1 Diferenciální rovnice

Rozhodněte, zda je funkce y pro $x \in I$ řešením dané diferenciální rovnice:

1. $(\sqrt{1+x^2})y'' - x^3(y')^2 + x = 0$, $y = \ln(\sqrt{1+x^2}+x)$, $I = \mathbb{R}$

[*ano*]

2. $(y')^2 + \cos(2x)y'' = 4$, $y = \ln \operatorname{cotg} x$, $I = (0, \frac{\pi}{4})$

[*ne*]

3. $(1+x)y'' + y' = 0$, $y = \ln\sqrt{1-x^2} + \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt$, $I = (-1, 1)$

[*ano*]

1.1 Diferenciální rovnice 1. řádu

1.1.1 Rovnice se separovanými proměnnými

Vyřešte diferenciální rovnice:

1. $y' = -\frac{xy}{x+1}$

$[y = C(x+1)e^{-x},\ C \in \mathbb{R}]$

2. $y - y^2 + xy' = 0$

$\left[y = \frac{1}{1-Cx},\ C \in \mathbb{R};\ y = 0\right]$

3. $e^{-y}(1+y') = 1$

$[e^{-y} = 1 - Ce^x,\ C \in \mathbb{R}]$

4. $y' = e^{x-y}$

$[e^y = e^x + C,\ C \in \mathbb{R}]$

5. $x(1+y^2)\, dx + y(1+x^2)\, dy = 0$

$\left[y^2 = C(1+x^2) - 1,\ C \in \mathbb{R}^+\right]$

Vyřešte diferenciální rovnice s počáteční podmínkou:

1. $2y - x^3y' = 0$, $y(1) = 1$

$\left[y = e^{1-\frac{1}{x^2}}\right]$

2. $y' \operatorname{tg} x - y^2 = 1 - 2y$, $y(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{2}$

$\left[y = 1 - \frac{1}{2+\ln|\sin x|}\right]$

3. $\sin y \cos x\, dy = \cos y \sin x\, dx$, $y(0) = \frac{\pi}{4}$

$\left[y = \arccos \frac{\cos x}{\sqrt{2}}\right]$

1.1.2 Homogenní rovnice

Vyřešte diferenciální rovnice:

1. $xy' + y \ln x = y \ln y$

$$\left[y = xe^{Cx+1},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

2. $y' = \frac{x+3y}{2x}$

$$[y = Cx\sqrt{x} - x,\ C \in \mathbb{R}]$$

3. $(y^2 - x^2)\ dx = 2xy\ dy$

$$\left[y^2 = -x^2 + Cx,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

1.1.3 Zobecněná homogenní rovnice

Vyřešte diferenciální rovnice:

1. $y' = \frac{x+y}{x-y}$

$$\left[\operatorname{arctg} \frac{y}{x} = \ln \left| Cx\sqrt{1 + \frac{y^2}{x^2}} \right|),\ C \in \mathbb{R}\right]$$

2. $y' = \frac{x+2y-7}{x-3}$

$$\left[y = -x + 5 + C(x-3)^2,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

3. $y' = \frac{3x+4y-9}{2x+y-6}$

$$\left[(y - 3x + 9)^5 = C(x + y - 3),\ C \in \mathbb{R}, y = x + 2\right]$$

4. $y' = \frac{5x-5y+1}{2x-2y+1}$

$$[\ln |y - x| = -5x + 2y + C,\ C \in \mathbb{R}, y = x]$$

5. $y' = \frac{9x-3y+1}{3x-y}$

$$\left[2x + (3x - y)^2 = C,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

1.1.4 Lineární rovnice 1. řádu

Vyřešte diferenciální rovnice:

1. $y' = -2y$

$$\left[y = Ce^{-2x},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

2. $y' = \frac{2x}{1+x^2} y$

$$\left[y = C(x^2+1),\ C \in \mathbb{R}\right]$$

3. $y' = -2y + 6x$

$$\left[y = 3x - \tfrac{3}{2} + Ce^{-2x},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

4. $y' \cos x = (y + 2\cos x)\sin x$

$$\left[y = \frac{\sin^2 x + C}{\cos x},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

5. $x\ dy + (x^2 - y)\ dx = 0$

$$\left[y = -x^2 + Cx,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

Vyřešte diferenciální rovnice s počáteční podmínkou:

1. $y' = 4xy + (2x+1)e^{2x^2}$, $y(0) = 1$

$$\left[y = (x^2+x+1)e^{2x^2}\right]$$

2. $y' - 4y = \cos x$, $y(0) = 1$

$$\left[y = \tfrac{1}{17}\sin x - \tfrac{4}{17}\cos x + \tfrac{21}{17}e^{4x}\right]$$

1.1.5 Bernoulliova rovnice

Vyřešte diferenciální rovnice:

1. $y' = 2xy + 2x^3y^2$

$$\left[y = \frac{1}{1-x^2+Ce^{-x^2}},\ C \in \mathbb{R}, y = 0\right]$$

2. $3x^2y' + xy = y^{-2}$

$$\left[y^3 = \frac{\ln|x|+C}{x},\ C \in \mathbb{R}, y = 0\right]$$

3. $y' = \frac{4}{x}y + x\sqrt{y}$

$$\left[y = x^4(\ln\sqrt{|x|} + C)^2,\ C \in \mathbb{R}, y = 0\right]$$

4. $y\ dy = (\frac{ay^2}{x^2} + \frac{b}{x^2})\ dx$, $a \neq 0$

$$\left[y^2 = -\frac{b}{2a} + Ce^{-\frac{2a}{x}},\ C \in \mathbb{R}, y = 0\right]$$

1.1.6 Metoda záměny proměnných

Vyřešte diferenciální rovnice:

1. $y' = \frac{1}{2x-y^2}$

$$\left[x = \frac{y^2}{2} + \frac{y}{2} + \frac{1}{4} + Ce^{2y},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

2. $(xy + x^2y^3)y' = 1$

$$\left[x = \frac{1}{2-y^2+Ce^{-\frac{y^2}{2}}},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

3. $2y\ dx + (y^2 - 4x)\ dy = 0$

$$\left[x = (-\tfrac{1}{2}\ln|y| + C)y^2,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

1.1.7 Exaktní diferenciální rovnice

Vyřešte diferenciální rovnice:

1. $(2x + y)\ dx + (1 + x)\ dy = 0$

$$\left[x^2 + xy + y = C,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

2. $e^y + ye^x + 3x^2\ dx = (2 - xe^y - e^x)\ dy$

$$\left[xe^y + ye^x + x^3 - 2y = C,\ C \in \mathbb{R}\right]$$

3. $\sin y\ dx + ((x + 1)\cos y - y\sin x)\ dy = 0$

$$[x\sin y + y\cos y = C,\ C \in \mathbb{R}]$$

1.1.8 Clairoutova rovnice

Vyřešte diferenciální rovnice:

1. $y = xy' + \frac{1}{2y'}$

$$\left[y = Cx + \frac{1}{2C},\ C \in \mathbb{R}; y^2 = 2x\right]$$

2. $y = xy' + y' + e^{y'}$

$$\left[y = Cx + C + e^C,\ C \in \mathbb{R}; y = (x + 1)\ln(-x - 1) - x - 1\right]$$

3. $y' = \ln(xy' - y)$

$$\left[y = Cx - e^C,\ C \in \mathbb{R}; y = x\ln x - x\right]$$

1.1.9 Lagrangeova rovnice

Vyřešte diferenciální rovnice:

1. $y = (y' - 1)e^{y'}$

$$\left[x = e^p + C, y = (p-1)e^p,\ C \in \mathbb{R}; y = -1\right]$$

2. $y = 2xy' + y' - (y')^2$

$$\left[x = \tfrac{2}{3}p + \tfrac{C}{p^2} - \tfrac{1}{2}, y = \tfrac{2C}{p} + \tfrac{p^2}{3},\ C \in \mathbb{R}\right]$$

3. $2xy' - y = \ln y'$

$$\left[x = \tfrac{1}{p} + \tfrac{C}{p^2},\ y = \tfrac{2C}{p} - \ln p + 2\ C \in \mathbb{R}\right]$$

1.2 Lineární diferenciální rovnice n-tého řádu

1.2.1 Rovnice homogenní

Vyřešte diferenciální rovnice:

1. $y'' - 16y = 0$

$$\left[y = c_1e^{4x} + c_2e^{-4x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right]$$

2. $y'' + 16 = 0$

$$\left[y = c_1 \cos 4x + c_2 \sin 4x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right]$$

3. $y''' - 6y'' + 12y' - 8y = 0$

$$\left[y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3x^2e^{2x},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\right]$$

4. $4y''' - 4y'' + y' = 0$

$$\left[y = c_1 + c_2e^{\frac{x}{2}} + c_3xe^{\frac{x}{2}},\ c_1, c_2, c_3 \in \mathbb{R}\right]$$

5. $y^{(4)} + 10y'' + 25y = 0$

$$\left[y = (c_1 + c_2x)\cos\sqrt{5}x + (c_3 + c_4x)\sin\sqrt{5}x,\ c_i \in \mathbb{R}, i = 1, \dots, 4\right]$$

Vyřešte diferenciální rovnice s počáteční podmínkou:

1. $y'' - 2y' + y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

$$[y = xe^x]$$

2. $y'' + 7y' - 8y = 0,\ y(0) = 1,\ y'(0) = 1$

$$[y = e^x]$$

1.2.2 Rovnice nehomogenní

Metodou neurčitých koeficientů vyřešte diferenciální rovnice:

1. $y'' - 9y = 9x^2$

$$\left[y = c_1 e^{3x} + c_2 e^{-3x} - x^2 - \tfrac{2}{9},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right]$$

2. $y'' - 4y' + 4y = (1 + x^2)e^{2x}$

$$\left[y = c_1 e^{2x} + c_2 x e^{2x} + \tfrac{1}{12} e^{2x} x^2 (x^2 + 6),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right]$$

3. $y'' - 3y' + 2y = 10 \cos x$

$$\left[y = c_1 e^{x} + c_2 e^{2x} - 3 \sin x + \cos x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right]$$

4. $4y'' - 2y' + 5y = 5e^{2x} \sin x$

$$\left[y = c_1 e^{x} + \sin 2x + c_2 e^{x} \cos 2x + e^{2x} \sin 2x - \tfrac{1}{2} e^{2x} \cos x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right]$$

5. $y'' - 2y' = 4x + 2 \cos 2x$
   (Rada: Rozdělte si pravou stranu $f(x)$ na součet $f_1(x) + f_2(x)$ a hledejte postupně partikulární řešení $y_{p_1}(x)$ pro $f_1(x)$ a $y_{p_2}(x)$ pro $f_2(x)$. Výsledné řešení pak bude tvaru $y(x) = y_0(x) + y_{p_1}(x) + y_{p_2}(x)$.)

$$\left[y = c_1 + c_2 e^{2x} - x^2 - x - \tfrac{1}{4}(\cos 2x + \sin 2x),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right]$$

Metodou variace konstant vyřešte diferenciální rovnice:

1. $y'' - y' = e^{2x} \sin e^{x}$

$$[y = c_1 + c_2 e^{x} - \sin e^{x},\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}]$$

2. $y'' + 3y' + 2y = (e^{x} + 1)^{-1}$

$$\left[y = c_1 e^{-1} + c_2 e^{-2x} + (e^{x} + e^{-2x}) \ln(e^{x} + 1),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right]$$

3. $y'' + y = \frac{2}{\cos^3 x}$

$$\left[y = c_1 \cos x + c_2 \sin x + \frac{\sin^2 x}{\cos x} - \cos x,\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right]$$

4. $y'' - 2y' + y = \frac{e^{x}}{x}$

$$[y = e^{x}(c_1 + c_2 x + x \ln |x|),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}]$$

5. $y'' + 2y' + y = e^{-x} \ln x$

$$\left[y = e^{x}(c_1 + c_2 x + \tfrac{x^2}{2} \ln x - \tfrac{3x^2}{4}),\ c_1, c_2 \in \mathbb{R}\right]$$

2 Metrické prostory

Rozhodněte, zda je (P, ρ) metrický prostor (tj. zda funkce $\rho(x, y)$ zadává metriku na P):

1. $P = \mathbb{R},\ \rho(x, y) = sgn\,|x - y|$

   $[ano]$

2. $P = \mathbb{R},\ \rho(x, y) = \left|x^2 - y^2\right|$

   $[ne]$

3. $P = \mathbb{R},\ \rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$

   $[ano]$

4. $P = \mathbb{C},\ \rho(x, y) = \begin{cases} min\,\{|x| + |x|\,, |x - 1| + |y - 1|\} & x \neq y \\ 0 & x = y \end{cases}$

   $[ano]$

Určete vzdálenost bodů x, y, resp. funkcí $f(x), g(x) \in P$ v daných metrikách:

1. $P = \mathbb{R}^2,\ x = [0, 1],\ y = [1, 2];\ \rho_2, \rho_1, \rho_\infty$

   $\left[\rho_2(x, y) = \sqrt{2}, \rho_1(x, y) = 2; \rho_\infty(x, y) = 1\right]$

2. $P = \mathbb{R}^3,\ x = [0, 1, 2],\ y = [1, 2, 3];\ \rho_2, \rho_1, \rho_\infty$

   $\left[\rho_2(x, y) = \sqrt{3}, \rho_1(x, y) = 3; \rho_\infty(x, y) = 1\right]$

3. $P = C[1, e],\ f(x) = x,\ g(x) = \ln x;\ \rho_C, \rho_I$

   $\left[\rho_C(f, g) = e - 1 \rho_I(f, g) = \frac{1}{2}(e^2 - 3)\right]$

4. $P = C[0, 1],\ f(x) = x^2,\ g(x) = 1 - x;\ \rho_C, \rho_I$

   $\left[\rho_C(f, g) = 1 \rho_I(f, g) = \frac{2}{3}\right]$

2.1 Vzdálenost množin

Určete vzdálenost bodu b od množiny A, resp. vzdálenost množin A, B v daných metrikách:

1. $P = \mathbb{R}^2,\ b = [0, 1],\ A : y = -x;\ \rho_\infty$

   $[\rho_\infty(b, A) = 1]$

2. $P = \mathbb{R}^2,\ b = [6, 6],\ A : x^2 + y^2 = 25;\ \rho_1$

   $\left[\rho_1(b, A) = 12 - 5\sqrt{2}\right]$

3. $P = \mathbb{R}^2,\ b = [3, 6],\ A : x^2 + y^2 = 25;\ \rho_1$

   $[\rho_1(b, A) = 2]$

4. $P = \mathbb{R}^2,\ A : y = c,\ c < 0,\ B : y = x^2 - 2x + 1;\ \rho_\infty$

   $[\rho_\infty(A, B) = |c|]$

2.2 Izometrické zobrazení

Dokažte, že zobrazení $f : C[-1, 1] \longrightarrow C[-1, 1]$, $F(f(x)) = f(-x)$ je izometrické v metrice ρ_I.

3 Diferenciální počet funkcí více proměnných

3.1 Pojem funkce více proměnných

Určete a načrtněte $D(f)$ a $H(f)$ pro funkci $f(x,y)$:

1. $f(x,y)=\sqrt{1-(\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4})}$

$\left[D(f)=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}\le 1\right\};H(f)=\{z\in\mathbb{R}:z\in[0,1]\}\right]$

2. $f(x,y)=\arccos\frac{x}{x+y}$

$\left[D(f)=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:-1\le\frac{x}{x+y}\le 1,x+y\ne 0\right\};H(f)=\{z\in\mathbb{R}:z\in[0,\pi]\}\right]$

3. $f(x,y)=\frac{\sqrt{4x-y^2}}{\ln(1-x^2-y^2)}$

$\left[D(f)=\left\{[x,y]\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2<1,x^2+y^2\ne 0,y^2\le 4x\right\};H(f)=\{z\in\mathbb{R}\}\right]$

Určete a načrtněte vrstevnice f_c funkce $f(x,y)$ na úrovni $c\in\mathbb{R}$:

1. $f(x,y)=x^2+y^2;\ f_0,f_1,f_4,f_c$

$\left[f_0:[x,y]=[0,0],f_1:x^2+y^2=1,f_4:x^2+y^2=4,f_c:x^2+y^2=c\right]$

2. $f(x,y)=x^2-y^2;\ f_0,f_1,f_{-1},f_c$

$\left[f_0:y=\pm x,f_1:y=\pm\sqrt{x^2-1},f_{-1}:y=\pm\sqrt{x^2+1},f_c:y=\pm\sqrt{x^2-c}\right]$

3. $f(x,y)=\sqrt{xy};\ f_0,f_1,f_{-1},f_c$

$\left[f_0:x=0,y=0,f_1:y=\frac{1}{x},f_{-1}:y=\frac{1}{x},f_c:y=\frac{c^2}{x}\right]$

3.2 Limita a spojitost funkce

Vypočtěte limity:

1. $\lim_{(x,y)\to(1,1)}\frac{x+y}{x^2+y^2}$

[1]

2. $\lim_{(x,y)\to(e^2,1)}\frac{\ln x}{y}$

[2]

3. $\lim_{(x,y)\to(-4,-1)}\frac{(x-y)^2-9}{x^2+y^2}$

[0]

4. $\lim_{(x,y)\to(0,0)}xy^2\cos xy^2$

[0]

5. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\sqrt{x^2+y^2+1}-1}{x^2+y^2}$

$\left[\frac{1}{2}\right]$

6. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x^2+y^2)^{x^2y^2}$

[1]

7. $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{xy}$

[1]

8. $\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin xy}{y}$

[0]

9. $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{xy}$

[*neexistuje*]

10. $\lim_{(x,y)\to(\infty,\infty)} \frac{x^2+y^2}{x^4+y^4}$

[0]

Určete body nespojitosti funkce $f(x,y)$:

1. $f(x,y) = \frac{x-y}{x^2+y^2-1}$

$\left[x^2+y^2=1\right]$

2. $f(x,y) = \frac{x+y}{x^4+xy^3}$

$[y=-x,\ x=0]$

3. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$[(x,y)=(0,0)]$

4. $f(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x+y}}$

$[y=-x]$

5. $f(x,y) = \frac{1}{\cos(x-y)}$

$\left[y=x+(2k+1)\frac{\pi}{2},\ k\in\mathbb{Z}\right]$

6. $f(x,y) = \sin\frac{1}{xy}$

$[x=0,\ y=0]$

7. $f(x,y) = \frac{1}{\sin x\sin y}$

$[x=k\pi,\ y=k\pi,\ k\in\mathbb{Z}]$

8. $f(x,y) = \frac{1}{e^{\frac{x}{y}}-1}$

$[x = 0,\ y = 0]$

9. $f(x,y) = \ln \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2}}$

$[(x,y) = (a,b)]$

10. $f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{|\ln|x-y||}}$

$[x = y,\ y = x+1,\ y = x-1]$

3.3 Parciální derivace

Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $f(x,y)$, resp. $f(x,y,z)$:

1. $f(x,y) = x^3 + 2x^2y + 3xy^2 + 4x - 5y + 10$

$\left[f_x = 3x^2 + 4xy + 3y^2 + 4,\ f_y = 2x^2 + 6xy - 5\right]$

2. $f(x,y) = e^{-\frac{x}{y}}$

$\left[f_x = -\frac{1}{y}e^{-\frac{x}{y}},\ f_y = \frac{x}{y^2}e^{-\frac{x}{y}}\right]$

3. $f(x,y) = \ln \frac{x+4}{y^2}$

$\left[f_x = \frac{1}{x+4},\ f_y = -\frac{2}{|y|}\right]$

4. $f(x,y) = \sin \frac{x}{y} \cos \frac{y}{x}$

$\left[f_x = \frac{1}{y}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} + \frac{y}{x^2}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x},\ f_y = -\frac{x}{y^2}\cos\frac{x}{y}\cos\frac{y}{x} - \frac{1}{x}\sin\frac{x}{y}\sin\frac{y}{x}\right]$

5. $f(x,y) = \ln(x + \sqrt{x^2+y^2})$

$\left[f_x = \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}},\ f_y = \frac{y}{x^2+y^2+x\sqrt{x^2+y^2}}\right]$

6. $f(x,y) = \arcsin \frac{\sqrt{x^2-y^2}}{\sqrt{x^2+y^2}}$

$\left[f_x = \frac{\sqrt{2}xy}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}},\ f_y = -\frac{\sqrt{2}x^2}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2-y^2}}\right]$

7. $f(x,y) = xy\ln(x+y)$

$\left[f_x = y(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y}),\ f_y = x(\ln(x+y) + \frac{x}{x+y})\right]$

8. $f(x,y) = (2x+y)^{2x+y}$

$\left[f_x = 2(2x+y)^{2x+y}(\ln(2x+y)+1),\ f_y = (2x+y)^{2x+y}(\ln(2x+y)+1)\right]$

9. $f(x,y,z) = x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2} - z\sqrt{1-x^2-y^2}$

$$\left[f_x = \sqrt{1-y^2} - \tfrac{xy}{\sqrt{1-x^2}} + \tfrac{xz}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ f_y = -\tfrac{xy}{\sqrt{1-y^2}} + \sqrt{1-x^2} + \tfrac{yz}{\sqrt{1-x^2-y^2}},\ f_z = -\sqrt{1-x^2-y^2}\right]$$

10. $f(x,y,z) = e^{x^2(1-y-z)}$

$$\left[f_x = 2x(1-y-z)e^{x^2(1-y-z)},\ f_y = f_z = -x^2 e^{x^2(1-y-z)}\right]$$

Vypočtěte parciální derivace 2. řádu funkce $f(x,y)$:

1. $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$

$$\left[f_{xx} = 12x^2 - 8y^2,\ f_{xy} = -16xy,\ f_{yy} = 12y^2 - 8x^2\right]$$

2. $f(x,y) = \frac{x}{y^2}$

$$\left[f_{xx} = 0,\ f_{xy} = -\tfrac{2}{y^3},\ f_{yy} = \tfrac{6x}{y^4}\right]$$

3. $f(x,y) = x\sin(x+y)$

$$[f_{xx} = 2\cos(x+y) - xsin(x+y),\ f_{xy} = \cos(x+y) - x\sin(x+y),\ f_{yy} = -x\sin(x+y)]$$

4. $f(x,y) = (1+x^2)^y$

$$\left[f_{xx} = 2y(1+x^2)^{y-2}(-x^2+2x^2y+1),\ f_{xy} = 2x(1+x^2)^{y-1}(1+y\ln(1+x^2)),\ f_{yy} = (1+x^2)^y\ln^2(1+x^2)\right]$$

Vypočtěte parciální derivace 1. řádu funkce $f(x,y)$, resp. $f(x,y,z)$ v bodě (x_0,y_0), resp. (x_0,y_0,z_0):

1. $f(x,y) = y^2 + y\sqrt{1+x^2},\ (x_0,y_0) = (2,5)$

$$\left[(f_x,f_y)(2,5) = (2\sqrt{5}, 10+\sqrt{5})\right]$$

2. $f(x,y) = \ln(x + \frac{y}{2x}),\ (x_0,y_0) = (1,2)$

$$\left[(f_x,f_y)(1,2) = (0, \tfrac{1}{4})\right]$$

3. $f(x,y) = \frac{x\cos y - y\cos x}{1+\sin x+\sin y},\ (x_0,y_0) = (0,0)$

$$[(f_x,f_y)(0,0) = (1,-1)]$$

4. $f(x,y,z) = \sqrt{\sin^2 x + \sin^2 y + \sin^2 z},\ (x_0,y_0,z_0) = (0,0,\frac{\pi}{4})$

$$\left[(f_x,f_y,f_z)(0,0,\tfrac{\pi}{4}) = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, \tfrac{\sqrt{2}}{2})\right]$$

