Úvod

Cílem mé práce je sestavit sbírku úloh z lineární algebry a geometrie, která je určena především pro posluchače druhého semestru programů matematika, aplikovaná matematika a informatika. Celá práce se skládá ze dvou částí. První část je sbírkou příkladů, druhá část formou exkurzu přibližuje problematiku aplikace lineární algebry ve výpočetní tomografii.

Látka první části je rozdělena do sedmi kapitol a navazuje na bakalářskou práci Bc. Michaely Urbánkové, určenou pro posluchače prvního semestru kurzu lineární algebry. Svým rozsahem odpovídá skriptům [8] Doc. P. Zlatoše a přednáškám Doc. M. Čadka. Jejím základem jsou především cvičení ve skriptech [9] prof. J. Slováka, ve skriptech [4] a [5] RNDr. P. Horáka a publikace [1] a [2].

Každá kapitola se skládá ze tří částí. Nejprve je stručně shrnuta teorie formou základních vět a definic, popřípadě algoritmů. Dále jsou zde řešené příklady, které čtenáři poskytují návod na řešení konkrétních problémů. Ve třetí části jsou úlohy k samostatnému řešení. Příklady jsou řazeny od jednodušších po složitější a jsou voleny tak, že s některými se student setká v zápočtových a zkouškových testech. V závěru sbírky jsou uvedeny výsledky cvičení, popřípadě u složitějších příkladu stručný návod.

Cílem druhé části mé práce je přiblížit studentům problematiku aplikací lineární algebry. Aplikací lineární algebry je samozřejmě celá řada, pro ukázku jsem však vybrala jen jednu, a to problém rekonstrukce obrazu ve výpočetní tomografii při použití metody ART (Algebraic Reconstruction Technique). Samozřejmě není účelem podat vyčerpávající výklad o principu CT přístroje, ale pouze ukázat studentům jeden z mnoha příkladů významu a použití lineární algebry v dnešní technické praxi, a to způsobem lehce pochopitelným na základě znalostí získaných v základním kurzu lineární algebry.

Použité symboly a označení

K	libovolné pole
Q	racionální čísla
R	reálná čísla
C	komplexní čísla
V	vektorový prostor
R^n	množina uspořádaných n-tic reálných čísel
EŘO	elementární řádkové operace
ESO	elementární sloupcové operace
$Mat_n(K)$	množina všech čtvercových matic řádu n nad polem K
$\det A$, $\|A\|$	determinant matice A
$\dim V$	dimenze vektorového prostoru V
$Z(P)$	zaměření afinního podprostoru
o	nulový vektor
$\\|u\\|$	velikost vektoru u
$[u_1, \ldots, u_n]$	lineární obal vektorů $u_1, \ldots, u_n$
$\langle u, v \rangle$	skalární součin vektorů u a v
E_n	vektorový prostor R^n se standardním skalárním součinem
$\perp$	kolmost
$\rho(B, C)$	vzdálenost podprostorů B a C
ϵ	standardní báze v R^n
$(\phi)_{\beta,\alpha}$	matice lineárního zobrazení ϕ v bázích α, β
$(\mathrm{id})_{\beta,\alpha}$	matice přechodu od báze α k bázi β

I. ČÁST

Sbírka úloh z lineární algebry a geometrie

1. VÝPOČET DETERMINANTU

Teorie

1.1. Definice. Nechť $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ je konečná množina o n prvcích. Pak bijektivní zobrazení σ množiny M na sebe se nazývá *permutace množiny* M.

1.2. Definice. Nechť $\sigma = (r_1, r_2, \ldots, r_n)$ je libovolná permutace, řekneme, že dvojice r_i, r_j je *inverze* v permutaci σ, jestliže $i < j$ a $r_i > r_j$.
Znaménko permutace σ, je číslo $sign\,\sigma = (-1)^k$, kde k je počet inverzí v permutaci σ.

1.3. Definice. Nechť $\sigma = (r_1, \ldots, r_n)$, $\tau = (s_1, \ldots, s_n)$ jsou dvě permutace, nechť existují indexy $i \neq j$ tak, že $s_i = r_j$, $s_j = r_i$ a dále $r_k = s_k$ pro $k \neq i, j$. Potom řekneme, že permutace τ vznikla z permutace σ provedením jedné *transpozice*.

1.4. Věta. *Provedení jedné transpozice změní paritu dané permutace.*

1.5. Definice. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n nad polem K. Pak *determinant matice* A, je číslo z pole K, označené $\det A$ (resp. $|A|$) a definované vztahem

$$\det A = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sign} \sigma \, a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \ldots a_{n\sigma(n)} \, ,$$

kde σ je libovolná permutace z množiny všech permutací n-prvkové množiny $M = \{1, 2, \ldots, n\}$ označené S_n. Suma je tedy přes všechna $\sigma \in S_n$, tj. přes všechny permutace množiny M. Součin $\operatorname{sign} \sigma \, a_{\sigma(1)1} a_{\sigma(2)2} \ldots a_{\sigma(n)n}$ se nazývá *člen determinamtu*.

1.6. Věta. *Nechť matice B vznikne z matice A*

1. *záměnou dvou různých řádků, pak* $\det B = -\det A$
2. *vynásobením jednoho řádku číslem $t \in K$, pak* $\det B = t \det A$

1.7. Věta. *Hodnota determinantu matice A se nezmění, jestliže*

1. *k jednomu řádku matice A přičteme libovolný násobek jiného řádku*
2. *k jednomu řádku matice A přičteme libovolnou lineární kombinaci ostatních řádků*
3. *jeden řádek matice A ponecháme beze změny a k ostatním řádkům přičteme jeho libovolné násobky*

1.8. Definice. Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n; nechť je zvoleno k jejích řádků a sloupců $k < n$ a $1 \le i_1 < i_2 < \cdots < i_k \le n, 1 \le j_1 < j_2 < \cdots < j_k \le n$. Pak matice

$$M = \begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & a_{i_1 j_2} & \dots a_{i_1 j_k} \\ a_{i_2 j_1} & a_{i_2 j_2} & \dots a_{i_2 j_k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{i_k j_1} & a_{i_k j_2} & \dots a_{i_k j_k} \end{pmatrix}$$

se nazývá *submatice matice* A určená řádky $i_1, \dots, i_k$ a sloupci $j_1, \dots, j_k$. Její determinant $\det M$ se nazývá *minor řádu* k matice A.
Zbývajícími $(n-k)$ řádky a $(n-k)$ sloupci je určena tzv. *doplňková submatice* $\overline{M}$ k submatici M a její determinant $\det \overline{M}$ se nazývá *doplněk minoru* $\det M$.
Označme $s_M = i_1 + i_2 + \cdots + i_k + j_1 + j_2 + \cdots + j_k$. Pak číslo $(-1)^{s_M} \det \overline{M}$ se nazývá *algebraický doplněk* minoru $\det M$.

1.9. Věta. *(Laplaceova věta) Nechť $A = (a_{ij})$ je čtvercová matice řádu n, nechť je pevně zvoleno k řádků matice A, kde $0 < k < n$. Pak determinant matice A je roven součtu všech $\binom{n}{k}$ součinů minorů řádu k, vybraných ze zvolených k řádků, s jejich algebraickými doplňky.*

Řešené příklady

Úloha 1: Spočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

(a) převedením na schodovitý tvar pomocí elementárních úprav, které nemění hodnotu determinantu
(b) užitím Laplaceovy věty

Řešení: (a) Převedeme na schodovitý tvar. Nejprve ke třetímu řádku přičteme -1 násobek prvního řádku a ke čtvrtému řádku přičteme -2 násobek prvního řádku. Pak ke čtvrtému řádku přičteme $\frac{3}{2}$ násobek druhého řádku.

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{11}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} =$$

Nyní přičteme ke čtvrtému řádku 5 násobek třetího řádku, čímž dostáváme schodovitý tvar a determinant se rovná součinu prvků na hlavní diagonále.

$$= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1\,2\,(-1)\,(-\frac{1}{2}) = 1$$

(b) Uděláme Laplaceův rozvoj podle prvního řádku:

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} = 1 \det \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{4+1}\, 1 \det \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & -3 & 1 \end{pmatrix} =$$

$$(-9-3-2) - (-9-4-2) = 1$$

Úloha 2: Rozvojem podle více řádků určete determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 1 & 5 & 1 \\ -3 & -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Vybereme si první a druhý řádek, protože tyto řádky obsahují nejvíce nul. V rozvoji pak musíme postupně procházet všechny dvojice sloupců. Vidíme, že všechny členy determinantu kromě druhého jsou nulové a výpočet se tedy velmi zjednoduší.

$$\det(A) = (-1)^{1+2+1+2} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+1+3} \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+1+4} \det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+2+3}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} + (-1)^{1+2+2+4} \det \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)^{1+2+3+4} \det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -3 & -1 \end{pmatrix} = (-1)^7 \det \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} \det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} =$$

$$= (-1)\,(-1-6)\,(-2+1) = -7$$

Úloha 3: Spočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n+1 & 0 \end{pmatrix}$$

řádu n.

Řešení: Ke všem řádkům přičteme první řádek

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & 0 & 3 & \dots & n-1 & n \\ -1 & -2 & 0 & \dots & n-1 & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -n+1 & 0 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n \\ 0 & 2 & 2.3 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ 0 & 0 & 3 & \dots & 2(n-1) & 2n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & n \end{pmatrix} = n!$$

Úloha 4: Odvoďte rekurentní vztah pro výpočet determinantu matice

$$A_n = \begin{pmatrix} x+y & xy & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & xy & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{pmatrix}$$

řádu n.

Řešení: Uděláme Laplaceův rozvoj podle prvního sloupce

$$\det A_n = (x+y) \det \begin{pmatrix} x+y & xy & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{pmatrix} +$$

$$+(-1)^{2+1} \det \begin{pmatrix} xy & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+y & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x+y \end{pmatrix}.$$

První matice je vlastně shodná s původní maticí, pouze je o řád menší. U druhé matice provedeme Laplaceův rozvoj podle prvního řádku. Pak dostáváme

$$\det A_n = (x+y)\,\det A_{n-1} - xy\det A_{n-2}\,.$$

Úloha 5: Určete determinant matice řádu n (tzv. Vandermondův determinant).

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-2} & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-2} & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-2} & x_n^{n-1} \end{pmatrix}$$

Řešení: Od každého sloupce, kromě prvního, odečteme x_1 násobek předchozího sloupce. Budeme postupovat od posledního sloupce až ke druhému.

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x_2-x_1 & x_2^2-x_1x_2 & \dots & x_2^{n-2}-x_1x_2^{n-3} & x_2^{n-1}-x_1x_2^{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n-x_1 & x_n^2-x_1x_n & \dots & x_n^{n-2}-x_1x_n^{n-3} & x_n^{n-1}-x_1x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

Nyní uděláme Laplaceův rozvoj podle prvního řádku a jednotlivé prvky determinantu upravíme vytýkáním.

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = \det\begin{pmatrix} x_2-x_1 & x_2(x_2-x_1) & \dots & x_2^{n-3}(x_2-x_1) & x_2^{n-2}(x_2-x_1) \\ x_3-x_1 & x_3(x_3-x_1) & \dots & x_3^{n-3}(x_3-x_1) & x_3^{n-2}(x_3-x_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_n-x_1 & x_n(x_n-x_1) & \dots & x_n^{n-3}(x_n-x_1) & x_n^{n-2}(x_n-x_1) \end{pmatrix}$$

Vytknemeli z každého řádku, zůstane nám determinant, který je Vandermondův determinant řádu $n-1$ s parametry $x_2,\dots,x_n$.

