mathbf{a} \qquad (4.11)$$

kde $\mathbf{R}$ je matice orientace, $\mathbf{a}$ je charakteristický vektor a λ je skalár. Potom:

$$(\mathbf{R} - \lambda.\mathbf{I})\ \mathbf{a} = \mathbf{0} \qquad (4.12)$$

K získání netriviálního řešení ($\mathbf{a}$ nerovno $\mathbf{0}$) musí být determinant roven nule:

$$\det(\mathbf{R} - \lambda.\mathbf{I}) = 0 \qquad (4.13)$$

To vede k řešení kubické rovnice a ke třem řešením. Avšak při uvážení, že charakteristický vektor musí být stále zachováván při transformacích – bude charakteristickým vektorem osa rotace. Ta musí být zachována i při zpětné rotaci a tak $\mathbf{R}^{-1}$ musí zachovávat tentýž vektor. Můžeme tedy psát:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R.a} &= \mathbf{R}^{-1}.\mathbf{a} \qquad (4.14)\\
(\mathbf{R} - \mathbf{R}^{-1}).\mathbf{a} &= \mathbf{0} \qquad (4.15)\\
(\mathbf{R} - \mathbf{R}^\mathsf{T}).\mathbf{a} &= \mathbf{0} \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

Zbytková matice má tvar:

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} 0 & r_{12} - r_{21} & r_{13} - r_{31} \\ r_{21} - r_{12} & 0 & r_{23} - r_{32} \\ r_{31} - r_{13} & r_{32} - r_{23} & 0 \end{bmatrix} \qquad (4.17)$$

Matice rotace má charakteristické číslo rovno ± 1.

4.2.3 *Charakteristické vektory matice rotace

Matice rotce má jeden charakteristický vektor $\mathbf{a} = [a_1, a_2, a_3]^\mathsf{T}$, který odpovídá vektoru osy rotace:

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{r_{23} - r_{32}}{\sqrt{(r_{23} - r_{32})^2 + (r_{31} - r_{13})^2 + (r_{12} - r_{21})^2}} \\ a_2 &= \frac{r_{31} - r_{13}}{\sqrt{(r_{23} - r_{32})^2 + (r_{31} - r_{13})^2 + (r_{12} - r_{21})^2}} \\ a_3 &= \frac{r_{12} - r_{21}}{\sqrt{(r_{23} - r_{32})^2 + (r_{31} - r_{13})^2 + (r_{12} - r_{21})^2}} \end{aligned} \tag{4.18}$$

Úhel rotace je pak roven:

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{tr}\ R - 1}{2} \tag{4.19}$$

Matici rotace můžeme zapsat jako:

$$\mathbf{R} = (\mathbf{I} - \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T}).\cos\omega - (\mathbf{n} \times \mathbf{I}).\sin\omega + \mathbf{n}\mathbf{n}^\mathsf{T} \tag{4.20}$$

4.3 *Operace symetrie

Pojmem **symetrie** je míněno to, že po provedené operaci je výsledek tentýž, neměnný. Matice rotace je určena kosiny úhlů mezi novou a starou souřadnicovou soustavou, které jsou ve vztahu k referenční soustavě určeny pomocí matic:

$$\begin{aligned} R &= \mathbf{X}_n\ \mathbf{X}_p^\mathsf{T} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{n1}^\mathsf{T} \\ \mathbf{x}_{n2}^\mathsf{T} \\ \mathbf{x}_{n3}^\mathsf{T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_{p1}, \mathbf{x}_{p2}, \mathbf{x}_{p3} \end{bmatrix} \\ R &= \begin{bmatrix} \cos(x_{n1}, x_{p1}) & \cos(x_{n1}, x_{p2}) & \cos(x_{n1}, x_{p3}) \\ \cos(x_{n2}, x_{p1}) & \cos(x_{n2}, x_{p2}) & \cos(x_{n2}, x_{p3}) \\ \cos(x_{n3}, x_{p1}) & \cos(x_{n3}, x_{p2}) & \cos(x_{n3}, x_{p3}) \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{4.21}$$

Matici rotace určíme porovnáním orientace souřadné soustavy před a po rotaci. Například při zrcadlové symetrii, kde plocha zrcadla odpovídá ploše $x_1x_2 = (x_3)$, existuje pro každý bod P$[x_1, x_2, x_3]$ symetrický ekvivalentní bod P$'[x_1, x_2, -x_3]$.