3.4 Diferenciál funkce

Určete diferenciál funkce $f(x,y)$, resp. $f(x,y,z)$ v bodě (x_0,y_0), resp. (x_0,y_0,z_0):

1. $f(x,y) = xy + \frac{x}{y},\ (x_0,y_0) = (1,1)$

   $[df(1,1) = 2\ dx]$

2. $f(x,y) = \operatorname{arctg}\frac{y}{x},\ (x_0,y_0) = (1,-1)$

   $\left[df(1,-1) = \frac{1}{2}\ dx - \frac{1}{2}\ dy\right]$

3. $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2},\ (x_0,y_0) = (3,4)$

   $\left[df(3,4) = \frac{3}{5}\ dx + \frac{4}{5}\ dy\right]$

4. $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}},\ (x_0,y_0,z_0) = (2,1,1)$

   $[df(2,1,1) =\ dx + 2\ln 2\ dy - 2\ln 2\ dz]$

5. $f(x,y,z) = \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2}},\ (x_0,y_0,z_0) = (1,0,1)$

   $[df(2,1,1) = -2\ dx +\ dz]$

3.4.1 Přibližný výpočet funkčních hodnot

Pomocí diferenciálu přibližně vypočtěte:

1. $\operatorname{arctg}\frac{1{,}02}{0{,}95}$

   $\left[\frac{\pi}{4} + 0,035\right]$

2. $\sqrt{(1,02)^3 + (1,97)^2}$

   $[2,95]$

3. $\frac{(1{,}03)^2}{\sqrt[3]{0{,}98\cdot(1{,}05)^4}}$

   $[1]$

3.4.2 Geometrický význam totálního diferenciálu

Určete rovnici tečné roviny ke grafu funkce $f(x,y)$ v bodě (x_0,y_0,z_0):

1. $f(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2},\ (x_0,y_0,z_0) = (\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}})$

   $\left[x + y + z = \sqrt{3}\right]$

2. $f(x,y) = x^2 + xy + 2y^2,\ (x_0,y_0,z_0) = (1,1,4)$

   $[3x + 5y - z = 4]$

3. $f(x,y) = e^{x^2+y^2},\ (x_0, y_0, z_0) = (0,0,1)$

$[z = 1]$

Na grafu funkce $f(x,y)$ najděte bod, v nmž je tečná rovina rovnoběžná s danou rovinou:

1. $f(x,y) = x^3 + y^3,\ r : 12x + 3y - z = 0$

$[(2,1); (2,-1); (-2,1); (-2,-1)]$

2. $f(x,y) = x^y,\ r : x - z = 0$

$[(1,1)]$

3. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ r : ax + by - z = 0$

$\left[(-\frac{a}{\sqrt{1+a^2+b^2}}, -\frac{b}{\sqrt{1+a^2+b^2}})\right]$

3.4.3 Diferenciály vyšších řádů

Vypočtěte diferenciál řádu n funkce $f(x,y)$:

1. $f(x,y) = x \ln xy,\ n = 2$

$\left[d^2 f(x,y) = \frac{dx^2}{x} + \frac{dx\ dy}{y} - \frac{dy^2}{y^2}\right]$

2. $f(x,y) = x^3 + y^3 - 3xy(x - y),\ n = 2$

$\left[d^2 f(x,y) = 6(x-y)dx^2 + 12(y-x)dx\ dy + 6(x-y)dy^2\right]$

3. $f(x,y) = \ln(x+y),\ n = k$

$\left[d^k f = \frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(x+y)^k}(dx + dy)^k\right]$

3.4.4 Kmenová funkce

Zjistěte, zda daný výraz je diferenciálem nějaké funkce $H(x,y)$, resp. $H(x,y,z)$ a najděte ji.:

1. $(y^2 - 1)\ dx + (2xy + 3y)\ dy$

$\left[H(x,y) = xy^2 - x + \frac{3}{2}y^2 + c,\ c \in \mathbb{R}\right]$

2. $(x \sin 2y)\ dx + (x^2 \cos 2y)\ dy$

$\left[H(x,y) = \frac{x^2}{2} \sin 2y + c,\ c \in \mathbb{R}\right]$

3. * $(3x^2 - 3yz + 2)\ dx + (3y^2 - 3xz + \ln y + 1)\ dy + (3z^2 - 3xy + 1)\ dz$

$\left[H(x,y,z) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz + 2x + y \ln y + z + c,\ c \in \mathbb{R}\right]$