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = (x_2-x_1)\,(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\,\det\begin{pmatrix} 1 & x_2 & \dots & x_2^{n-3} & x_2^{n-2} \\ 1 & x_3 & \dots & x_3^{n-3} & x_3^{n-2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^{n-3} & x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

A tedy

$$V_n(x_1,x_2,\dots,x_n) = (x_2-x_1)\,(x_3-x_1)\dots(x_n-x_1)\,V_{n-1}(x_2,\dots,x_n)$$

Tím jsme získali rekurentní formuli, která platí pro $n > 1$. Indukcí teď snadno nahlédneme výsledné řešení.

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)\dots(x_n - x_1)(x_3 - x_2)\dots(x_n - x_2)\dots\dots(x_n - x_{n-1})$$

$$V_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{1 \le j < i \le n} (x_i - x_j)$$

Cvičení

1. Spočtěte počet inverzí v dané permutaci:
   (a) $(2, 1, 7, 9, 8, 6, 5, 3, 4)$
   (b) $(9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1)$
2. Určete paritu následujících permutací:
   (a) $(4, 6, 1, 5, 3, 2)$
   (b) $(6, 3, 1, 2, 4, 5)$
   (c) $(3, 7, 6, 2, 4, 1, 5)$
   (d) $(4, 1, 3, 7, 2, 5, 6)$
3. Určete x, y tak, aby pořadí
   (a) $(1, 2, 7, 4, x, 5, 6, y, 9)$ bylo sudé.
   (b) $(5, 1, y, 8, 9, 4, x, 6, 3)$ bylo liché.
4. Zjistěte paritu následujících permutací.
   (a) $(n, n-1, \dots, 2, 1)$
   (b) $(1, 3, 5, \dots, 2n-3, 2n-1, 2, 4, \dots, 2n)$
   (c) $(2, 4, 6, \dots, 2(n-1), 2n, 1, 3, \dots, 2n-1)$
   (d) $(2, 5, 8, \dots, 3n-1, 1, 4, 7, \dots, 3n-2, 3, 6, 9, \dots, 3n)$
   (e) $(2, 1, 4, 3, \dots, 2n, 2n-1)$
5. Rozhodněte, zda se daný součin vyskytuje v determinantu matice A řádu n.
   (a) $n = 6$, $a_{31}\, a_{43}\, a_{14}\, a_{52}\, a_{66}\, a_{25}$
   (b) $n = 8$, $a_{72}\, a_{17}\, a_{43}\, a_{21}\, a_{64}\, a_{35}\, a_{56}$
6. Určete všechny členy determinantu matice A řádu 4, které obsahují prvky a_{12}, a_{34}.

7. Spočtěte determinant matice podle definice.

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -4 \\ 1 & 3 & 2 \\ -2 & -4 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 4 \\ -1 & 3 & -2 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & -3 & 5 \\ -3 & 2 & -8 \\ 1 & -7 & -5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 1 & -i & 1+i \\ -i & 1 & 0 \\ 1-i & 0 & i \end{pmatrix}$$

8. Spočtěte determinant úpravou na schodovitý tvar.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & -2 \\ -3 & -5 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & -2 & -4 \\ -1 & 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} -3 & 9 & 3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 & 7 \\ 4 & -5 & -3 & -2 \\ 7 & -8 & -4 & -5 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 2 & -1 \\ -4 & 3 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -2 & 1 & -2 \\ 2 & 2 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 2 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -3 & 2 & -5 & 13 \\ 1 & -2 & 10 & 4 \\ -2 & 9 & -8 & 25 \end{pmatrix} \qquad J = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 & 3 \\ -1 & -1 & 4 & 3 \\ -3 & 0 & -8 & -13 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 9 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & -2 & 6 & 6 \\ 7 & 8 & 9 & -1 & -6 \\ 1 & -1 & -2 & 4 & 5 \\ -7 & 0 & -9 & 2 & -2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 4 & 4 & -1 & 0 & -1 & 8 \\ 2 & 3 & 7 & 5 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 5 & 7 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 7 & 6 & 6 & 5 & 7 \\ 2 & 1 & 1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 5 & -4 \\ 3 & 1 & 2 & 9 & 8 \\ -1 & 7 & -3 & 8 & -9 \\ 3 & 4 & 2 & 4 & 7 \\ 1 & 8 & 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} -5 & -7 & -2 & 2 & -2 & 16 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -5 & 0 \\ 2 & 0 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 6 & 4 & 6 & -1 & 15 & -5 \\ 5 & -4 & 10 & 1 & 14 & 6 \\ 3 & 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

$$O = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 5 & 4 \\ 2 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \qquad P = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & -2 & 1 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 2 & 3 & -6 & -3 \end{pmatrix}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 5 \\ 4 & -3 & 2 & -4 \\ 5 & -2 & -3 & -7 \\ -3 & 4 & 2 & 9 \end{pmatrix} \qquad R = \begin{pmatrix} 6 & 3 & 8 & -4 \\ 5 & 6 & 4 & 2 \\ 0 & 3 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}$$

9. Spočtěte determinant matice pouze užitím Laplaceovy věty a definice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 7 & 3 \\ 1 & 0 & 4 & 0 & 9 & 0 \\ 8 & 1 & 5 & 3 & 7 & 6 \\ 9 & 1 & 5 & 4 & 3 & 8 \\ 1 & 0 & 7 & 0 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

10. Spočtěte determinant řádu $n > 1$.

$$A = \begin{pmatrix} a & x & x & \dots & x & x \\ x & a & x & \dots & x & x \\ x & x & a & \dots & x & x \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x & x & x & \dots & x & a \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} x & y & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y \\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} a_0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & a_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_n \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} a_0 & -1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_2 & 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ -y_1 & x_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -y_2 & x_2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ y & 0 & 0 & \dots & -y_n & x_n \end{pmatrix}$$

11. Spočtěte determinant matice řádu $n > 1$ úpravou na schodovitý tvar

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ a_2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_3 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & a-1 & a \\ -1 & 0 & 3 & \dots & a-1 & a \\ -1 & -2 & 0 & \dots & a-1 & a \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ -1 & -2 & -3 & \dots & -a+1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 3 & 2 \\ 2 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 3 & 2 & 2 & \dots & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 1-n & 1 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1-n & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1-n & \dots & 1 & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1 & 1-n \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & n & n & \dots & n & n \\ n & 2 & n & \dots & n & n \\ n & n & 3 & \dots & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} x_1 & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1(n-1)} & a_{1n} \\ x_1 & x_2 & a_{23} & \dots & a_{2(n-1)} & a_{2n} \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & a_{2(n-1)} & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ x_1 & x_2 & x_3 & \dots & x_{n-1} & x_n \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 & 1 & 1 \\ a_1 & \dots & a_1 & a_1 - b_1 & a_1 \\ a_2 & \dots & a_2 - b_2 & a_2 & a_2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_n - b_n & \dots & a_n & a_n & a_n \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n-2 & n-1 & n \\ 2 & 3 & 4 & \dots & n-1 & n & n \\ 3 & 4 & 5 & \dots & n & n & n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ n & n & n & \dots & n & n & n \end{pmatrix}$$

$$I = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 + b_1 & a_2 & \dots & a_n \\ 1 & a_1 & a_2 + b_2 & \dots & a_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_1 & a_2 & \dots & a_n + b_n \end{pmatrix}$$

12. Odvoďte rekurentní vztah pro výpočet determinantu matice.

$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 \end{pmatrix} \qquad B_n = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 3 & 2 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 3 \end{pmatrix}$$

$$C_n = \begin{pmatrix} 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 4 & 5 & 2 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 3 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad D_n = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 3 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 5 & 3 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 5 & 3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 5 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

$$E_n = \begin{pmatrix} 7 & 5 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 2 & 7 & 5 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 7 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & 7 \end{pmatrix} \qquad F_n = \begin{pmatrix} x+1 & x & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x+1 & x & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & x+1 \end{pmatrix}$$

$$G_{2n} = \begin{pmatrix} x & 0 & \dots & 0 & y \\ 0 & x & \dots & y & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & y & \dots & x & 0 \\ y & 0 & \dots & 0 & x \end{pmatrix} \qquad H_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

13. Řešte rovnici:

(a) $\det \begin{pmatrix} x-1 & -3 \\ 2-x & 5 \end{pmatrix} = 3$ (b) $\det \begin{pmatrix} \sin x & -3\cos x \\ \cos x & \sin x \end{pmatrix} = 2\sin^2 - \frac{x}{2}$

14. Spočtěte determinant (užijte postupu z úlohy 5).

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 4 & 8 \\ 1 & -2 & 4 & -8 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 3 & -1 \\ 4 & 1 & 4 & 9 & 1 \\ 8 & 1 & -8 & 27 & -1 \\ 16 & 1 & 16 & 81 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ x_1+1 & x_2+1 & \dots & x_n+1 \\ x_1^2+x_1 & x_2^2+x_2 & \dots & x_n^2+x_n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_1^{n-1}+x_1^{n-2} & x_2^{n-1}+x_2^{n-2} & \dots & x_n^{n-1}+x_n^{n-2} \end{pmatrix}$$

15. Laplaceovým rozvojem podle třetího sloupce spočtěte determinant matice

$$A = \begin{pmatrix} x & -1 & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & 0 \\ 0 & 0 & x & -1 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \end{pmatrix}.$$

16. Vyjádřete polynom stupně n pomocí determinantu stupně $n-1$. (Využijte výsledku předchozího příkladu.)

2. BILINEÁRNÍ A KVADRATICKÉ FORMY

Teorie

2.1. Definice. Nechť V je vektorový prostor nad polem K. *Bilineární forma* na V je zobrazení $f : V \times V \to K$ takové, že pro všechna $a, b, c, d \in K$ a $u, v, w \in V$ platí:

$$f(au + bv, w) = af(u, w) + bf(v, w)$$

$$f(u, cv + dw) = cf(u, v) + df(u, w)$$

.

2.2. Definice. Nechť $f : V \times V \to K$ je bilineární forma a $\alpha = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ je báze prostoru V. Pak tato báze určuje *matici bilineární formy* $A = (a_{ij}) = (f(v_i, v_j))$.

2.3. Věta. *Nechť f je bilineární forma na V s maticí A v bázi α. Nechť souřadnice vektorů $u, v \in V$ v této bázi jsou $x, y \in K^n$. Pak pro libovolné vektory platí $f(u, v) = x^T \cdot A \cdot y$.*

2.4. Věta. *Je-li A matice bilineární formy v bázi α, pak matice bilineární formy v bázi β je $B = (id)^T_{\alpha,\beta} \cdot A \cdot (id)_{\alpha,\beta}$, kde $(id)_{\alpha,\beta}$ je matice přechodu od báze β k bázi α .*

2.5. Definice. Dvě čtvercové matice $A, B \in Mat_n(K)$ se nazývají *kongruentní*, jestliže existuje regulární matice $P \in Mat_n(K)$ taková, že $B = P^T \cdot A \cdot P$.

2.6. Definice. Bilineární forma se nazývá *symetrická*, jestliže $f(u, v) = f(v, u)$, resp. *antisymetrická*, jestliže $f(u, v) = -f(v, u)$.