4.3.1 *Symetrie podle rotačních os

Identický tvar získáme otočením kolem osy o určitý úhel. Požadavek je, abychom na konci – při otočení o poslední díl – dosáhli původní pozice (otočení o 360°). Počet úhlů otočení do 360° označujeme jako četnost osy rotace a osu rotace jako n-četnou osu rotace (A: n-fold rotation axis).

4.3.2 *Středová symetrie

Středová symetrie se někdy označuje jako symetrická operace druhého druhu (vytváří zrcadlově identický obraz, zatímco rotace vytváří identický obraz). Determinant matice transformace $\det T = -1$.

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{4.22}$$

4.3.3 *Zrcadlová symetrie

Matice transformace při zrcadlení podle zrcadlové plochy (x):

$$R = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

Kapitola 5

*Odvození matic rotace

5.1 Matice rotace kolem základních souřadných os

5.1.1 Rotace kolem osy x

Rotace kolem osy x o úhel ω:

$$[_\omega\mathbf{R}_x] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

5.1.2 Rotace kolem osy y

Rotace kolem osy y o úhel ω:

$$[_\omega\mathbf{R}_y] = \begin{bmatrix} \cos\omega & 0 & \sin\omega \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\omega & 0 & \cos\omega \end{bmatrix}$$

5.1.3 Rotace kolem osy z

Rotace kolem osy z o úhel ω:

$$[_\omega\mathbf{R}_z] = \begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

5.2 Rotace kolem obecných os

5.2.1 Rotace kolem libovolné horizontální osy

Rotaci kolem osy L $\alpha_L/0$ o úhel ω provedeme tak, že nejprve rotujeme osu do směru x, provedeme rotaci o úhel ω kolem osy x a nakonec osu totace vrátíme do původní polohy:

$$[\mathbf{R}] = [_\alpha\mathbf{R}_z].[_\omega\mathbf{R}_x].[_{-\alpha}\mathbf{R}_z]$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\omega & -\sin\omega \\ 0 & \sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha\cos\omega & \cos\alpha\cos\omega & -\sin\omega \\ -\sin\alpha\sin\omega & \cos\alpha\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos^2\alpha + \sin^2\alpha\cos\omega & \sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\omega) & \sin\alpha\sin\omega \\ \sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\omega) & \sin^2\alpha + \cos^2\alpha\cos\omega & -\cos\alpha\sin\omega \\ -\sin\alpha\sin\omega & \cos\alpha\sin\omega & \cos\omega \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-b.y^2 & b.xy & c.y \\ b.xy & 1-b.x^2 & -c.x \\ -c.y & c.x & 1-b \end{bmatrix}$$

kde

$$\begin{array}{rclrcl} b & = & 1-\cos\omega & c & = & \sin\omega \\ x & = & \cos\alpha & y & = & \sin\alpha. \end{array} \tag{5.1}$$

5.2.2 Rotace plochy do horizontální polohy

Plocha S α_S/φ_S je rotována kolem směrnice do vodorovné polohy. Ostatní směrové prvky se rotují pomocí stejné matice rotace. Rotaci provedem tak, že nejprve rotujeme zpět o azimut sklonu, takže osa rotace–směrnice se ztotožní s osou y a kolem ní rotujem o velikost sklonu φ, nakonec azimutálně vrátíme do původní pozice:

$$[\mathbf{R}] = [_\alpha\mathbf{R}_z].[_\varphi\mathbf{R}_y].[_{-\alpha}\mathbf{R}_z]$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha\cos\varphi & \sin\alpha\cos\varphi & \sin\varphi \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha\sin\varphi & -\sin\alpha\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos^2\alpha\cos\varphi + \sin^2\alpha & -\sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\varphi) & \cos\alpha\sin\varphi \\ -\sin\alpha\cos\alpha(1-\cos\varphi) & \sin^2\alpha\cos\varphi + \cos^2\alpha & -\sin\alpha\sin\varphi \\ -\cos\alpha\sin\varphi & -\sin\alpha\sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1-b.x^2 & -b.xy & c.x \\ -b.xy & 1-b.y^2 & c.y \\ -c.x & -c.y & 1-b \end{bmatrix}$$