3.5 Parciální derivace složené funkce

Využitím dané substituce najděte všechny funkce $z(x,y)$, resp. $\rho(x,y,z)$ splňující danou rovnost:

1. $xz_x + yz_{y=0},\ u = x, v = \frac{y}{x}$

$\left[z(x,y) = f(\frac{y}{x})\right]$

2. $\rho_x + \rho_y + \rho_z = 0,\ u = x + y - 2z, v = x - 2y + z, w = z$

$[\rho(x,y,z) = f(x + y - 2z, x - 2y + z)]$

3. $z_{xx} - yz_{yy} - \frac{1}{2}z_y = 0,\ u = x - 2\sqrt{y}, v = x + 2\sqrt{y}$

$\left[z(x,y) = f(x - 2\sqrt{y}) + g(x + 2\sqrt{y})\right]$

Diferenciální rovnici transformujte do nových proměnných u, v:

1. $x^2 z_{xx} - 2xyz_{xy} + y^2 z_{yy} + xz_x + yz_y = 0,\ u = xy, v = \frac{x}{y}$

$[2uz_{uv} = z_v]$

2. $xz_{xx} + yz_{xy} + z_x = 0,\ u = x + y, v = \frac{y}{x+y}$

$[vz_{vv} + z_v = 0]$

3. $xz_{xx} - yz_{yy} = 0,\ u = \sqrt{x} + \sqrt{y}, v = \sqrt{x} - \sqrt{y}$

$\left[(u^2 - v^2)z_{uv} + vz_u - uz_v = 0\right]$

3.6 Taylorova věta

Určete Taylorův polynom 2. stupně se středem v bodě (x_0, y_0) funkce $f(x,y)$, resp. $f(x,y,z)$:

1. $f(x,y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2},\ (x_0, y_0) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

$\left[T_2(x,y) = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2}((x - \frac{1}{2}) + (y - \frac{1}{2})) - \frac{\sqrt{2}}{4}((x - \frac{1}{2})^2 + 2(x - \frac{1}{2})(y - \frac{1}{2}) + (y - \frac{1}{2})^2)\right]$

2. $f(x,y) = \frac{\cos x}{\cos y},\ (x_0, y_0) = (0,0)$

$\left[T_2(x,y) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2}\right]$

3. $f(x,y) = \ln\sqrt{x^2 + y^2},\ (x_0, y_0) = (1,1)$

$\left[T_2(x,y) = \frac{\ln 2}{2} + \frac{1}{2}((x - 1) + (y - 1)) - \frac{1}{2}(x - 1)(y - 1)\right]$

4. $f(x,y,z) = x^{\frac{y}{z}},\ (x_0, y_0, z_0) = (1,1,1)$

$[T_2(x,y,z) = 1 + (x - 1)(y - 1) - (x - 1)(z - 1)]$

Pomocí Taylorova polynomu 2. stupně přibližně vypočtěte:

1. $\operatorname{arctg} \frac{1{,}04}{0{,}98}$

$[0,815]$

2. $\sin 29^o \operatorname{tg} 46^o$

$[0,5]$

3.7 Lokální a absolutní extrémy

Najděte lokální extrémy funkce $f(x,y)$, resp. $f(x,y,z)$:

1. $f(x,y) = 4(x-y) - x^2 - y^2$

   $[lok.\ max.\ [2,-2,16]]$

2. $f(x,y) = xy + \frac{50}{x} + \frac{20}{y}$

   $[lok.\ min.\ [5,2,30]]$

3. $f(x,y) = x^2 + xy + y^2 - \ln x - \ln y$

   $[lok.\ min.\ [1,1,3+\ln 3]]$

4. $f(x,y) = x - 2y + \ln\sqrt{x^2+y^2} + 3\operatorname{arctg}\frac{y}{x}$

   $[-]$

5. $f(x,y,z) = x^3 + y^2 + z^2 + 12xy + 2z$

   $[lok.\ min.\ [24,-144,-1,-6913]]$

Určete absolutní extrémy funkce $f(x,y)$ na množině M:

1. $f(x,y) = x^2 + y^2 + 3xy + 2$, M je omezena grafy funkcí $y = |x|$ a $y = 2$

   $[max\ [2,2,22],\ min\ [-2,2,-2]]$

2. $f(x,y) = 2x^2 + 4y^2$, $M = \big\{[x,y] : x^2 + y^2 \leq 9\big\}$

   $[max\ [0,\pm 3,36],\ min\ [0,0,0]]$

3. $f(x,y) = x^2 - xy + y^2$, $M = \{[x,y] : |x| + |y| \leq 1\}$

   $[max\ [\pm 1,0,1]\ a\ [0,\pm 1,1],\ min\ [0,0,0]]$

Rozložte kladné číslo h na:

1. * součet tří nezáporných čísel tak, aby jejich součin byl největší.