2.7. Věta. *Nechť f je bilineární forma a A její matice v nějaké bázi α. Pak f je symetrická, je-li matice A symetrická, a f je antisymetrická, je-li matice A antisymetrická.*

2.8. Věta. *Každá bilineární forma je součtem symetrické a antisymetrické bilineární formy, přičemž pro matici platí $A = \frac{1}{2}(A+A^T)+\frac{1}{2}(A-A^T)$, kde první sčítanec odpovídá symetrické části a druhý antisymetrické části.*

2.9. Věta. *Každá symetrická matice $A \in Mat_n(K)$ je kongruentní s nějakou diagonální maticí.*

2.10. Algoritmus. *Diagonalizace symetrických matic.*
Hledáme regulární matici P tak, aby matice $P^T \cdot A \cdot P$ byla diagonální.

Předpokládejme, že $a_{11} \neq 0$, pak na A provádíme elementární řádkové úpravy (označíme EŘO) tak, aby $a_{i1} = 0$ pro $i = 2, \dots, n$. Současně provádíme stejné sloupcové úpravy (označíme ESO)a tím dosáhneme u symetrické matice toho, že výsledná matice má $a_{1j} = 0$ pro $j = 2, \dots, n$. Provedení sloupcové úpravy na matici A odpovídá vynásobení této matice zprava maticí P_1, která vznikne z matice jednotkové provedením stejné sloupcové úpravy.

Analogicky řádkové úpravě odpovídá vynásobení matice A zleva maticí P_1^T. Provedením stejné řádkové i sloupcové úpravy na matici A dostáváme matici $P_1^T \cdot A \cdot P_1$, která je kongruentní s maticí A. Stejný postup uplatňujeme na další řádky a sloupce.
Je-li $a_{11} = 0$ a nějaké $a_{ii} \neq 0$ provedeme výměnu řádku 1 a i a sloupce 1 a i.
Je-li $a_{11} = a_{22} = \cdots = a_{nn} = 0$ a existuje $a_{ij} \neq 0$ přičteme k řádku i řádek j a k sloupci i sloupec j.
Po všech těchto úpravách dostaneme diagonální matici

$$P_k^T \dots P_2^T \cdot P_1^T \cdot A \cdot P_1 \cdot P_2 \dots P_k = (P_1 \cdot P_2 \dots P_k)^T \cdot A \cdot (P_1 \cdot P_2 \dots P_k) = P^T \cdot A \cdot P,$$

která je diagonální s původní maticí A.

Ve výpočtech postupujeme tak, že si napíšeme blokovou matici, jejíž levý blok je tvořen maticí A a pravý blok jednotkovou maticí E. Pak v levém bloku provádíme EŘO a odpovídající ESO dokud nedostaneme diagonální matici. Zároveň provádíme v pravém bloku stejné úpravy jako v levém, ale pouze řádkové. Pak dostáváme v pravém bloku matici P^T.

$$(A \,|\, E) \to \left(P^T \cdot A \cdot P \,|\, P^T \cdot E\right)$$

2.11. Definice. Zobrazení $F : V \to K$ se nazývá *kvadratická forma*, jestliže existuje bilineární forma $f : V \times V \to K$ taková, že pro všechna $u \in V$ platí $F(u) = f(u, u)$.

2.12. Věta. *Nechť F je kvadratická forma na vektorovém prostoru V. Pak existuje právě jedna symetrická bilineární forma, která ji určuje.*

2.13. Definice. *Maticí kvadratické formy F* nazveme matici symetrické bilineární formy, která tuto kvadratickou formu určuje.

2.14. Věta. *(Sylvestrův zákon setrvačnosti) Každou kvadratickou formu F na reálném vektorovém prostoru R^n lze vyjádřit ve vhodné bázi (tuto bázi budeme dále nazývat kanonická báze) ve tvaru*

$$F(x) = x_1^2 + \cdots + x_p^2 - x_{p+1}^2 - \cdots - x_r^2 + 0x_{r+1}^2 + \cdots + 0x_n^2$$

přičemž počet čísel +1, -1, 0 je nezávislý na volbě báze.

2.15. Definice. *Signatura* kvadratické formy F na reálném vektorovém prostoru R^n je trojice nezáporných čísel (s_+, s_-, s_0), kde s_+ je počet kladných, s_- počet záporných a s_0 počet nulových členů v diagonálním tvaru kvadratické formy.

2.16. Definice. Nechť F je kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru R^n. Řekneme, že F je

1. *pozitivně definitní*, jestliže pro každý $x \in R^n$, $x \neq o$ je $F(x) > 0$
2. *pozitivně semidefinitní*, jestliže pro každý $x \in R^n$, $x \neq o$ je $F(x) \geq 0$
3. *negativně definitní*, jestliže pro každý $x \in R^n$, $x \neq o$ je $F(x) < 0$
4. *negativně semidefinitní*, jestliže pro každý $x \in R^n$, $x \neq o$ je $F(x) \leq 0$
5. *indefinitní*, jestliže existují vektory z, $y \in R^n$ takové, že $F(y) > 0$ a $F(z) < 0$.

2.17. Věta. *Nechť F je kvadratická forma na reálném vektorovém prostoru R^n. Pak*

1. *F je pozitivně definitní, právě tehdy když $s_+ = n$;*
2. *F je pozitivně semidefinitní, právě tehdy když $s_- = 0$;*
3. *F je negativně definitní, právě tehdy když $s_- = n$;*
4. *F je negativně semidefinitní, právě tehdy když $s_+ = 0$;*

2.18. Věta. *Kvadratická forma je pozitivně definitní, právě když všechny hlavní minory její matice jsou kladné.*
Kvadratická forma je negativně definitní, právě když pro hlavní minory její matice platí $(-1)^i \det(A_i) > 0$.

2.19. Definice. *Kvadrikou* nazveme množinu

$$\left\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in K^n, \sum_{i,j} a_{ij} x_i x_j + \sum_i b x_i + c = 0\right\}.$$

Řešené příklady

Úloha 1: Kvadratickou formu

$$F(x) = x_1 x_2 + x_2 x_3$$

zadanou ve standardních souřadnicích převeďte pomocí ESO a EŘO na diagonální tvar.

Řešení: Napíšeme si vpravo jednotkovou matici a vlevo matici dané kvadratické formy. Na matici A kvadratické formy provádíme řádkové a tytéž sloupcové úpravy, dokud nedostaneme diagonální tvar matice, na jednotkové matici přitom provádíme tytéž úpravy, ale vždy jen řádkové (viz. poznámka 2.10.).

$$\begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & | & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & | & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 & | & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Nejdříve druhý řádek přičteme k prvnímu, protože $a_{11} = 0$, tutéž úpravu provedeme také na pravé matici, pak provedeme stejnou operaci se sloupci, ale to už pouze na levé matici.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Tak jsme dostali na pravé straně opět symetrickou matici, ale $a_{11} \neq 0$, dále vynulujeme pomocí prvku a_{11} zbylé prvky prvního řádku a sloupce tak, že přičteme $-\frac{1}{2}$ násobek prvního řádku nejprve k druhému a pak ke třetímu řádku, a pak provedeme odpovídající sloupcovou úpravu, ale pouze na levé matici.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 1 \end{array}\right)$$

Dále přičteme druhý řádek k třetímu a provedeme odpovídající sloupcovou úpravu.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \equiv \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Dostáváme tedy diagonální tvar kvadratické formy $F(y) = y_1^2 - \frac{1}{4}y_2^2$.
Levá matice je $(id)^T_{\alpha,\beta}$ a její řádky nám udávají bázi, ve které má daná kvadratická forma tento tvar:

$$\alpha : \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right]$$

Úloha 2: Najděte diagonální tvar kvadratické formy

$$F(x) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3$$

zadané ve standardních souřadnicích v R^3 pomocí algoritmu doplnění na čtverce.

Řešení: Všechny smíšené členy obsahující x_1 připojíme k členu x_1^2 a doplníme na čtverec. Pak všechny smíšené členy obsahující x_2 připojíme k členu x_2^2 a opět doplníme na čtverec.

$$F(x) = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2x_2x_3 + x_3^2 + 10x_2x_3 =$$

$$= (x_1 - x_2 + x_3)^2 - x_2^2 + 12x_2x_3 = (x_1 - x_2 + x_3)^2 - (x_2 - 6x_3)^2 + 36x_3^2$$

nyní můžeme zavést nové souřadnice:

$$\begin{array}{rcrrr} y_1 & = & x_1 & -x_2 & +x_3 \\ y_2 & = & & x_2 & -6x_3 \\ y_3 & = & & & x_3 \end{array}$$

diagonální tvar je:

$$F(y) = y_1^2 - y_2^2 + 36y_3^2$$

$$\mathrm{id}_{\alpha,\epsilon} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Hledáme matici inverzní k této matici přechodu a dostáváme

$$\mathrm{id}_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sloupce této matice udávají vektory báze, ve které má matice diagonální tvar.

$$\alpha : \left[\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

Úloha 3: Zjistěte jakou kuželosečku popisuje rovnice

$$k : x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 + 1 = 0\,.$$

Řešení: Použijeme metodu doplnění na čtverce; nejprve bereme v úvahu pouze kvadratické členy

$$(x_1 + 2x_2)^2 - 4x_2^2 + x_2^2 + 2x_1 + 1 = 0$$

transformujeme souřadnice:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 + 2x_2 \\ y_2 &= x_2\,. \end{aligned}$$

Odtud spočítáme $x_1 = y_1 - 2y_2$, po transformaci dostáváme

$$y_1^2 - 3y_2^2 + 2y_1 - 4y_2 + 1 = 0$$

a nyní opět doplňujeme na čtverce

$$(y_1 + 1)^2 - 3\left(y_2^2 + \frac{4}{3}y_2\right) = 0$$

$$(y_1 + 1)^2 - 3\left(y_2 + \frac{2}{3}\right)^2 + \frac{4}{3} = 0$$

$$\frac{3}{4}(y_1 + 1) - \frac{9}{4}\left(y_2 + \frac{2}{3}\right) + 1 = 0$$

po další transformaci souřadnic dostáváme:

$$\begin{array}{rcccl} z_1 & = & \frac{\sqrt{3}}{2}(y_1+1) & = & \frac{\sqrt{3}}{2}(x_1+2x_2+1) \\ z_2 & = & \frac{3}{2}(y_2+\frac{2}{3}) & = & \frac{3}{2}(x_2+\frac{2}{3}) \end{array}$$

$$k : z_1^2 - z_2^2 + 1 = 0\,.$$

Jedná se tedy o hyperbolu, jejíž střed S je dán $z_1 = 0$ a $z_2 = 0$, v původních souřadnicích

$$x_2 = -\frac{2}{3}\,,$$

$$x_1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}\,.$$

Tedy $S = \left(\frac{1}{3}, -\frac{2}{3}\right)^T$. Nyní ještě najdeme bázi pro nové souřadnice. Víme

$$(id)_{\alpha,\epsilon} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & \sqrt{3} \\ 0 & \frac{3}{2} \end{pmatrix}.$$

Inverzní matice k této matici je

$$(id)_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{2\sqrt{3}}{3} & -\frac{4}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

a její sloupce nám určují vektory báze $\alpha : [v_1, v_2]$, kde $v_1 = \left(\frac{2\sqrt{3}}{3}, 0\right)$ a $v_2 = \left(-\frac{4}{3}, \frac{2}{3}\right)$. Pro souřadnice libovolného bodu tedy platí

$$x = S + (id)_{\epsilon,\alpha} \cdot z\,.$$

Úloha 4: Najděte nějakou kvadratickou formu F hodnosti 5 na vektorovém prostoru R^5 v analytickém vyjádření vzhledem ke kanonické bázi, která je pozitivně definitní na podprostoru generovaném vektory $(1,1,0,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(0,-1,0,0,0)$ a je negativně definitní na podprostoru generovaném vektory $(0,0,-1,0,0)$, $(0,0,1,0,1)$.

