

## Vzdálenost afinních podprostorů v euklidovském prostoru

Bud'  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  euklidovský prostor. Připomeňme, že to znamená, že  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  je nenulový vektorový prostor konečné dimenze  $n$  nad tělesem  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  všech reálných čísel s pevně zadaným skalárním součinem  $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ .

Připomeňme dále, že pro libovolný vektorový podprostor  $\mathbf{W}$  euklidovského prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  množina vektorů

$$\mathbf{W}^\perp = \{\mathbf{x} \in \mathbf{V} : (\forall \mathbf{w} \in \mathbf{W})(f(\mathbf{x}, \mathbf{w}) = 0)\}$$

tvoří rovněž vektorový podprostor v euklidovském prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  a nazývá se ortogonální doplněk vektorového podprostoru  $\mathbf{W}$  v euklidovském prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ . (Podotkněme, ačkoliv to v označení  $\mathbf{W}^\perp$  není explicitně zachyceno, že ortogonální doplněk  $\mathbf{W}^\perp$  podprostoru  $\mathbf{W}$  i všechny další navazující pojmy jsou zavedeny v závislosti na zmíněném pevně zadaném skalárním součinu  $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ .)

Doplňme konečně, že důsledkem předpokladu o tom, že euklidovský prostor  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  je kromě jiného nenulový vektorový prostor konečné dimenze  $n$  (nad tělesem  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$ ), je tato skutečnost. Pro libovolný vektorový podprostor  $\mathbf{W}$  euklidovského prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  je samotný euklidovský prostor  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  přímým součtem podprostoru  $\mathbf{W}$  a jeho ortogonálního doplňku  $\mathbf{W}^\perp$ . Platí tedy  $\mathbf{V} = \mathbf{W} \oplus \mathbf{W}^\perp$ .

V situaci z předchozích odstavců tedy pro každý vektor  $\mathbf{u} \in \mathbf{V}$  existují jednoznačně určené vektory  $\mathbf{a} \in \mathbf{W}$  a  $\mathbf{b} \in \mathbf{W}^\perp$  takové, že  $\mathbf{u} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ . Vektor  $\mathbf{a}$  se pak nazývá ortogonální projekce vektoru  $\mathbf{u}$  do vektorového podprostoru  $\mathbf{W}$ . Vektor  $\mathbf{b}$  je pak ovšem ortogonální projekcí vektoru  $\mathbf{u}$  do ortogonálního doplňku  $\mathbf{W}^\perp$  vektorového podprostoru  $\mathbf{W}$ . Pro tento vektor  $\mathbf{b}$  bývá též užíván název komponenta vektoru  $\mathbf{u}$  vzhledem k vektorovému podprostoru  $\mathbf{W}$ . Připomeňme, že pro vektory  $\mathbf{a}$  a  $\mathbf{b}$  platí  $\mathbf{b} = \mathbf{u} - \mathbf{a}$ . Je tedy možno ortogonální projekci vektoru  $\mathbf{u}$  do vektorového podprostoru  $\mathbf{W}$  charakterizovat též jako vektor  $\mathbf{a}$  splňující podmínky  $\mathbf{a} \in \mathbf{W}$  a  $\mathbf{u} - \mathbf{a} \in \mathbf{W}^\perp$ . Tato charakterizace ortogonální projekce je zvláště výhodná k jejímu výpočtu.

Bud' znovu  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  euklidovský prostor, což jako doposud znamená, že  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  je nenulový vektorový prostor konečné dimenze  $n$  nad tělesem  $(\mathbb{R}, +, \cdot)$  všech reálných čísel s pevně zadaným skalárním součinem  $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ . Připomeňme, že pro libovolný vektor  $\mathbf{x} \in \mathbf{V}$  se pak číslo  $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{f(\mathbf{x}, \mathbf{x})}$  nazývá norma vektoru  $\mathbf{x}$  v euklidovském prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ . (Znovu poznamenejme, že ačkoliv to v označení  $\|\mathbf{x}\|$  není explicitně zachyceno, norma  $\|\mathbf{x}\|$  vektoru  $\mathbf{x}$  je takto zase zavedena v závislosti na zmíněném pevně zadaném skalárním součinu  $f : \mathbf{V} \times \mathbf{V} \rightarrow \mathbb{R}$ .)

Nechť dále  $\mathcal{P}, \mathcal{Q} \subseteq \mathbf{V}$  jsou libovolné dva afinní podprostory euklidovského prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ . Připomeňme, že prvky afinních podprostorů zpravidla značíme velkými latinskými písmeny  $A, B, C, \dots$  a mluvíme o nich jako o bodech daných afinních podprostorů. Vzdálenost výše uvedených afinních podprostorů  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  je pak definována formulí

$$\nu(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \inf\{\|B - A\| : A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{Q}\}.$$

Jestliže  $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} \neq \emptyset$ , pak ovšem  $\nu(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = 0$ . Zajímá nás tedy dále případ, kdy  $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$ , tj. kdy afinní podprostory  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$  jsou navzájem disjunktní.