kde

$$\begin{array}{rclrcl} b & = & 1-\cos\varphi & c & = & \sin\varphi \\ x & = & \cos\alpha & y & = & \sin\alpha. \end{array} \tag{5.2}$$

5.2.3 Rotace kolem libovolné osy

Rotaci kolem osy L α_L/φ_L o úhel ω provedeme tak, že natočíme osu rotace do směru osy z (nejprve azimutálně a pak sklonově), provedeme rotaci a osu rotace vrátíme zpět do původní polohy:

$$[\mathbf{R}] = [_\alpha\mathbf{R}_z].[_{90-\phi}\mathbf{R}_y].[_\omega\mathbf{R}_z].[_{\phi-90}\mathbf{R}_y].[_{-\alpha}\mathbf{R}_z]$$

Protože některé matice se nevejdou na šířku papíru, jsou jejich sloupce vypsány pod sebou a odděleny tečkou.

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin\varphi & 0 & -\cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ \cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha\sin\varphi & \sin\alpha\sin\varphi & -\cos\varphi \\ -\sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ \cos\alpha\cos\varphi & \sin\alpha\cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\omega & -\sin\omega & 0 \\ \sin\omega & \cos\omega & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha\sin\varphi\cos\omega + \sin\alpha\sin\omega & \sin\alpha\sin\varphi\cos\omega - \cos\alpha\sin\omega & -\cos\varphi\cos\omega \\ \cos\alpha\sin\varphi\sin\omega - \sin\alpha\cos\omega & \sin\alpha\sin\varphi\sin\omega + \cos\alpha\cos\omega & -\cos\varphi\sin\omega \\ \cos\alpha\cos\varphi & \sin\alpha\cos\varphi & \sin\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \sin\varphi & 0 & \cos\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos\varphi & 0 & \sin\varphi \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha\sin^2\varphi\cos\omega + \sin\alpha\sin\varphi\sin\omega + \cos\alpha\cos^2\varphi \\ \sin\alpha\sin^2\varphi\cos\omega - \cos\alpha\sin\varphi\sin\omega + \sin\alpha\cos^2\varphi \\ -\sin\varphi\cos\varphi\cos\omega + \sin\varphi\cos\varphi \\ . \\ \cos\alpha\sin\varphi\sin\omega - \sin\alpha\cos\omega \\ \sin\alpha\sin\varphi\sin\omega + \cos\alpha\cos\omega \\ -\cos\varphi\sin\omega \\ . \\ -\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi\cos\omega - \sin\alpha\cos\varphi\sin\omega + \cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi\cos\omega + \cos\alpha\cos\varphi\sin\omega + \sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi \\ \cos^2\varphi\cos\omega + \sin^2\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha & 0 \\ \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos^2\alpha\sin^2\varphi\cos\omega + \cos^2\alpha\cos^2\varphi + \sin^2\alpha\cos\omega \\ \sin\alpha\cos\alpha\sin^2\varphi\cos\omega - \sin\varphi\sin\omega + \sin\alpha\cos\alpha\cos^2\varphi - \sin\alpha\cos\alpha\cos\omega \\ -\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi\cos\omega + \cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi + \sin\alpha\cos\varphi\sin\omega \\ . \\ \sin\alpha\cos\alpha\sin^2\varphi\cos\omega + \sin\varphi\sin\omega + \sin\alpha\cos\alpha\cos^2\varphi - \sin\alpha\cos\alpha\cos\omega \\ \sin^2\alpha\sin^2\varphi\cos\omega + \sin^2\alpha\cos^2\varphi + \cos^2\alpha\cos\omega \\ -\sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi\cos\omega + \sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi - \cos\alpha\cos\varphi\sin\omega \\ . \\ -\cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi\cos\omega - \sin\alpha\cos\varphi\sin\omega + \cos\alpha\sin\varphi\cos\varphi \\ -\sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi\cos\omega + \sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi + \cos\alpha\cos\varphi\sin\omega \\ \cos^2\varphi\cos\omega + \sin^2\varphi \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\omega + \cos^2\alpha\cos^2\varphi(1-\cos\omega) \\ -\sin\omega\sin\varphi + \sin\alpha\cos\alpha\cos^2\varphi(1-\cos\omega) \\ \sin\omega\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\cos\varphi\sin\varphi(1-\cos\omega) \\ . \\ \sin\omega\sin\varphi + \sin\alpha\cos\alpha(1-\sin\omega) \\ \cos\omega + \sin^2\alpha\cos^2\varphi(1-\cos\omega) \\ -\sin\omega\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\cos\varphi\sin\varphi(1-\cos\omega) \\ . \\ -\sin\omega\sin\alpha\cos\varphi + \cos\alpha\cos\varphi\sin\varphi(1-\cos\omega) \\ \sin\omega\cos\alpha\cos\varphi + \sin\alpha\sin\varphi\cos\varphi(1-\cos\omega) \\ \cos\omega + \sin^2\varphi(1-\cos\omega) \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} a + b.x^2 & b.xy - c.z & b.xz + c.y \\ b.xy + c.z & a + b.y^2 & b.yz - c.x \\ b.xz - c.y & b.yz + c.x & a + b.z^2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} a &= \cos\omega & \qquad x &= \cos\alpha\cos\varphi \\ b &= 1 - \cos\omega & \qquad y &= \sin\alpha\cos\varphi \\ c &= \sin\omega & \qquad z &= \sin\varphi \end{aligned}$$