Řešení: Podle Sylvestrova zákona setrvačnosti (věta 2.14.) má kvadratická forma F vzhledem ke kanonické bázi tvar

$$F(x) = a_1x_1^2 + a_2x_2^2 + a_3x_3^2 + a_4x_4^2 + a_5x_5^2\,,$$

kde a_i, $i = 1 \dots 5$ nabývají hodnot $+1$, -1, 0. Přičemž kvadratická forma je pozitivně definitní na nějakém podprostoru, pokud pro všechny vektory x z tohoto podprostoru platí $F(x) > 0$.

Jde vidět, že podprostor generovaný vektory $(1,1,0,0,0)$, $(0,0,0,1,0)$, $(0,-1,0,0,0)$ je vlastně podprostor vektorů tvaru $(a,b,0,c,0); a,b,c \in R$. A tedy

$$F(a,b,0,c,0) > 0\,.$$

Z toho plyne $a_1 = 1$, $a_2 = 1$ a $a_4 = 1$.

Analogicky podprostor generovaný vektory $(0,0,-1,0,0)$, $(0,0,1,0,1)$ je podprostor vektorů tvaru $(0,0,e,0,f); e,f \in R$. Má-li být na tomto podprostoru kvadratická forma negativně definitní, musí platit

$$F(0,0,e,0,f) < 0$$

Z toho plyne $a_3 = -1$, $a_5 = -1$.

Kvadratická forma má tedy tvar

$$x_1^2 + x_2^2 - x_3^2 + x_4^2 - x_5^2 = 0\,.$$

Cvičení

1. Nechť je na R^4 dána bilineární forma f souřadnicovým vyjádřením vzhledem ke standardní bázi
$$f(x,y) = -x_1y_2 + x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_4 - x_3y_4 + x_4y_3\,.$$
Určete matici v bázi ϵ a hodnost formy.

2. Pro bilineární formu zadanou ve standardní bázi $f(x,y) = x_1y_1 - 2x_2y_2 + 3x_1y_2$ na R^2 určete její souřadnicové vyjádření a matici v nové bázi $v_1 = (3,-1)^T$, $v_2 = (1,-1)^T$.

3. Ve standardní bázi na R^3 je dána bilineární forma
$$f(x,y) = x_1y_1 + 2x_2y_2 + 2x_2y_3$$
Určete matici bilineární formy v bázi $v_1 = (1,0,1)^T$, $v_2 = (0,1,1)^T$, $v_3 = (1,1,0)^T$.

4. Pro bilineární formu z příkladu 1 určete symetrickou a antisymetrickou bilineární formu f_S a f_A, pro které platí $f = f_S + f_A$.

5. Pro bilineární formu na R^3 určete symetrickou a antisymetrickou bilineární formu f_S a f_A, pro které platí $f = f_S + f_A$.
   (a) $f(x,y) = 2x_1y_1 + 4x_1y_2 - 2x_1y_3 + x_2y_2 - x_2y_3 + x_3y_2 + x_3y_3$
   (b) $f(x,y) = 2x_1y_2 + 4x_2y_3 + 6x_3y_1$

6. Najděte nějakou bázi symetrické bilineární formy f na vektorovém prostoru R^3, ve které má tato forma diagonální tvar. Analytické vyjádření f vzhledem ke standardní bázi je
$$f(x,y) = 2x_2y_3 + 2x_3y_2 + x_3y_3$$

7. Najděte nějakou bázi symetrické bilineární formy f na vektorovém prostoru R^3, ve které má tato forma diagonální tvar. Analytické vyjádření f vzhledem ke standardní bázi je
$$f(x,y) = 3x_1y_1 + 2x_2y_2$$

8. Najděte symetrickou bilineární formu, která určuje kvadratickou formu F. F má ve standardní bázi v R^3 rovnici

   (a) $F(x) = 2x_1x_3 - 4x_2x_3$

   (b) $F(x) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_2x_3$

9. Najděte diagonální tvar kvadratické formy F na R^3 a bázi, ve které má forma tento tvar, je-li souřadnicové vyjádření ve standardní bázi
$$F(x) = x_1^2 + x_3^2 - 2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 10x_2x_3\,.$$

10. Najděte diagonální tvar kvadratické formy na R^3 pomocí algoritmu doplnění na čtverce a bázi, ve které má forma tento tvar, je-li souřadnicové vyjádření ve standardní bázi

    (a) $F(x) = 4x_1^2 + 2x_2^2 + 15x_3^2 + 4x_1x_2 - 4x_1x_3 - 8x_2x_3$

    (b) $F(x) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$

11. Zjistěte vlastnosti reálných kvadratických forem, např. definitnost a signaturu, jestliže jejich souřadnicové vyjádření vzhledem ke standardní bázi je

    (a) $F(x) = x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2$, na R^2

    (b) $F(x) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3$, na R^3

    (c) $F(x) = -2x_1^2 - 8x_2^2 - 3x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 - 2x_2x_3$, na R^3

12. Najděte diagonální tvar kvadratické formy na R^3 a zjistěte, zda je pozitivně definitní
$$F(x) = x_1x_2 + x_2x_3 + 3x_1x_3$$

13. Ve standardní bázi na R^3 je dána kvadratická forma. Určete její signaturu.

    (a) $F(x) = x_1x_3$

    (b) $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + 3x_3^2 + 4x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3$

    (c) $F(x) = x_1^2 - 2x_2^2 + x_3^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_2x_3$

14. V nějaké bázi na reálném vektorovém prostoru R^4 je dána kvadratická forma F. Určete její diagonální tvar, definitnost, signaturu.

    (a) $F(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 + 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + 2x_1x_4 + 4x_2x_3 + 4x_2x_4 + 2x_3x_4$

    (b) $F(x) = 3x_3^2 + 2x_4^2 + 4x_1x_4 + 4x_2x_3 + 2x_2x_4 + 2x_3x_4$

(c) $F(x) = x_1x_3 + x_1x_4$

15. Uvažme bilineární formu zadanou ve standardní bázi

$$f(x, y) = 2x_1y_1 - 4x_1y_2 - 3x_2y_2 + 2x_2y_3 - 4x_3y_2 - x_3y_3$$

definivanou na C^3. Nechť $F(x)$ je jí definovaná kvadratická forma, napište analytické vyjádření F a najděte diagonální tvar F.

16. Najděte všechny hodnoty parametru a, pro které je kvadratická forma F na R^3 pozitivně definitní (použijte Sylvestrovo kritérium).

(a) $F(x) = x_2^2 + x_3^2 + 4ax_1x_2 + a^2x_1x_3$

(b) $F(x) = ax_1^2 + ax_2^2 + (a-3)x_3^2 + 2x_1x_2 + 2ax_1x_3 + 2x_2x_3$

17. Zjistěte jakou kuželosečku popisuje rovnice

$$k : 5x_1^2 + 9x_2^2 + 12x_1x_2 - 6x_2 + 4 = 0$$

a převeďte na diagonální tvar.

18. Zjistěte jakou kuželosečku popisují rovnice, převeďte na diagonální tvar, případně určete její střed

(a) $k : x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1 + 3x_2 - 2 = 0$

(b) $k : 2x_1^2 - 3x_2^2 + 5x_1x_2 + x_1 + 10x_2 - 3 = 0$

(c) $k : x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 + 1 = 0$

(d) $k : 3x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_1x_2 + 4x_1 + 4x_2 - 4 = 0$

(e) $k : x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 + 3 = 0$

(f) $k : x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - x_1 - x_2 = 0$

(g) $k : x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2 + 3 = 0$

(h) $k : 4x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_1x_2 - 2x_1 - 4x_2 + 3 = 0$

(i) $k : x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_1x_2 + 6x_1 + 8x_2 - 9 = 0$

(j) $k : x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 + 2x_1 + 2x_2 - 4 = 0$

19. Najděte nějakou kvadratickou formu F hodnosti 6 na vektorovém prostoru R^7 v analytickém vyjádření vzhledem ke kanonické bázi, která je pozitivně definitní na podprostoru generovaném vektory $(-1, 0, 0, 0, 0, 1, 0)$, $(0, 0, 1, 0, 0, 0, 0)$, $(0, 0, 0, 0, 0, -1, 0)$ a je negativně definitní na podprostoru generovaném vektory $(0, 1, 0, -1, 0, 0, 1)$, $(0, -1, 0, 0, 0, 0, 1)$, $(0, 0, 0, 1, 0, 0, 0)$.

20. Najděte nějakou kvadratickou formu F hodnosti 6 na vektorovém prostoru R^7 v analytickém vyjádření vzhledem ke kanonické bázi, která je pozitivně definitní na podprostoru generovaném vektory $(-1,0,0,0,0,0,0)$, $(-1,0,1,0,0,0,0)$, $(-1,0,1,0,1,0,0)$ a je negativně definitní na podprostoru generovaném vektory $(0,1,0,0,0,0,0)$, $(0,-1,0,0,0,0,1)$, $(0,1,0,0,0,1,0)$.

21. Nechť $Mat_2(R)$ je vektorový prostor všech matic řádu 2 a nechť $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \in Mat_2(R)$. Dokažte, že zobrazení $f : Mat_2(R) \times Mat_2(R) \to R$ definované předpisem $f(A,B) = tr(A \cdot M \cdot B)$, pro $\forall A, B \in Mat_2(R)$ (tr znamená stopu matice, tj. součet prvků na hlavní diagonále) je bilineární forma. Pak najděte matici této bilineární formy v bázi α.

$$\alpha : \left[\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right]$$

3. SKALÁRNÍ SOUČIN

Teorie

3.1. Definice. Nechť V je vektorový prostor nad polem K. Pak *skalární součin* na V je bilineární symetrická forma, tj. zobrazení $\langle\ \ ,\ \ \rangle : V \times V \to K$ takové, že $\langle x, x\rangle > 0$ pro $x \in V$, $x \neq o$. (To znamená, že příslušná kvadratická forma je pozitivně definitní.)
Reálný vektorový prostor se skalárním součinem nazýváme *euklidovský prostor*.

3.2. Definice. Nechť R^n je vektorový prostor. Definujeme skalární součin pro $x, y \in R^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ jako $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$. Takto definovaný skalární součin nazýváme *standardní skalární součin*.
Euklidovský vektorový prostor R^n se standardním skalárním součinem budeme značit E_n.

3.3. Definice. *Velikost (norma) vektoru* v v euklidovském prostoru V je číslo $\|v\| = \sqrt{\langle v, v\rangle}$.

3.4. Věta. *(Cauchyova-Schwartzova nerovnost) Pro každé dva vektory v euklidovském prostoru V platí*

$$|\langle u, v\rangle| \leq \|u\|\,\|v\|$$

.

