Ortogonální operátory na euklidovských prostorech

Nechť n je přirozené číslo. Nechť A je ortogonální matice řádu n, což znamená, že A je čtvercová matice řádu n nad $\mathbb{R}$ taková, že $A{\cdot}A^\top = E$. Nechť $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ je lineární operátor na vektorovém prostoru $\mathbb{R}^n$ mající ve standardní bázi tohoto prostoru matici A. To znamená, že pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ je jeho obraz $\varphi(\mathbf{x}) \in \mathbb{R}^n$, $\varphi(\mathbf{x}) = (y_1, \dots, y_n)$ určen předpisem

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = A \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

Pak φ je ovšem ortogonální operátor na euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$.

Matice A je maticí nad $\mathbb{R}$. Uvažujme však dále tuto matici jako matici nad $\mathbb{C}$. Takto matice A určuje lineární operátor $\psi : \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ na vektorovém prostoru $\mathbb{C}^n$ týmž způsobem jako výše, tzn. že matice A vystupuje jako matice tohoto lineárního operátoru ve standardní bázi prostoru $\mathbb{C}^n$. Čili pro každý vektor $\mathbf{x} \in \mathbb{C}^n$ je jeho obraz $\psi(\mathbf{x}) \in \mathbb{C}^n$ určen analogickou formulí jako výše. Takže máme $\varphi = \psi|_{\mathbb{R}^n}$. Pak navíc ψ je unitární operátor na unitárním prostoru $\mathbb{C}^n$ vybaveném standardním skalárním součinem.

Nechť nyní $\mu_1, \dots, \mu_k$ jsou všechna vzájemně různá reálná vlastní čísla matice A a nechť $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ jsou jejich příslušné algebraické násobnosti. Poněvadž A je ortogonální matice, víme, že platí $\mu_1, \dots, \mu_k \in \{-1, 1\}$, takže nutně $k \leqslant 2$. Předpokládejme nadále, že $-1, 1 \in \{\mu_1, \dots, \mu_k\}$, takže $k = 2$ (jinak by situace byla ještě jednodušší). K tomu zvolme indexování tak, aby bylo $\mu_1 = 1$ a $\mu_2 = -1$. Nechť dále $\nu_1, \bar{\nu}_1, \dots, \nu_\ell, \bar{\nu}_\ell$ jsou všechny navzájem různé dvojice komplexně sdružených vlastních čísel matice A a nechť $\beta_1, \dots, \beta_\ell$ jsou jejich příslušné algebraické násobnosti. Opět, poněvadž A je ortogonální matice, víme, že platí $|\nu_1| = |\bar{\nu}_1| = \dots = |\nu_\ell| = |\bar{\nu}_\ell| = 1$. Pro každé $\iota = 1, 2$ nechť $\mathbf{U}_\iota \subseteq \mathbb{R}^n$ je invariantní podprostor v $\mathbb{R}^n$ všech vlastních vektorů matice A příslušných reálnému vlastnímu číslu μ_ι. Potom, znovu poněvadž A je ortogonální matice, víme, že dimenze $\mathbf{U}_\iota$ je rovna α_ι pro každé $\iota = 1, 2$. Jsou tedy algebraické násobnosti vlastních čísel μ_1, μ_2 rovny jejich geometrickým násobnostem. Dále nechť pro každé $j = 1, \dots, \ell$ je $\mathbf{V}_j \subseteq \mathbb{C}^n$ invariantní podprostor v $\mathbb{C}^n$ všech vlastních vektorů matice A příslušných komplexnímu vlastnímu číslu ν_j a nechť $\overline{\mathbf{V}}_j \subseteq \mathbb{C}^n$ je invariantní podprostor v $\mathbb{C}^n$ všech vlastních vektorů matice A příslušných komplexně sdruženému vlastnímu číslu $\bar{\nu}_j$. Pak každý vektor ve $\mathbf{V}_j$ má tvar $\mathbf{u} + i\mathbf{v}$ pro jisté vektory $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ a platí $\overline{\mathbf{V}}_j = \{\mathbf{u} - i\mathbf{v} : \mathbf{u} + i\mathbf{v} \in \mathbf{V}_j\}$. Navíc, zase z toho důvodu, že A je ortogonální matice, víme, že pro všechna $j = 1, \dots, \ell$ jsou dimenze podprostorů $\mathbf{V}_j$ i $\overline{\mathbf{V}}_j$ rovny β_j.