5.3 Geometrické prvky určené maticí rotace

5.3.1 Lineace určená maticí rotace

Vycházíme z předpokladu, že lineace je osa x rotovaná do dané polohy:

$$[\mathbf{l}] = [\mathbf{A_L}].[\mathbf{x}]$$

Vlastní výpočet matice rotace provedeme tak, že osu x rotujeme kolem osy y o úhel φ v záporném směru a pak kolem osy z o azimut sklonu α_L:

$$[\mathbf{A}_L] = [_{\alpha_L}\mathbf{R}_z].[_{-\varphi_L}\mathbf{R}_y]$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_L & 0 & -\sin\varphi_L \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_L & 0 & \cos\varphi_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_L & -\sin\alpha_L & 0 \\ \sin\alpha_L & \cos\alpha_L & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha_L\cos\varphi_L & -\sin\alpha_L & -\cos\alpha_L\sin\varphi_L \\ \sin\alpha_L\cos\varphi_L & \cos\alpha_L & -\sin\alpha_L\sin\varphi_L \\ \sin\varphi_L & 0 & \cos\varphi_L \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x.a & -y & -x.c \\ y.a & x & -y.c \\ c & 0 & a \end{bmatrix}$$

kde

$$\begin{aligned} a &= \cos\varphi_L & \qquad c &= \sin\varphi_L \\ x &= \cos\alpha_L & \qquad y &= \sin\alpha_L \end{aligned} \tag{5.3}$$

První sloupec matice rotace je přímo vektor **l**.

5.3.2 Plocha určená maticí rotace

Vycházíme z předpokladu, že normála plochy je osa z rotovaná do dané polohy:

$$[\mathbf{n}] = [\mathbf{A_S}].[\mathbf{z}] \tag{5.4}$$

Vlastní výpočet matice rotace provedeme tak, že osu x rotujeme kolem osy y o úhel φ v záporném směru a pak kolem osy z o azimut sklonu α_S:

$$[\mathbf{A}_S] = [_{\alpha_S}\mathbf{R}_z].[_{-\varphi_S}\mathbf{R}_y]$$

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi_S & 0 & -\sin\varphi_S \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_S & 0 & \cos\varphi_S \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos\alpha_S & -\sin\alpha_S & 0 \\ \sin\alpha_S & \cos\alpha_S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \cos\alpha_S\cos\varphi_S & -\sin\alpha_S & -\cos\alpha_S\sin\varphi_S \\ \sin\alpha_S\cos\varphi_S & \cos\alpha_S & -\sin\alpha_S\sin\varphi_S \\ \sin\varphi_S & 0 & \cos\varphi_S \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x.a & -y & -x.c \\ y.a & x & -y.c \\ c & 0 & a \end{bmatrix}$$

kde

$$\begin{aligned} a &= \cos\varphi_S & \qquad c &= \sin\varphi_S \\ x &= \cos\alpha_S & \qquad y &= \sin\alpha_S \end{aligned} \tag{5.5}$$

První sloupec matice rotace je přímo vektor spádnice, druhý sloupec je přímo vektor směrnice a třetí sloupec je přímo vektor normály plochy **n**.

5.3.3 Lineace a plocha určené maticí rotace

Plocha je určena orientací S α_S/φ_S a lineace je upčená úhlem p (pitch). Vycházíme z předpokladu, že lineace je osa x a normála plochy je osa z rotované do dané polohy:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{l}] &= [\mathbf{A_{LS}}].[\mathbf{x}] \\
[\mathbf{n}] &= [\mathbf{A_{LS}}].[\mathbf{z}]
\end{aligned}
$$

Vlastní výpočet matice rotace provedeme tak, že osu x rotujeme kolem osy z o úhel $90-p$ (budoucí spádnice plochy je natočena k severu), pak kolem osy y o úhel $-\varphi_S$ (plocha je ukloněna) a nakonec kolem osy z o azimut sklonu α_S:

$$[\mathbf{A}_{LS}] = [_{\alpha_S}\mathbf{R}_z].[_{-\varphi_S}\mathbf{R}_y].[_{90-p}\mathbf{R}_z]$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} \sin p & -\cos p & 0 \\ \cos p & \sin p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \cos\varphi_S & 0 & -\sin\varphi_S \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_S & 0 & \cos\varphi_S \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos\varphi_S\cos p & -\cos\varphi_S\cos p & -\sin\varphi_S \\ \cos p & \sin p & 0 \\ \sin\varphi_S\sin p & -\sin\varphi_S\cos p & \cos\varphi_S \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \cos\alpha_S & -\sin\alpha_S & 0 \\ \sin\alpha_S & \cos\alpha_S & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos\alpha_S\cos\varphi_S\cos p - \sin\alpha_S\cos p & -\cos\alpha_S\cos\varphi\cos p - \sin\alpha_S\sin p & -\cos\alpha_S\sin\varphi_S \\ \sin\alpha_S\cos\varphi_S\cos p + \cos\alpha_S\cos p & -\sin\alpha_S\cos\varphi_S\cos p + \cos\alpha_S\sin p & -\sin\alpha_S\sin\varphi_S \\ \sin\varphi_S\sin p & -\sin\varphi_S\cos p & \cos\varphi_S \end{bmatrix}
\end{array}
$$

První sloupec matice rotace je přímo vektor lineace $\mathbf{l}$, druhý sloupec je vektor ležící v ploše a kolmý na lineaci a třetí sloupec je přímo vektor normály plochy $\mathbf{n}$.

5.3.4 Ortogonální prvek určený maticí rotace

Směr $\mathbf{e_1}$ je určen orientací L α_1/φ_1, druhý směr $\mathbf{e_2}$ je určen úhlem p (pitch). Vycházíme z předpokladu, že směr $\mathbf{e_1}$ je osa x, směr $\mathbf{e_2}$ je osa y a směr $\mathbf{e_3}$ je osa z rotovaná do dané polohy:

$$
\begin{aligned}
[\mathbf{e_1}] &= [\mathbf{A_O}].[\mathbf{x}] \\
[\mathbf{e_2}] &= [\mathbf{A_O}].[\mathbf{y}] \\
[\mathbf{e_3}] &= [\mathbf{A_O}].[\mathbf{z}]
\end{aligned}
$$