3.5. Definice. Nechť V je euklidovský prostor, $u, v \in V$. *Úhel*, který vektory u a v svírají je číslo $\alpha \in \langle 0, \pi\rangle$ takové, že

$$\cos\alpha = \frac{\langle u, v\rangle}{\|u\|\,\|v\|}$$

.

3.6. Definice. Dva vektory $u, v \in V$, kde V je euklidovský prostor, nazveme *kolmé (ortogonální)*, pokud $\langle u, v\rangle = 0$.
Dva vektory $u, v \in V$, nazveme *ortonormální*, pokud jsou ortogonální (tj. $\langle u, v\rangle = 0$) a pokud jejich velikost je rovna jedné (tj. $\|u\| = 1 \wedge \|v\| = 1$).

3.7. Věta. *Nechť V je euklidovský prostor a $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ jsou po dvou ortogonální vektory různé od nulového. Pak jsou tyto vektory lineárně nezávislé.*

3.8. Definice. Bázi tvořenou ortogonálními vektory nazveme *ortogonální báze.* Bázi tvořenou ortonormálními vektory nazveme *ortonormální báze.*

3.9. Věta. *Nechť V je euklidovský prostor a $u_1, u_2, \ldots, u_k \in V$ libovolné vektory. Pak existují ortogonální vektory $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$, které generují tentýž prostor jako vektory $u_1, u_2, \ldots, u_k$, to znamená*

$$[u_1, u_2, \ldots, u_k] = [v_1, v_2, \ldots, v_k]\,.$$

Algoritnus, s jehož pomocí lze nalézt vektory $v_1, v_2, \ldots, v_k$ se nazývá Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces a je popsán v úloze 1.

3.10. Definice. Řekneme, že množiny $A, B \subseteq V$ jsou *ortogonální množiny (ozn. $A \perp B$)* jestliže

$$\forall u \in A, \forall v \in B : \langle u, v \rangle = 0$$

.

3.11. Definice. *Ortogonální doplňek množiny* A v euklidovském vektorovém prostoru V nazveme množinu

$$A^{\perp} = \{u \in V : \langle u, v \rangle = 0, \forall v \in A\}$$

.

3.12. Definice. Nechť V je euklidovský prostor a $U \subseteq V$ je vektorový podprostor ve V. *Kolmá projekce vektoru $v \in V$ do U* je vektor $Pv \in U$ takový, že $v - Pv \perp U$.

3.13. Věta. Nechť V je euklidovský prostor a $U \subset V$ je podprostor. Potom $U \oplus U^{\perp} = V$.

Řešené příklady

Úloha 1: Použijte Grammův-Schmidtův ortogonalizační proces na bázi $\alpha : u_1 = (2, 0, -1)^T$, $u_2 = (-1, 1, 1)^T$, $u_3 = (1, 1, 1)^T$ vektorového prostoru E_3.

Řešení: Budeme hledat ortogonální bázi $\beta : [v_1, v_2, v_3]$
1) Za v_1 zvolíme libovolně jeden ze tří vektorů původní báze α , např.

$$v_1 = u_1$$

a tedy

$$v_1 = (2, 0, -1)^T$$

2) Hledáme druhý vektor báze v_2 ve tvaru

$$v_2 = u_2 + p_1 v_1$$

tuto rovnost skalárně vynásobíme vektorem v_1

$$\langle v_1, v_2 \rangle = \langle v_1, u_2 \rangle + p_1 \langle v_1, v_1 \rangle$$

požadujeme, aby vektory v_1, v_2 byly kolmé, proto skalární součin $\langle v_1, v_2 \rangle = 0$; zbylé skalární součiny můžeme už lehce spočítat $\langle v_1, u_2 \rangle = -3$, $\langle v_1, v_1 \rangle = 5$, pak

$$0 = -3 + 5p_1 \quad \text{z toho plyne} \quad p_1 = \frac{3}{5}$$

a tedy

$$v_2 = (-1,1,1)^T + \frac{3}{5}(2,0,-1)^T$$

$$v_2^0 = \left(\frac{1}{5},1,\frac{2}{5}\right)^T$$

můžeme do báze zvolit libovolný násobek tohoto vektoru, pro snadnější počítání tedy volme

$$v_2 = (1,5,2)^T$$

3) Nyní zbývá najít ještě třetí vektor báze v_3, který musí být kolmý k oběma předchozím vektorům v_1 a v_2; předpokládejme jej ve tvaru

$$v_3 = u_3 + q_1 v_1 + q_2 v_2$$

tuto rovnost nejdříve skalárně vynásobíme vektorem v_1 a pak vektorem v_2, čímž dostáváme soustavu dvou rovnic o dvou neznámých q_1 a q_2

$$\langle v_3, v_1\rangle = \langle u_3, v_1\rangle + q_1\langle v_1, v_1\rangle + q_2\langle v_2, v_1\rangle$$

$$\langle v_3, v_2\rangle = \langle u_3, v_2\rangle + q_1\langle v_1, v_2\rangle + q_2\langle v_2, v_2\rangle$$

z požadavku vzájemné ortogonality všech vektorů báze β plyne

$$0 = 1 + 5q_1 \quad \text{z toho plyne} \quad q_1 = -\frac{1}{5}$$

$$0 = 8 + 30q_2 \quad \text{z toho plyne} \quad q_2 = -\frac{4}{15}$$

tedy

$$v_3^0 = (1,1,1)^T - \frac{1}{5}(2,0,-1)^T - \frac{4}{15}(1,5,2)^T = \left(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{2}{3}\right)^T$$

opět můžeme do báze β zvolit libovolný násobek tohoto vektoru, např.

$$v_3 = (1,-1,2)^T$$

a tedy $\beta = [(2,0,-1)^T,(1,5,2)^T,(1,-1,2)^T]$

Úloha 2: Nechť $W = [(1,-1,1,0,0)^T,(1,0,1,0,1)^T,(1,1,0,-1,1)^T]$ je podprostor v E_5. Najděte ortogonální doplňek $W^\perp$ tohoto podprostoru.

Řešení: Podle definice 3.10. je ortogonální doplněk podprostoru množina všech vektorů kolmých ke všem vektorům zadaného podprostoru. Rozmyslíme-li si tuto definici, je zřejmé, že stačí hledat množinu všech vektorů kolmých k vektorům báze podprostoru W. Označíme si vektory báze postupně v_1, v_2, v_3 a uvažujeme libovolný vektor $x = (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)^T$ takový, že $x \in W^\perp$, pak platí:

$$x \in W^\perp \quad \text{právě když} \quad x \perp v_1 \wedge x \perp v_2 \wedge x \perp v_3$$

a tedy

$$x \in W^\perp \quad \text{právě když} \quad \langle x, v_1 \rangle = 0; \langle x, v_2 \rangle = 0; \langle x, v_3 \rangle = 0$$

$$\text{z toho plyne} \qquad \begin{array}{cccccccc} x_1 & -x_2 & +x_3 & & & = & 0 \\ x_1 & & +x_3 & & +x_5 & = & 0 \\ x_1 & +x_2 & & -x_4 & +x_5 & = & 0 \end{array}$$

dále řešíme tuto soustavu rovnic pro nalezení tvaru vektoru x úpravou na schodovitý tvar pomocí elementárních řádkových úprav

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

zavedeme parametry a, b a dostáváme:

$$x_5 = b; \; x_4 = a; \; x_3 = -a - b; \; x_2 = -b; \; x_1 = a$$

podprostor vektorů x, což je podprostor vektorů kolmých na vektory báze podprostoru W, a tedy ortogonální doplňek podprostoru W, je generován vektory, které dostáváme nezávislou volbou parametrů a a b

$$W^\perp = [(1, 0, -1, 1, 0)^T, (0, -1, -1, 0, 1)^T]$$

Úloha 3: Najděte kolmý průmět vektoru v do podprostoru $W = [w_1, w_2]$ v E_4, kde $w_1 = (1, -1, -1, 2)^T$, $w_2 = (3, 1, 0, 1)^T$, $v = (-2, 2, 2, 5)^T$.

Řešení: Kolmý průmět Pv vektoru v předpokládáme ve tvaru lineární kombinace vektorů báze podprostoru W, do kterého promítáme

$$Pv = a_1 w_1 + a_2 w_2$$

Aby šlo o kolmou projekci, musí být podle definice 3.11. vektor $v - Pv$ kolmý na podprostor W, a tedy musí platit:

$$\begin{array}{ccc} v - Pv & \perp & w_1 \\ v - Pv & \perp & w_2 \end{array}$$

z toho plyne

$$\begin{array}{rrrcl} \langle v, w_1\rangle & -a_1\langle w_1, w_1\rangle & -a_2\langle w_2, w_1\rangle & = & 0 \\ \langle v, w_2\rangle & -a_1\langle w_2, w_1\rangle & -a_2\langle w_2, w_2\rangle & = & 0 \end{array}$$

po vyčíslení skalárních součinů dostáváme:

$$\begin{array}{rrrcl} 8 & -7a_1 & -6a_2 & = & 0 \\ 1 & -6a_1 & -11a_2 & = & 0 \end{array}$$

řešením této soustavy rovnic je $a_1 = 2$ a $a_2 = -1$, tedy

$$Pv = 2(1, 1, -1, 2) - (3, 1, 0, 1) = (-1, 1, -2, 3)$$

Cvičení

1. Zjistěte zda je zobrazení $g : R^2 \times R^2 \to R$ skalární součin
   (a) $g(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$
   (b) $g(x, y) = 4x_1y_1 + 2x_1y_2 + 5x_2y_2$
   (c) $g(x, y) = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 2x_2y_2$
2. Zjistěte, zda je zobrazení $g : R^3 \times R^3 \to R$ skalární součin
   (a) $g(u, v) = 3u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + 2u_2v_2 + u_1v_3 + u_3v_1 + u_3v_3$
   (b) $g(u, v) = 2u_1v_1 - u_1v_2 - u_2v_1 + u_3v_3$
   (c) $g(u, v) = u_1v_1 + 2u_1v_2 - u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_1 + 2u_3v_3$
   (d) $g(u, v) = u_1v_1 + 2u_2v_2 - u_2v_3 - u_3v_2 + 3u_3v_3$
   (e) $g(u, v) = 3u_1v_1 + u_1v_2 + u_2v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$
3. Ve vektorovém prostoru $R_2[x]$ je pro libovolné dva polynomy f, g definováno reálné číslo $\langle f, g\rangle$. Rozhodněte, zda je takto definován skalární součin.
   (a) $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$
   (b) $\langle f, g\rangle = 1$
4. Ve vektorovém prostoru $Mat_{22}(R)$ je pro libovolné vektory $A = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix}$ definováno reálné číslo $\langle A, B\rangle$. Rozhodněte, zda je takto definován skalární součin.
   (a) $\langle A, B\rangle = \det(A.B)$
   (b) $\langle A, B\rangle = \det(A + B)$

(c) $\langle A, B\rangle = a_1b_1 + a_4b_4$

(d) $\langle A, B\rangle = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 + a_4b_4$

5. Zkuste na R^2 najít takový skalární součin, aby vektory u a v byly na sebe kolmé.

   (a) $u = (1, 2)^T$, $v = (2, 3)^T$

   (b) $u = (-5, 2)^T$, $v = (10, -4)^T$

6. Najděte ortogonální bázi podprostoru generovaného vektory $(3, 2, -4, 6)^T$, $(8, 1, -2, -16)^T$, $(5, 12, -14, 5)^T$, $(11, 3, 4, -7)^T$ v euklidovském prostoru E_4.