   $\left[\frac{h}{3}\right]$

2. * součin tří kladných čísel tak, aby jejich součet byl nejmenší.

   $\left[\sqrt[3]{h}\right]$

3.8 Zobrazení mezi prostory vyšších dimenzí

Určete Jacobiho matici inverzního zobrazení k zobrazení $F(x,y)$ v bodě $[x_0,y_0]$:

1. $F(x,y) = \left[\sqrt{x^2+y^2}, xy\right]$, $[x_0,y_0] = [0,1]$

$$\left[\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right]$$

2. $F(x,y) = [x^y, y^x]$, $[x_0,y_0] = [1,1]$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right]$$

Určete souřadnicové funkce (složky) zobrazení:

1. * Osová souměrnost podle příky p o rovnici $ax+by+c=0$.

$$\left[F(x,y) = \left[\tfrac{x(b^2-a^2)-2a(by+c)}{a^2+b^2}, \tfrac{y(a^2-b^2)-2b(ax+c)}{a^2+b^2}\right]\right]$$

2. * Složení osové souměrnosti podle přímky $y=x$ a projekce bodu na jednotkovou kružnici (bodu $[x,]\neq[0,0]$ je přiřazen bod na jednotkové kružnici, který je průsečíkem kružnice s přímkou určenou počátkem a bodem $[x,]$).

$$\left[F(x,y) = \left[\tfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}, \tfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right]\right]$$

3.9 Funkce zadané implicitně

Vypočtěte y' pro funkci $y=f(x)$ zadanou implicitně rovnicí:

1. $x - y^2 = \ln y$

$$\left[y' = \tfrac{y}{1+2y^2}\right]$$

2. $x^y = y^x$, $x>0$, $y>0$

$$\left[y' = \tfrac{y^2(1-\ln x)}{x^2(1-\ln y)}\right]$$

Určete rovnici tečny, resp. tečné roviny, ke křivce, resp. ploše:

1. $3x^2+7xy+5y^2+4x+5y+1=0$ procházející počátkem.

$$[2x+5y=0 \ a\ 2x+y=0]$$

2. $7x^2-2y^2=14$ kolmou k přímce $p: 2x+4y-3=0$.

$$[2x-y\pm 1=0]$$

3. $x^2+2y^2+3z^2=21$ rovnoběžné s rovinou $\rho: x+4y+6z=0$.

$[x + 4y + 6z \pm 21 = 0]$

Najděte lokální extrémy funkce $y = f(x)$, resp. $z = f(x, y)$, zadané implicitně rovnicí:

1. $3x^2 + 2xy - y^2 + x - 3y - \frac{5}{4} = 0$

$\left[lok.\ min.\ \left[0, -\frac{1}{2}\right],\ lok.\ max.\ \left[\frac{1}{2}, -2\right]\right]$

2. $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 8xz - z + 8 = 0.$

$\left[lok.\ min.\ [-2, 0, 1],\ lok.\ max.\ \left[\frac{16}{7}, 0, -\frac{8}{7}\right]\right]$

3.10 Vázané extrémy

Určete vázané extrémy funkce f na množině M:

1. $f(x, y, z) = xy^2z^3$, $M:\ x + 2y + 3z = 6,\ x, y, z > 0$

$[lok.\ max.\ [1, 1, 1, 1]]$

2. $f(x, y, z) = \sin x \sin y \sin z$, $M:\ x + y + z = \frac{\pi}{2}$

$\left[lok.\ max.\ \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6}, \frac{1}{8}\right]\right]$

3. $f(x, y, z) = xyz$, $M:\ x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ x + y + z = 0$

$$\left[lok.\ min.\ \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{3\sqrt{6}}\right],\ \left[\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{3\sqrt{6}}\right],\ \left[-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{3\sqrt{6}}\right]\right]$$
$$\left[lok.\ max.\ \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{6}}\right],\ \left[-\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{6}}\right],\ \left[\frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{3\sqrt{6}}\right]\right]$$

Vyřešte:

1. * Do elipsoidu $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ vepište hranol s maximálním objemem. Tento objem určete.

$\left[hrany:\ \frac{2a}{\sqrt{3}}, \frac{2b}{\sqrt{3}}, \frac{2c}{\sqrt{3}}\ V = \frac{8}{3\sqrt{3}}abc\right]$

2. * Do úseče eliptického paraboloidu $\frac{z}{c} = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2}$, $z \le c$ vepište hranol s maximálním objemem. Tento objem určete.

$\left[hrany:\ a, b, \frac{c}{2},\ V = \frac{abc}{2}\right]$

3. * Do kužele s poloměrem podstavy r a výškou h vepište hranol s maximálním objemem. Tento objem určete.

$\left[hrany: \frac{2\sqrt{2}}{3}r, \frac{2\sqrt{2}}{3}r, \frac{1}{3}h,\ V = \frac{8}{27}r^2h\right]$