Vlastní výpočet matice rotace provedeme tak, že osu y rotujeme kolem osy x o úhel p (budoucí směr $\mathbf{e_2}$ získal p v ploše yz), pak kolem osy y o úhel $-\varphi_1$ (budoucí směr $\mathbf{e_1}$ je ukloněn) a nakonec kolem osy z o azimut sklonu α_1:

$$[\mathbf{A}_O] = [_{\alpha_1}\mathbf{R}_z].[_{-\varphi_1}\mathbf{R}_y].[_{p}\mathbf{R}_x]$$

$$
\begin{array}{cc}
 & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos p & -\sin p \\ 0 & \sin p & \cos p \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & 0 & -\sin\varphi_1 \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\varphi_1 & 0 & \cos\varphi_1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos\varphi_1 & -\sin\varphi_1\sin p & -\sin\varphi_1\cos p \\ 0 & \cos p & -\sin p \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\sin p & \cos\varphi_1\cos p \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \cos\alpha_1 & -\sin\alpha_1 & 0 \\ \sin\alpha_1 & \cos\alpha_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos\alpha_1\cos\varphi_1 & -\cos\alpha_1\sin\varphi_1\sin p - \sin\alpha_1\cos p & -\cos\alpha_1\sin\varphi_1\cos p + \sin\alpha_1\sin p \\ \sin\alpha_1\cos\varphi_1 & -\sin\alpha_1\sin\varphi_1\sin p + \cos\alpha_1\cos p & -\sin\alpha_1\sin\varphi_1\cos p - \cos\alpha_1\sin p \\ \sin\varphi_1 & \cos\varphi_1\sin p & \cos\varphi_1\cos p \end{bmatrix}
\end{array}
$$

První sloupec matice rotace je přímo vektor směru $\mathbf{e_1}$, druhý sloupec je vektor směru $\mathbf{e_2}$ a třetí sloupec je přímo vektor směru $\mathbf{e_3}$.

5.3.5 Ortogonální prvek určený Eulerovými úhly

$$
\begin{array}{cccc}
 & \mathbf{l} \approx x & \mathbf{m} \approx y & \mathbf{n} \approx z \\
 & \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \cos p & -\sin p & 0 \\ \sin p & \cos p & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos p \\ \sin p \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\sin p \\ \cos p \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos p \\ \sin p \cos\varphi \\ \sin p \sin\varphi \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\sin p \\ \cos p \cos\varphi \\ \cos p \sin\varphi \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 \\ -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha & 0 \\ -\cos\alpha & \sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \sin p \cos\varphi \cos\alpha + \cos p \sin\alpha \\ \sin p \cos\varphi \sin\alpha - \cos p \cos\alpha \\ \sin p \sin\varphi \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \cos p \cos\varphi \cos\alpha - \sin p \sin\alpha \\ \cos p \cos\varphi \sin\alpha + \sin p \cos\alpha \\ \cos p \sin\varphi \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\sin\varphi \cos\alpha \\ -\sin\varphi \sin\alpha \\ \cos\varphi \end{bmatrix}
\end{array}
\tag{5.6}
$$

Kapitola 6

*Goniometrické vzorce a sférická geometrie

6.1 Základní hodnoty goniometrických funkcí

6.1.1 Znaménka goniometrických funkcí v jednotlivých kvadrantech

kvadrant	I.	II.	III.	IV.
$\sin\alpha$	$+$	$+$	$-$	$-$
$\cos\alpha$	$+$	$-$	$-$	$+$
$\tan\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$
$\cot\alpha$	$+$	$-$	$+$	$-$

6.1.2 Hodnoty goniometrických funkcí základních úhlů

α	0	30	45	60	90
$\sin\alpha$	$\frac{\sqrt{0}}{2}$	$\frac{\sqrt{1}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{4}}{2}$
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	∞
$\cot\alpha$	∞	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