7. Určete ortogonální bázi podprostoru generovaného vektory $(1, 0, 4, -1)^T$, $(1, -4, 0, 1)^T$, $(-4, 1, 1, 0)^T$ a jeho ortogonálního doplňku v euklidovském prostoru E_4.

8. Gramm-Schmidtovým ortogonalizačním procesem sestrojte ortogonální bázi podprostoru generovaného vektory $(1, 1, -1, -1)^T$, $(1, -1, 1, 1)^T$, $(-1, -2, 0, 1)^T$ v euklidovském prostoru E_4.

9. V euklidovském prostoru V nalezněte ortogonální bázi podprostoru W, je-li:

   (a) $V = E_4$, $W = [(1, 2, 2, -1)^T, (1, 1, -5, 3)^T, (3, 2, 8, -7)^T]$

   (b) $V = E_4$, $W = [(1, 0, 1, 0)^T, (0, 1, 0, -7)^T, (3, -2, 3, 14)^T]$

   (c) $V = E_5$, $W = [(1, 2, 0, 1, 2)^T, (1, 1, 3, 0, 1)^T, (1, 3, -3, 2, 3)^T, (1, -1, 9, -2, -1)^T]$

   (d) $V = E_5$, $W = [(1, -1, 0, 1, 1)^T, (1, -1, 1, 0, -1)^T, (1, -2, -2, 0, 0)^T, (1, -4, 1, 3, 4)^T]$

10. V euklidovském prostoru E_4 jsou dány vektory u, v. Ukažte, že tyto vektory jsou ortogonální a doplňte je na ortogonální bázi celého prostoru. Přitom:

    (a) $u = (1, -2, 2, 1)^T$, $v = (1, 3, 2, 1)^T$

    (b) $u = (2, 3, -3, -4)^T$, $v = (-1, 3, -3, 4)^T$

    (c) $u = (1, 7, 7, 1)^T$, $v = (-1, 7, -7, 1)^T$

11. Najděte ortogonální bázi vektorového prostoru $R_3[x]$ se skalárním součinem definovaným $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^{1} f(t)g(t)dt$. Najděte matici přechodu od nalezené báze α do standardní báze $[1, x, x^2, x^3]$.

12. V euklidovském prostoru E_5 je dán podprostor W. Nalezněte ortogonální bázi ortogonálního doplňku $W^\perp$, je-li:

    (a) $W = \{(r + s + t, -r + t, r + s, -t, s + t); r, s, t \in R\}$

    (b) $W = [(1, -1, 2, 1, -3)^T, (2, 1, -1, -1, 2)^T, (1, -7, 12, 7, -19)^T, (1, 5, -8, -5, 13)^T]$

13. V euklidovském prostoru E_4 nalezněte ortonormální bázi podprostoru vektorů, které jsou ortogonální k vektorům $u = (1, 1, 1, 1)^T$, $v = (1, -1, -1, 1)^T$, $w = (2, 1, 1, 3)^T$.

14. Určete všechny hodnoty parametru $a \in R$, pro které je zadaný vektor u z euklidovského prostoru V normovaný. Přitom:

    (a) $V = E_5$, $u = (a+1, 0, a+2, 0, a+1)^T$

    (b) $V = R_2[x]$, se skalárním součinem $\langle f, g\rangle = \int_0^1 f(t)g(t)dt$, $u = 3x^2 + a$

    (c) $V = R_2[x]$, se skalárním součinem $\langle f, g\rangle = \int_{-1}^1 f(t)g(t)dt$, $u = 3x^2 + a$

15. Najděte ortogonální doplněk podprostoru P generovaného vektory $(-1, 2, 0, 1)^T$, $(3, 1, -2, 4)^T$, $(-4, 1, 2, -4)^T$ v E_4.

16. V euklidovském prostoru E_4 jsou dány podprostory $W = [u_1, u_2, u_3]$ a $S = [v]$, kde $u_1 = (1, 1, 1, 1)^T$, $u_2 = (-2, 6, 0, 8)^T$, $u_3 = (-3, 1, -2, 2)^T$, $v = (1, a, 3, b)^T$.

    (a) Nalezněte ortogonální bázi W.

    (b) Určete hodnoty a, b tak, aby podprostory W, S byly kolmé.

17. Najděte ortogonální průmět vektoru $(1, 2, 3)^T$ do podprostoru generovaného vektory $(-1, 1, 1)^T$, $(1, 1, 1)^T$ v E_3.

18. Nechť je $L = [u, v, w]$ podprostor v E_4. Najděte kolmý průmět vektoru z do $L^\perp$.

    (a) $z = (4, 2, -5, 3)^T$, $u = (5, 1, 3, 3)^T$, $v = (3, -1, -3, 5)^T$, $w = (3, -1, 5, -3)^T$

    (b) $z = (2, 5, 2, -2)^T$, $u = (1, 1, 2, 8)^T$, $v = (0, 1, 1, 3)^T$, $w = (1, -2, 1, 1)^T$

19. V euklidovském prostoru V najděte ortogonální projekci vektoru u do podprostoru W, je-li:

    (a) $V = E_4$, $u = (-2, 2, 2, 5)^T$, $W = [(1, 1, -1, 2)^T, (3, 1, 0, 1)^T, (2, 0, 1, -1)^T]$

    (b) $V = E_4$, $u = (2, 7, -3, -6)^T$, $W = \{(r+s, r+s, -r-3s, 2r+3s); r, s \in R\}$

    (c) $V = E_4$, $u = (1, 2, 3, 4)^T$, $W = [(0, 1, 0, 1)^T]$

    (d) $V = E_4$, $u = (4, -1, -3, 4)^T$, $W = [(1, 1, 1, 1)^T, (1, 2, 2, -1)^T, (1, 0, 0, 3)^T]$

20. Nechť u, v jsou vektory z euklidovského prostoru V. Dokažte, že platí nerovnost $|\,\|u\| - \|v\|\,| \le \|u - v\|$.

21. Dokažte, že pro libovolných n reálných čísel $x_1, x_2, \ldots, x_n$ platí nerovnost

    $$\frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} \le \sqrt{\frac{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}{n}}\,.$$

    (Návod: Použijte Cauchyovu-Schwartzovu nerovnost.)

22. Dokažte, že pro libovolnou spojitou funkci f platí

$$\frac{1}{a-b}\int_a^b f(x)\,dx \leq \sqrt{\frac{1}{a-b}\int_a^b f^2(x)\,dx}\,.$$

(Návod: Použijte Cauchyovu-Schwartzovu nerovnost.)

23. Dokažte, že je-li $2x + 4y = 1$, pro libovolná $x, y \in R$, pak $x^2 + y^2 \geq \frac{1}{20}$.

24. Dokažte, že pro libovolná $x, y, z \in R$ platí nerovnost

$$\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{3}+\frac{z}{6}\right)^2 \leq \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{3}+\frac{z^2}{6}\,.$$

25. Dokažte,že pro libovolná $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$ platí

$$\frac{a_1^2}{a_2}+\frac{a_2^2}{a_3}+\cdots+\frac{a_{n-1}^2}{a_n}+\frac{a_n^2}{a_1} \geq a_1+a_2+\cdots+a_n\,.$$

26. Dokažte,že pro libovolná $a_1, a_2, \ldots, a_n \in R^+$ platí

$$(a_1+a_2+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geq n^2\,.$$

27. Určete velikost výslednice F čtyř komplanárních sil (tj. sil ležících v jedné rovině) F_1, F_2, F_3, F_4 působících z jediného bodu, jestliže velikost každé síly je $10\,N$ a úhel mezi dvěma sousedními silami je

    (a) $\alpha = 30^o$
    (b) $\beta = 45^o$

28. Tři síly F_1, F_2, F_3 působí z jednoho bodu v prostoru. Každé dvě síly svírají stejný úhel α. Velikosti těchto sil jsou $|F_1| = 2\,N$, $|F_2| = 3\,N$, $|F_3| = 4\,N$. Určete úhel α tak, aby velikost výslednice sil byla $F = 5\,N$.

4. EUKLIDOVSKÁ ANALYTICKÁ GEOMETRIE - VZDÁLENOST A ÚHEL

Teorie

4.1. Definice. Nechť A, B jsou body euklidovského prostoru R^n. Pak reálné číslo $\rho(A, B) = \|A - B\|$, tj. velikost vektoru $A - B$, nazýváme *vzdáleností bodů* A a B.

4.2. Definice. Nechť M je podprostor euklidovského prostoru R^n a A bod z tohoto prostoru. Pak, *vzdáleností bodu A od afinního podprostoru M* nazýváme nezáporné reálné číslo $\rho(A, M)$, definované

$$\rho(A, M) = \min\{\|A - B\|,\ B \in M\}$$

.

4.3. Věta. *Nechť M je afinní podprostor v R^m a $B \in M$ je libovolný bod z M, pak vzdálenost bodu $A \in R^n$ od afinního podprostoru M je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A - B$ do ortogonálního doplňku zaměření podprostoru M, tj. do $Z^{\perp}(M)$.*

4.4. Definice. Nechť P, Q jsou podprostory euklidovského prostoru R^n. Pak *vzdáleností podprostorů* P, Q nazýváme nezáporné reálné číslo $\rho(P, Q)$, definované

$$\rho(P, Q) = \min\{\|A - B\|;\ A \in P,\ B \in Q\}$$

.

4.5. Věta. *Nechť P, Q jsou dva afinní podprostory, $A \in P$ je libovolný bod z P a $B \in Q$ libovolný bod z Q , pak vzdálenost podprostorů P a Q je rovna velikosti kolmého průmětu vektoru $A - B$ do $[Z(P) + Z(Q)]^{\perp}$.*

4.6. Definice. Nechť $u, v \in V$ jsou nenulové vektory. Pak *odchylkou jednorozměrných podprostorů* $[u]$, $[v]$ ve V rozumíme reálné číslo ϕ (někdy značíme $\phi(u, v)$), pro které platí:

$$\cos\phi = \frac{|\langle u, v\rangle|}{\|u\|\,\|v\|}, \qquad 0 \le \phi \le \frac{\pi}{2}$$

4.7. Definice. Nechť U, V jsou podprostory euklidovského vektorového prostoru. Pak *odchylku podprostorů* U, V definujeme takto:

(a) Je-li $U \subseteq V$ nebo $V \subseteq U$, pak $\phi(U, V) = 0$.

(b) Je-li $U \cap V = \{o\}$, pak $\phi(U, V) = \min\{\alpha(u, v);\ u \in U,\ v \in V;\ u, v \neq o\}$.

(c) Je-li $U \cap V \neq \{o\}$, pak $\phi(U, V) = \phi(U \cap (U \cap V)^{\perp},\ V \cap (U \cap V)^{\perp})$.

4.8. Věta. *Nechť v je vektor a U je podprostor v euklidovském prostoru R^n. Nechť Pv je ortogonální projekce vektoru v do podprostoru U. Pak odchylka vektorových podprostorů*

U a $[v]$ je

$$\cos\phi(U,[v]) = \cos\phi(v,Pv) = \frac{\|Pv\|}{\|v\|}$$

.