Nechť nyní  $C \in \mathcal{P}$  a  $D \in \mathcal{Q}$  jsou dva libovolně zvolené body uvedených dvou afinních podprostorů  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ . Víme, že pak zmíněná podmínka  $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q} = \emptyset$  je ekvivalentní podmínce  $D - C \notin \mathcal{Z}(\mathcal{P}) + \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ , kde  $\mathcal{Z}(\mathcal{P}), \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$  jsou zaměření afinních podprostorů  $\mathcal{P}, \mathcal{Q}$ . Takže v tom případě  $\mathcal{Z}(\mathcal{P}) + \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$  je vlastní vektorový podprostor euklidovského prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ , což znamená, že ortogonální doplněk  $(\mathcal{Z}(\mathcal{P}) + \mathcal{Z}(\mathcal{Q}))^\perp$  je nenulový vektorový podprostor euklidovského prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ . V této situaci pak platí

$$\nu(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \|\mathbf{g}\|, \quad \text{kde } \mathbf{g} \text{ je ortogonální projekce vektoru } D - C \text{ do vektorového podprostoru } (\mathcal{Z}(\mathcal{P}) + \mathcal{Z}(\mathcal{Q}))^\perp.$$

Pravdivost tohoto tvrzení lze ozřejmit následující úvahou. Označme dále  $\mathbf{h}$  ortogonální projekci vektoru  $D - C$  do vektorového podprostoru  $\mathcal{Z}(\mathcal{P}) + \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ . Takže pak máme  $D - C = \mathbf{g} + \mathbf{h}$ . Poněvadž  $\mathbf{h} \in \mathcal{Z}(\mathcal{P}) + \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ , existují vektory  $\mathbf{s} \in \mathcal{Z}(\mathcal{P})$  a  $\mathbf{t} \in \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$  takové, že  $\mathbf{h} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$ . Potom tedy máme  $D - C = \mathbf{g} + \mathbf{s} + \mathbf{t}$ . Uvažme nyní body

$F = C + \mathbf{s}$  a  $G = D - \mathbf{t}$ . Pak jistě  $F \in \mathcal{P}$ ,  $G \in \mathcal{Q}$  a z předchozího vyjádření rozdílu  $D - C$  přímým propočtem vyplyne, že  $G - F = \mathbf{g}$ . Je tedy vektor  $\mathbf{g}$  kolmý na zaměření  $\mathcal{Z}(\mathcal{P})$ ,  $\mathcal{Z}(\mathcal{Q})$  obou afinních podprostorů  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  a přitom spojuje dva body  $F, G$  z těchto afinních podprostorů. Odtud je patrné, že  $\nu(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \|\mathbf{g}\|$ , jak uvedeno výše. Navíc z tohoto poznatku ohledně vektoru  $\mathbf{g}$  plyne, že oproti dříve uvedené definiční formuli vzdálenosti  $\nu(\mathcal{P}, \mathcal{Q})$  daných dvou afinních podprostorů  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  pro tuto vzdálenost platí dokonce formule

$$\nu(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \min\{\|B - A\| : A \in \mathcal{P}, B \in \mathcal{Q}\}.$$

Věnujme se závěrem případu, kdy uvedené afinní podprostory  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  euklidovského prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  jsou úplně mimoběžné. To však znamená, že oproti situaci v předchozím odstavci navíc máme  $\mathcal{Z}(\mathcal{P}) \cap \mathcal{Z}(\mathcal{Q}) = \{\mathbf{o}\}$ . V tom případě ale součet zaměření  $\mathcal{Z}(\mathcal{P}) + \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$  je ve skutečnosti přímým součtem  $\mathcal{Z}(\mathcal{P}) \oplus \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ . To má ovšem za následek, že v předchozím odstavci k ortogonální projekci  $\mathbf{h}$  vektoru  $D - C$  do vektorového podprostoru  $\mathcal{Z}(\mathcal{P}) \oplus \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$  existují jediné vektory  $\mathbf{s} \in \mathcal{Z}(\mathcal{P})$  a  $\mathbf{t} \in \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$  takové, že  $\mathbf{h} = \mathbf{s} + \mathbf{t}$ . Odtud je patrné, že body  $F \in \mathcal{P}$ ,  $G \in \mathcal{Q}$  (nalezené podle vztahů  $F = C + \mathbf{s}$  a  $G = D - \mathbf{t}$ ), které mají tu vlastnost, že pro vektor  $\mathbf{g} = G - F$  platí  $\nu(\mathcal{P}, \mathcal{Q}) = \|\mathbf{g}\|$ , jsou v tomto případě určeny jednoznačně. Tehdy se úsečka  $FG$  nazývá příčka úplně mimoběžných afinních podprostorů  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  realizující vzdálenost těchto afinních podprostorů v euklidovském prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$ . Z právě provedených úvah je také vidět, že k nalezení této příčky  $FG$  úplně mimoběžných afinních podprostorů  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{Q}$  realizující jejich vzdálenost v euklidovském prostoru  $(\mathbf{V}, +, \cdot)$  může být často početně výhodnější začít výpočtem ortogonální projekce  $\mathbf{h}$  vektoru  $D - C$  do vektorového podprostoru  $\mathcal{Z}(\mathcal{P}) \oplus \mathcal{Z}(\mathcal{Q})$ .