6.1.3 Převod goniometrických funkcí do I. kvadrantu

$\beta =$	$-\alpha$	$\alpha+90°$	$\alpha-90°$	$90°-\alpha$	$\alpha+180°$	$\alpha-180°$	$180°-\alpha$
$\sin\beta$	$-\sin\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$+\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$
$\cos\beta$	$+\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$+\sin\alpha$	$+\sin\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\tan\beta$	$-\tan\alpha$	$-\cot\alpha$	$-\cot\alpha$	$+\cot\alpha$	$+\tan\alpha$	$+\tan\alpha$	$-\tan\alpha$
$\cot\beta$	$-\cot\alpha$	$-\tan\alpha$	$-\tan\alpha$	$+\tan\alpha$	$+\cot\alpha$	$+\cot\alpha$	$-\cot\alpha$

6.2 Součin a součet úhlů a goniometrických funkcí

6.2.1 Převody goniometrických funkcí na jiné goniometrické funkce

$$\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = \frac{\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha} = \frac{1}{1+\cot^2\alpha} \tag{6.1}$$

$$\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = \frac{1}{1+\tan^2\alpha} = \frac{\cot^2\alpha}{1+\cot^2\alpha} \tag{6.2}$$

$$\tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{\cot\alpha} \tag{6.3}$$

$$\tan^2\alpha = \frac{\sin^2\alpha}{1-\sin^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1 \tag{6.4}$$

$$\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\tan\alpha} \tag{6.5}$$

$$\cot^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} - 1 = \frac{\cos^2\alpha}{1-\cos^2\alpha} \tag{6.6}$$

6.2.2 Goniometrické funkce součtu úhlů

$$\sin(\alpha \pm \beta) = \sin\alpha . \cos\beta \pm \cos\alpha . \sin\beta \tag{6.7}$$
$$\cos(\alpha \pm \beta) = \cos\alpha . \cos\beta \mp \sin\alpha . \sin\beta \tag{6.8}$$
$$\tan(\alpha \pm \beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{1 \mp \tan\alpha . \tan\beta} \tag{6.9}$$
$$\cot(\alpha \pm \beta) = \frac{\cot\alpha . \cot\beta \mp 1}{\cot\beta \pm \cot\alpha} \tag{6.10}$$

6.2.3 Součet goniometrických funkcí

$$\sin\alpha \pm \sin\beta = 2 . \sin\frac{\alpha \pm \beta}{2} . \cos\frac{\alpha \mp \beta}{2} \tag{6.11}$$
$$\cos\alpha + \cos\beta = 2 . \cos\frac{\alpha + \beta}{2} . \cos\frac{\alpha - \beta}{2} \tag{6.12}$$
$$\cos\alpha - \cos\beta = -2 . \sin\frac{\alpha + \beta}{2} . \sin\frac{\alpha - \beta}{2} \tag{6.13}$$
$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{1 - \sin\alpha} \tag{6.14}$$
$$\cos\alpha - \sin\alpha = \sqrt{1 + \sin\alpha} \tag{6.15}$$
$$\tan\alpha \pm \tan\beta = \frac{\sin(\alpha \pm \beta)}{\cos\alpha . \cos\beta} \tag{6.16}$$
$$\cot\alpha \pm \cot\beta = \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin\alpha . \sin\beta} \tag{6.17}$$
$$\tan\alpha \pm \cot\beta = \pm\frac{\cos(\alpha \mp \beta)}{\cos\alpha . \sin\beta} \tag{6.18}$$

6.2.4 Součin goniometrických funkcí

$$\cos\alpha . \cos\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\big) \tag{6.19}$$
$$\sin\alpha . \sin\beta = \frac{1}{2}\big(\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\big) \tag{6.20}$$
$$\sin\alpha . \cos\beta = \frac{1}{2}\big(\sin(\alpha - \beta) + \sin(\alpha + \beta)\big) \tag{6.21}$$
$$\tan\alpha . \tan\beta = \frac{\tan\alpha + \tan\beta}{\cot\alpha + \cot\beta} \tag{6.22}$$
$$\cot\alpha . \cot\beta = \frac{\cot\alpha + \cot\beta}{\tan\alpha + \tan\beta} \tag{6.23}$$
$$\tan\alpha . \cot\beta = \frac{\tan\alpha + \cot\beta}{\cot\alpha + \tan\beta} \tag{6.24}$$