Pro každé $\iota = 1, 2$ vyberme ortonormální bázi $(\mathbf{f}_{\iota 1}, \dots, \mathbf{f}_{\iota \alpha_\iota})$ invariantního podprostoru $\mathbf{U}_\iota \subseteq \mathbb{R}^n$. Dále pro každé $j = 1, \dots, \ell$ vyberme ortonormální bázi $(\mathbf{g}_{j1}, \dots, \mathbf{g}_{j\beta_j})$ invariantního podprostoru $\mathbf{V}_j \subseteq \mathbb{C}^n$. Pak pro každé $p = 1, \dots, \beta_j$ má vektor $\mathbf{g}_{jp}$ tvar $\mathbf{g}_{jp} = \mathbf{r}_{jp} + i\mathbf{s}_{jp}$ pro jisté vektory $\mathbf{r}_{jp}, \mathbf{s}_{jp} \in \mathbb{R}^n$. Položme v této situaci $\bar{\mathbf{g}}_{jp} = \mathbf{r}_{jp} - i\mathbf{s}_{jp}$. Pak posloupnost vektorů $(\bar{\mathbf{g}}_{j1}, \dots, \bar{\mathbf{g}}_{j\beta_j})$ tvoří ortonormální bázi invariantního podprostoru $\overline{\mathbf{V}}_j \subseteq \mathbb{C}^n$. Potom, opět vzhledem k tomu, že A je ortogonální matice, lze ukázat, že posloupnost vektorů

$$(\mathbf{f}_{11}, \dots, \mathbf{f}_{1\alpha_1}, \mathbf{f}_{21}, \dots, \mathbf{f}_{2\alpha_2}, \mathbf{g}_{11}, \bar{\mathbf{g}}_{11}, \dots, \mathbf{g}_{1\beta_1}, \bar{\mathbf{g}}_{1\beta_1}, \dots, \mathbf{g}_{\ell 1}, \bar{\mathbf{g}}_{\ell 1}, \dots, \mathbf{g}_{\ell\beta_\ell}, \bar{\mathbf{g}}_{\ell\beta_\ell})$$

tvoří ortonormální bázi unitárního prostoru $\mathbb{C}^n$. Navíc pak odtud plyne, že pro každé $j = 1, \dots, \ell$ a každé $p = 1, \dots, \beta_j$ platí $||\mathbf{r}_{jp}|| = ||\mathbf{s}_{jp}||$, vektory $\mathbf{r}_{jp}$ a $\mathbf{s}_{jp}$ jsou navzájem ortogonální v prostoru $\mathbf{E}_n$ a vektorový podprostor $[\mathbf{r}_{jp}, \mathbf{s}_{jp}]$ je invariantním podprostorem ortogonálního operátoru φ v prostoru $\mathbf{E}_n$. Poněvadž $||\mathbf{g}_{jp}|| = ||\bar{\mathbf{g}}_{jp}|| = 1$, snadno se odtud dále odvodí, že $||\mathbf{r}_{jp}|| = ||\mathbf{s}_{jp}|| = \sqrt{2}/2$. Jestliže tedy položíme $\mathbf{h}_{jp} = \sqrt{2}\mathbf{r}_{jp}$ a $\mathbf{k}_{jp} = \sqrt{2}\mathbf{s}_{jp}$ pro všechna $j = 1, \dots, \ell$ a $p = 1, \dots, \beta_j$, snadno nahlédneme, že posloupnost vektorů

$$(\mathbf{f}_{11}, \dots, \mathbf{f}_{1\alpha_1}, \mathbf{f}_{21}, \dots, \mathbf{f}_{2\alpha_2}, \mathbf{h}_{11}, \mathbf{k}_{11}, \dots, \mathbf{h}_{1\beta_1}, \mathbf{k}_{1\beta_1}, \dots, \mathbf{h}_{\ell 1}, \mathbf{k}_{\ell 1}, \dots, \mathbf{h}_{\ell\beta_\ell}, \mathbf{k}_{\ell\beta_\ell})$$