4.9. Věta. *Nechť N_1, N_2 jsou nadroviny v euklidovském vektorovém prostoru R^n, $n \geq 2$ a nechť a je normálový vektor nadroviny N_1 a b je normálový vektor nadroviny N_2. Pak odchylka těchto nadrovin je odchylka jejich normálových vektorů.*

$$\cos\phi(N_1,N_2) = \cos\phi(a,b)$$

4.10. Definice. *Odchylkou dvou afinních podprostorů P, Q* rozumíme odchylku jejich zaměření $Z(P)$, $Z(Q)$.

Řešené příklady

Úloha 1: V euklidovském prostoru E_4 určete vzdálenost roviny $\sigma : (4,1,1,0)+t(1,-1,0,0)+s(2,0,-1,0)$ a přímky $p : (5,4,4,5) + r(0,0,1,-4)$.

Řešení:
1. způsob:
Nejprve najdeme ortogonální doplněk součtu zaměření roviny a přímky

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -4 & 0 \end{array}\right)$$

Zavedeme parametr t, čili $x_4 = t$,pak $x_3 = 4t$, $x_2 = 2t$, $x_1 = 2t$, zvolíme-li např. $t = 1$, dostáváme $[Z(\sigma) + Z(p)]^{\perp} = [(2,2,4,1)^T]$, označme tento vektor u.
Nyní zvolíme libovolné body $A \in \sigma$, $B \in p$, např. $A = (4,1,1,0)^T$, $B = (5,4,4,5)^T$, a označíme vektor $A - B = x = (1,3,3,5)^T$. Podle věty 4.5. je vzdálenost roviny a přímky rovna průmětu vektoru x do podprostoru $[u]$. Hledáme tedy kolmý průmět Px.
Předpokládáme Px ve tvaru:

$$Px = au$$

$$x - Px \perp u \quad \text{z toho plyne} \quad \langle x,u\rangle - a\langle u,u\rangle = 0$$

$$25 - 25a = 0 \quad \text{a tedy} \quad a = 1 \quad \text{pak} \quad Px = u = (2,2,4,1)^T$$

$$\rho(\sigma,p) = \|Px\| = 5$$

2.způsob:
Opět potřebujeme najít ortogonální doplňek součtu zaměření obou podprostorů, který jsme určili v předcházejícím výpočtu $[Z(\sigma) + Z(p)]^{\perp} = [(2,2,4,1)^T]$, označme tento vektor u.

Nyní hledáme body $A_0 \in \sigma$ a $B_0 \in p$ jimiž se vzdálenost $\rho(\sigma, p)$ realizuje. Vektor $A_0 - B_0$ je kolmý k rovině σ i přímce p a tedy $A_0 - B_0 \in [Z(\sigma) + Z(p)]^\perp$, tzn. je lineární kombinací vektoru báze $[Z(\sigma) + Z(p)]^\perp$

$$A_0 - B_0 = ku\,.$$

Dále víme:

$$A_0 = (4,1,1,0) + t(1,-1,0,0) + s(2,0,-1,0)$$

$$B_0 = (5,4,4,5) + r(0,0,1,-4)$$

a tedy $\quad (4,1,1,0)+t(1,-1,0,0)+s(2,0,-1,0)-(5,4,4,5)-r(0,0,1,-4) = k(2,2,4,1)\,.$

Dostáváme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rrrrcl} t & +2s & & -2k & = & 1 \\ -t & & & -2k & = & 3 \\ & -s & -r & -4k & = & 3 \\ & & 4r & -k & = & 5 \end{array}$$

tuto soustavu řešíme užitím Gaussovy eliminace

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -6 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -25 & 25 \end{array}\right)$$

z toho plyne $k = -1$, $r = 1$, $s = 0$, $t = -1$.
A tedy

$$A_0 - B_0 = -1u = (-2,-2,-4,-1)^T \quad \text{z toho plyne}$$

$$\rho(\sigma, p) = \|u\| = 5\,,$$

dále můžeme taky určit body, ve kterých se tato vzdálenost realizuje:

$$A_0 = (4,1,1,0) - (1,-1,0,0) = (3,2,1,0)^T$$

$$B_0 = (5,4,4,5) + (0,0,1,-4) = (5,4,5,1)^T$$

3.způsob:
Budeme potřebovat bázi součtu zaměření, což je např. $Z(\sigma)+Z(p) = [(1,-1,0,0)^T, (2,0,-1,0)^T, (0,0,1,-4)^T]$, označme tyto vektory postupně v_1, v_2, v_3.

Nyní hledáme body $A_0 \in \sigma$ a $B_0 \in p$ jimiž se vzdálenost $\rho(\sigma, p)$ realizuje. Vektor $A_0 - B_0$ je kolmý k rovině σ i přímce p a tedy $A_0 - B_0$ je kolmý k $Z(\sigma) + Z(p)$, tzn. je kolmý k vektorům báze $Z(\sigma) + Z(p)$, tedy $A_0 - B_0 \perp v_1$, $A_0 - B_0 \perp v_2$, $A_0 - B_0 \perp v_3$.
Dále víme:

$$A_0 = (4,1,1,0) + t(1,-1,0,0) + s(2,0,-1,0)$$

$$B_0 = (5,4,4,5) + r(0,0,1,-4)$$

a tedy $A_0 - B_0 = (-1,-3,-3,-5) + t(1,-1,0,0) + s(2,0,-1,0) - r(0,0,1,-4)\,.$

Dostáváme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} \langle A_0 - B_0, v_1 \rangle & = & 0 \\ \langle A_0 - B_0, v_2 \rangle & = & 0 \\ \langle A_0 - B_0, v_3 \rangle & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrcr} 2t & +2s & & = & -2 \\ 2t & +5s & +r & = & -1 \\ & -s & -17r & = & -17 \end{array}$$

tuto soustavu řešíme užitím Gaussovy eliminace

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 0 & -2 \\ 2 & 5 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & -17 & -17 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 17 & 17 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{rrr|r} 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

z toho plyne $r = 1$, $s = 0$, $t = -1$.
A tedy

$$A_0 = (4,1,1,0) - (1,-1,0,0) = (3,2,1,0)^T$$

$$B_0 = (5,4,4,5) + (0,0,1,-4) = (5,4,5,1)^T$$

z toho plyne

$$A_0 - B_0 = (-2,-2,-4,-1)^T$$

$$\rho(\sigma, p) = \|A_0 - B_0\| = 5\,.$$

Úloha 2: Určete vzdálenost rovin

$\sigma : (4,5,3,2) + t(1,2,2,2) + s(2,0,2,1)$; $\tau : (1,-2,1,-3) + r(2,-2,1,2) + p(1,-2,0,-1)$

v euklidovském prostoru E_4.

Řešení:

1. způsob:

Nejprve najdeme ortogonální doplněk součtu zaměření obou rovin

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 2 & 0 \\ 0 & -4 & -2 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 4 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Z toho plyne, že $x_4 = 0$, dále zavedeme parametr t, čili $x_3 = t$, $x_2 = -\frac{1}{2}t$, $x_1 = -t$, zvolíme-li např. $t = -2$, dostáváme $[Z(\sigma) + Z(\tau)]^{\perp} = [(2, 1, -2, 0)^T]$, označme tento vektor u (Je vidět, že roviny jsou částečně rovnoběžné).
Nyní zvolíme libovolné body $A \in \sigma$, $B \in \tau$, např. $A = (4, 5, 3, 2)^T$, $B = (1, -2, 1, -3)^T$, a označíme vektor $A - B = x = (3, 7, 2, 5)^T$. Podle věty 4.5. je vzdálenost rovin rovna průmětu vektoru x do podprostoru $[u]$. Hledáme tedy kolmý průmět Px.
Předpokládáme Px ve tvaru:

$$Px = au$$

$$x - Px \perp u \quad \text{z toho plyne} \quad \langle x, u\rangle - a\langle u, u\rangle = 0$$

$$9 - 9a = 0 \quad \text{a tedy} \quad a = 1 \quad \text{pak} \quad Px = u = (2, 1, -2, 0)^T$$

$$\rho(\sigma, \tau) = \|Px\| = 3$$

2.způsob:

Opět potřebujeme najít ortogonální doplněk součtu zaměření obou rovin, který jsme určili v předcházejícím výpočtu $[Z(\sigma) + Z(\tau)]^{\perp} = [(2, 1, -2, 0)^T]$, označme tento vektor u.
Nyní hledáme body $A_0 \in \sigma$ a $B_0 \in \tau$ jimiž se vzdálenost $\rho(\sigma, \tau)$ realizuje. Vektor $A_0 - B_0$ je kolmý k rovině σ i τ a tedy $A_0 - B_0 \in [Z(\sigma) + Z(\tau)]^{\perp}$, tzn. je lineární kombinací vektoru báze $[Z(\sigma) + Z(\tau)]^{\perp}$

$$A_0 - B_0 = ku\,.$$

Dále víme:

$$A_0 = (4, 5, 3, 2) + t(1, 2, 2, 2) + s(2, 0, 2, 1)$$

$$B_0 = (1, -2, 1, -3) + r(2, -2, 1, 2) + p(1, -2, 0, -1)$$

a tedy $\quad (4, 5, 3, 2) + t(1, 2, 2, 2) + s(2, 0, 2, 1) - (1, -2, 1, -3) - r(2, -2, 1, 2) - p(1, -2, 0, -1) =$

$$= k(2, 1, -2, 0)\,.$$

Dostáváme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{array}{cccccccc} 2k & +p & +2r & -2s & -t & = & 3 \\ k & -2p & -2r & & -2t & = & 7 \\ -2k & & +r & -2s & -2t & = & 2 \\ & -p & +2r & -1s & -2t & = & 5 \end{array}$$

tuto soustavu řešíme užitím Gaussovy eliminace

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 1 & -2 & -2 & 0 & -2 & 7 \\ -2 & 0 & 1 & -2 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -6 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & 3 & -4 & -3 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & -2 & 5 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -6 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 9 & -18 & -18 & 36 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & 2 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & -5 & -6 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

zvolíme např. $t = 1$, pak $s = -3$, $r = 0$, $p = -4$, $k = 1$.
A tedy

$$A_0 - B_0 = 1u = (2, 1, -2, 0)^T \quad \text{z toho plyne}$$

$$\rho(\sigma, \tau) = \|u\| = 3\,,$$

dále můžeme taky určit body, ve kterých se tato vzdálenost realizuje:

$$A_0 = (4, 5, 3, 2) + (1, 2, 2, 2) - 3(2, 0, 2, 1) = (-1, 7, -1, 1)^T$$

$$B_0 = (1, -2, 1, -3) - 4(1, -2, 0, -1) = (-3, 6, 1, 1)^T$$

Zde by nás mohla zmást volba $t = 1$, zkusme tedy, co se stane, když zvolíme $t = 2$, pak $s = -4$, $r = 0$, $p = -5$, $k = 1$. Hodnota k se nezměnila a nezmění se tedy ani hodnota vzdálenosti.

$$A_0 - B_0 = 1u = (2, 1, -2, 0)^T \quad \text{z toho plyne}$$

$$\rho(\sigma, \tau) = \|u\| = 3\,,$$

$$A_0 = (4, 5, 3, 2) + 2(1, 2, 2, 2) - 4(2, 0, 2, 1) = (-2, 9, -1, 2)^T$$

$$B_0 = (1, -2, 1, -3) - 5(1, -2, 0, -1) = (-4, 8, 1, 2)^T$$

Jinou volbou se vzdálenost nezmění, pouze se změní body, ve kterých se tato vzdálenost realizuje. To znamená, že vzdálenost se může realizovat v nekonečně mnoha bodech (to odpovídá nekonečně mnoha volbám parametru), což je způsobeno tím, že roviny jsou částečně rovnoběžné.