6.3 Goniometrické funkce dvojnásobného a polovičního úhlu

6.3.1 Převod kvadrátů a součinů téhož úhlu na dvojnásobné úhly

$$\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos 2\alpha) \tag{6.25}$$
$$\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos 2\alpha) \tag{6.26}$$
$$\sin\alpha\cos\alpha = \frac{1}{2}\sin 2\alpha \tag{6.27}$$

6.3.2 Goniometrické funkce dvojnásobného úhlu

Moivrova věta:

$$\cos n\alpha + \mathrm{i}\,\sin n\alpha = (\cos\alpha + \mathrm{i}\,\sin\alpha)^n$$

$$\begin{aligned}
\sin\, 2\alpha &= 2.\sin\alpha\cos\alpha && (6.28)\\
\cos\, 2\alpha &= \cos^2\alpha - \sin^2\alpha && (6.29)\\
\tan\, 2\alpha &= \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} && (6.30)\\
\cot\, 2\alpha &= \frac{\cot^2\alpha - 1}{2\cot\alpha} && (6.31)
\end{aligned}$$

6.3.3 Goniometrické funkce polovičního úhlu

$$\begin{aligned}
\sin\,\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha} - \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha} && (6.32)\\
\cos\,\frac{\alpha}{2} &= \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{1+\sin\alpha} + \frac{1}{2}\sqrt{1-\sin\alpha} && (6.33)\\
\tan\,\frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha} = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}} && (6.34)\\
\cot\,\frac{\alpha}{2} &= \frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha} = \frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha} = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}} && (6.35)
\end{aligned}$$

6.4 Sférická trigonometrie

6.4.1 Pravoúhlý sférický trojúhelník $\triangle ABC$

Značení: c – přepona; a, b – odvěsny; α, β – úhly protilehlé odvěsnám. Pravý úhel γ leží při vrcholu C (c–β–$90-a$–$90-b$–α).

Pro řešení platí Neperovo pravidlo:

Kosinus libovolného prvku je roven: - součinu sinů dvou prvků protějších - součinu kotangent dvou prvků sousedních

Např.

$$\begin{aligned}
\cos c &= \sin(90-a).\sin(90-b) && (6.36)\\
\cos c &= \cos a.\cos b && (6.37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sin a &= \sin\alpha.\sin c && (6.38)\\
\sin b &= \sin\beta.\sin c && (6.39)\\
\cos c &= \cos a.\cos b && (6.40)\\
\cos\alpha &= \sin\beta.\cos a && (6.41)\\
\cos\beta &= \sin\alpha.\cos b && (6.42)\\
\sin a &= \cot\beta.\tan b && (6.43)\\
\sin b &= \cot\alpha.\tan a && (6.44)\\
\cos c &= \cot\alpha.\cot\beta && (6.45)\\
\cos\alpha &= \cot c.\tan b && (6.46)\\
\cos\beta &= \cot c.\tan b && (6.47)
\end{aligned}$$

6.4.2 Obecný sférický trojúhelník $\triangle ABC$

Věta sinová

$$\frac{\sin a}{\sin\alpha} = \frac{\sin b}{\sin\beta} = \frac{\sin c}{\sin\gamma} \tag{6.48}$$

Věta kosinová

$$\cos c = \cos a.\cos b + \sin a.\sin b.\cos\gamma \tag{6.49}$$

$$\cos\gamma = -\cos\alpha.\cos\beta + \sin\alpha.\sin\beta.\cos c \tag{6.50}$$

Věta sinuskosinová

$$\cos\alpha.\sin\beta = -\sin\alpha.\cos\beta.\cos c + \sin\gamma.\cos a \tag{6.51}$$

$$\cos a.\sin b = \sin a.\cos b.\cos\gamma + \sin c.\cos\alpha \tag{6.52}$$

Další vztahy

$$\cot a.\sin b = \cos\gamma.\cos b + \sin\gamma.\cot\alpha \tag{6.53}$$

$$\cot\alpha.\sin\beta = -\cos c.\cos\beta + \sin c.\cot a \tag{6.54}$$

Vztahy pro ostatní úhly a strany získáme cyklickou záměnou prvků.