tvoří ortonormální bázi euklidovského prostoru $\mathbf{E}_n$. Poněvadž dále máme $|\nu_1| = |\bar{\nu}_1| = \dots = |\nu_\ell| = |\bar{\nu}_\ell| = 1$, rozepíšeme-li tato komplexní čísla ve tvaru $\nu_1 = \sigma_1 + i\tau_1$, $\bar{\nu}_1 = \sigma_1 - i\tau_1$, ... , $\nu_\ell = \sigma_\ell + i\tau_\ell$, $\bar{\nu}_\ell = \sigma_\ell - i\tau_\ell$, kde $\sigma_1, \tau_1, \dots, \sigma_\ell, \tau_\ell \in \mathbb{R}$, vidíme, že $\sigma_1^2 + \tau_1^2 = 1$, ... , $\sigma_\ell^2 + \tau_\ell^2 = 1$. Existují tedy jednoznačně určené hodnoty $\vartheta_1, \dots, \vartheta_\ell \in \langle 0, 2\pi)$ takové, že $\sigma_1 = \cos\vartheta_1$, $\tau_1 = \sin\vartheta_1$, ... , $\sigma_\ell = \cos\vartheta_\ell$, $\tau_\ell = \sin\vartheta_\ell$. Navíc se pak pro každé $j = 1, \dots, \ell$ a každé $p = 1, \dots, \beta_j$ přímou aplikací unitárního operátoru ψ na jeho vlastní vektor $\sqrt{2}\mathbf{g}_{jp} = \mathbf{h}_{jp} + i\mathbf{k}_{jp}$ příslušný vlastnímu číslu $\nu_j = \sigma_j + i\tau_j = \cos\vartheta_j + i\sin\vartheta_j$ přesvědčíme (vzhledem k tomu, že $\varphi = \psi|_{\mathbb{R}^n}$), že platí vztahy

$$\begin{aligned} \varphi(\mathbf{h}_{jp}) &= \cos\vartheta_j \cdot \mathbf{h}_{jp} - \sin\vartheta_j \cdot \mathbf{k}_{jp}, \\ \varphi(\mathbf{k}_{jp}) &= \sin\vartheta_j \cdot \mathbf{h}_{jp} + \cos\vartheta_j \cdot \mathbf{k}_{jp}. \end{aligned}$$

Má tedy ortogonální operátor φ zúžený na svůj již výše zmíněný invariantní podprostor $[\mathbf{h}_{jp}, \mathbf{k}_{jp}]$ v ortonormální bázi $(\mathbf{h}_{jp}, \mathbf{k}_{jp})$ tohoto podprostoru matici $\left(\begin{smallmatrix} \cos\vartheta_j & \sin\vartheta_j \\ -\sin\vartheta_j & \cos\vartheta_j \end{smallmatrix}\right)$. To znamená, že ortogonální operátor φ je v rovině generované vektory $\mathbf{h}_{jp}, \mathbf{k}_{jp}$ otočením kolem počátku o úhel ϑ_j ve smyslu od vektoru $\mathbf{k}_{jp}$ k vektoru $\mathbf{h}_{jp}$. To platí pro všechna $j = 1, \dots, \ell$ a všechna $p = 1, \dots, \beta_j$.

Celkem se ukazuje, že ortogonální operátor φ na euklidovském prostoru $\mathbf{E}_n$ má ve výše uvedené ortonormální bázi tohoto prostoru matici tvaru

$$\begin{pmatrix}
1 \\
& \ddots \\
& & 1 \\
& & & -1 \\
& & & & \ddots \\
& & & & & -1 \\
& & & & & & \begin{smallmatrix} \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 \\ -\sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 \end{smallmatrix} \\
& & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & \begin{smallmatrix} \cos\vartheta_1 & \sin\vartheta_1 \\ -\sin\vartheta_1 & \cos\vartheta_1 \end{smallmatrix} \\
& & & & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & & & \begin{smallmatrix} \cos\vartheta_\ell & \sin\vartheta_\ell \\ -\sin\vartheta_\ell & \cos\vartheta_\ell \end{smallmatrix} \\
& & & & & & & & & & & \ddots \\
& & & & & & & & & & & & \begin{smallmatrix} \cos\vartheta_\ell & \sin\vartheta_\ell \\ -\sin\vartheta_\ell & \cos\vartheta_\ell \end{smallmatrix}
\end{pmatrix}$$

(na nevyplněných pozicích stojí nuly).