3.způsob:
Budeme potřebovat bázi součtu zaměření. Snadno zjistíme, že je to např. $Z(\sigma) + Z(\tau) = [(1, 2, 2, 2)^T, (2, 0, 2, 1)^T, (2, -2, 1, 2)^T]$, označme tyto vektory postupně v_1, v_2, v_3.
Nyní hledáme body $A_0 \in \sigma$ a $B_0 \in \tau$ jimiž se vzdálenost $\rho(\sigma, \tau)$ realizuje. Vektor $A_0 - B_0$ je kolmý k rovině σ i τ a tedy $A_0 - B_0$ je kolmý k $Z(\sigma) + Z(\tau)$, tzn. je kolmý k vektorům báze $Z(\sigma) + Z(\tau)$, tedy $A_0 - B_0 \perp v_1$, $A_0 - B_0 \perp v_2$, $A_0 - B_0 \perp v_3$.
Dále víme:

$$A_0 = (4, 5, 3, 2) + t(1, 2, 2, 2) + s(2, 0, 2, 1)$$

$$B_0 = (1, -2, 1, -3) + r(2, -2, 1, 2) + p(1, -2, 0, -1)$$

a tedy $\quad A_0 - B_0 = (3, 7, 2, 5) + t(1, 2, 2, 2) + s(2, 0, 2, 1) - r(2, -2, 1, 2) - p(1, -2, 0, -1)\,.$

Dostáváme tedy soustavu rovnic:

$$\begin{array}{rcl} \langle A_0 - B_0, v_1\rangle & = & 0 \\ \langle A_0 - B_0, v_2\rangle & = & 0 \\ \langle A_0 - B_0, v_3\rangle & = & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rrrrcr} 13t & +8s & -4r & +5p & = & -31 \\ 8t & +9s & -8r & -p & = & -15 \\ 4t & +8s & -13r & -4p & = & -4 \end{array}$$

tuto soustavu řešíme užitím Gaussovy eliminace

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & -13 & -4 & -4 \\ 8 & 9 & -8 & -1 & -15 \\ 13 & 8 & -4 & 5 & -31 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & -13 & -4 & -4 \\ 0 & -7 & 18 & 7 & -7 \\ 0 & 8 & -17 & -8 & 8 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c} 4 & 8 & -13 & -4 & -4 \\ 0 & -7 & 18 & 7 & -7 \\ 0 & 0 & 25 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

z toho plyne $r = 0$, zvolíme $p = 1$, pak $s = 2$, $t = -4$.
A tedy

$$A_0 = (4, 5, 3, 2) - 4(1, 2, 2, 2) + 2(2, 0, 2, 1) = (4, -3, -1, -4)^T$$

$$B_0 = (1, -2, 1, -3) + (1, -2, 0, -1) = (2, -4, 1, -4)^T$$

z toho plyne

$$A_0 - B_0 = (2, 1, -2, 0)^T$$

$$\rho(\sigma, \tau) = \|A_0 - B_0\| = 3\,.$$

Volba za p opět není jednoznačná, zvolíme-li jinak, dostaneme jiné body, ve kterých se vzdálenost realizuje, ale hodnota vzdálenosti se nezmění.

Úloha 3: Určete úhel přímky $p : (1, 2, 3, 4) + t(-3, 15, 1, -5)$ a podprostoru $B : (0, 0, 0, 0) + r(1, -5, -2, 10) + s(1, 8, -2, -16)$ v E_4.

Řešení: Označme vektor, který generuje zaměření přímky p, u a vektory, ktaré generují zaměření podprostoru B, postupně x, y. Podle věty 4.8. je úhel p a B roven úhlu, který svírá vektor u a jeho ortogonální projekce Pu do $Z(B)$. Hledáme tedy Pu:

$$Pu = a_1 x + a_2 y$$

$$u - Pu \perp B \quad \text{z toho plyne} \quad u - Pu \perp x \wedge u - Pu \perp y$$

$$\begin{array}{cccc} \langle u,x\rangle & -a_1\langle x,x\rangle & -a_2\langle x,y\rangle & = & 0 \\ \langle u,y\rangle & -a_1\langle x,y\rangle & -a_2\langle y,y\rangle & = & 0 \end{array}$$

po vyčíslení skalárních součinů dostáváme:

$$\begin{array}{cccc} -130 & -130a_1 & +195a_2 & = & 0 \\ 195 & +195a_1 & -325a_2 & = & 0\,. \end{array}$$

Vyřešením této soustavy dostáváme $a_1 = -1$, $a_2 = 0$, a tedy

$$Pu = -x = (-1, 5, 2, -10)^T$$

$$\text{z toho plyne} \qquad \cos\phi(p, B) = \frac{\|Pu\|}{\|u\|} = \sqrt{\frac{130}{260}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\phi(p, B) = \frac{\pi}{4}$$

Úloha 4: Nalezněte odchylku ϕ roviny $\sigma : (2, 1, 0, 1) + t(1, 1, 1, 1) + s(1, -1, 1, -1)$ a roviny $\tau : (1, 0, 1, 1) + r(2, 2, 1, 0) + p(1, -2, 2, 0)$ v prostoru E_4.

Řešení: Budeme postupovat podle definice 4.7. Nejprve budeme hledat průnik zaměření obou rovin $Z(\sigma) \cap Z(\tau)$.

$$t(1, 1, 1, 1) + s(1, -1, 1, -1) = r(2, 2, 1, 0) + p(1, -2, 2, 0)$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

tzn. $r = p$ a $Z(\sigma) \cap Z(\tau) = \big[(1, 0, 1, 0)^T\big]$.

Dále musíme najít $P = Z(\sigma) \cap (Z(\sigma) \cap Z(\tau))^\perp$ a $Q = Z(\tau) \cap (Z(\sigma) \cap Z(\tau))^\perp$. Jde vidět, že $(Z(\sigma) \cap Z(\tau))^\perp = \big[(1, 0, -1, 0)^T, (0, 1, 0, 0)^T, (0, 0, 0, 1)^T\big]$. Pak najdeme P:

$$k_1(1, 0, -1, 0) + k_2(0, 1, 0, 0) + k_3(0, 0, 0, 1) = t(1, 1, 1, 1) + s(1, -1, 1, -1)$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \cdots \sim \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Tzn. $t = -s$ a $P = \big[(0, 1, 0, 1)^T\big]$, označme tento vektor a.

Nyní najdeme Q:

$$k_1(1, 0, -1, 0) + k_2(0, 1, 0, 0) + k_3(0, 0, 0, 1) = r(2, 2, 1, 0) + p(1, -2, 2, 0)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & | & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & -2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \dots \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Tzn. $r = -p$ a $Q = \left[(1, 4, -1, 0)^T\right]$, označme tento vektor b.

Úhel daných rovin je pak roven úhlu, který svírají vektory a a b.

$$\cos\phi = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\,\|b\|} = \frac{4}{\sqrt{2}\sqrt{18}} = \frac{2}{3}$$

Cvičení

1. V euklidovském prostoru E_4 resp. E_5 určete vzdálenost bodu A od podprostoru P.
   (a) $A = (4, 1, -4, -5)$; $P : (3, -2, 1, 5) + t(2, 3, -2, -2) + s(4, 1, 3, 2)$
   (b) $A = (1, 1, -2, -3, -2)$; $P : (3, 7, -5, 4, 1) + t(1, 1, 2, 0, 1) + s(2, 2, 1, 3, 1)$
   (c) $A = (2, 1, -3, 4)$; $P : 2x_1 - 4x_2 - 8x_3 + 13x_4 + 19 = 0, x_1 + x_2 - x_3 + 2x_4 - 1 = 0$
   (d) $A = (1, -3, -2, 9, -4)$; $P : x_1 - 2x_2 - 3x_3 + 3x_4 + 2x_5 + 2 = 0, x_1 - 2x_2 - 7x_3 + 5x_4 + 3x_5 - 1 = 0$
   (e) $A = (2, 1, 4, -5)$; $P : (1, -1, 1, 0) + t(0, 1, 2, -2)$
   (f) $A = (-9, 2, 1, -5)$; $P : (1, 2, 0, 0) + t(-1, 1, 1, 3) + s(0, -2, 1, -1)$
   (g) $A = (4, 2, -5, 1)$; $P : 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - 9 = 0, 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 12 = 0$
   (h) $A = (2, 1, -1, 0)$; $P : 3x_1 + x_3 - x_4 + 6 = 0$
2. Určete vzdálenost přímek p, q v euklidovském prostoru E_n (pro $n = 3, 4, 5$).
   (a) $p : (9, -2, 0) + t(4, -3, 1)$;
   $q : (0, -7, 2) + s(-2, 9, 2)$
   (b) $p : (6, 3, -3) + t(-3, 2, 4)$;
   $q : (-1, -7, 4) + s(-3, 3, 8)$
   (c) $p : (2, -2, 1, 7) + t(0, 4, -2, -3)$;
   $q : (3, 0, 0, -1) + s(-2, 0, 1, 1)$
   (d) $p : (7, 5, 8, 1) + t(2, 0, 3, 1)$;
   $q : x_1 - 4x_3 + 7 = 0, x_2 + 2x_3 - 5 = 0, x_4 - 3 = 0$
   (e) $p : (-3, 2, 3, 3) + t(-1, 1, 1, 0)$;
   $q : (6, 5, 7, 3) + r(0, 0, -1, 2)$
3. Určete vzdálenost přímky p a roviny τ v euklidovském prostoru E_4 resp. E_5.
   (a) $p : (1, 3, -3, -1) + t(1, 0, 1, 1)$;
   $\tau : -x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 3;\ -3x_2 + 2x_3 - 4x_4 = 4$

(b) $p : (5, 4, 4, 5) + r(0, 0, 1, -4);$
$\tau : (4, 1, 1, 0) + t(1, -1, 0, 0) + s(2, 0, -1, 0)$

(c) $p : (1, 6, -6, 4) + t(1, -5, 8, 5);$
$\tau : (6, 3, -5, 5) + s(1, -2, 2, 2) + r(2, -1, -2, 1)$

4. Určete vzdálenost rovin τ a σ v euklidovském prostoruE_4 resp. E_5, je-li:

(a) $\tau : x_1 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 2;\ x_2 + x_3 - x_4 - x_5 = 3;\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_5 = 3;$
$\sigma : (1, -2, 5, 8, 2) + t(0, 1, 2, 1, 2) + s(2, 1, 2, -1, 1)$

(b) $\tau : x_1 + x_2 + 2x_3 = 4;\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_4 = 9;$
$\sigma : x_1 - 2x_2 - 2x_4 = -25;\ x_1 - x_3 + x_4 = 15$

(c) $\tau : (5, 0, -1, 9, 3) + t(1, 1, 0, -1, -1) + s(1, -1, 0, -1, 1);$
$\sigma : (3, 2, -4, 7, 5) + r(1, 1, 0, 1, 1) + u(0, 3, 0, 1, -2)$

(d) $\tau : (4, 2, 2, 2, 0) + t(1, 2, 2, -1, 1) + s(2, 1, -2, 1, -1);$
$\sigma : x_1 - x_2 = 0;\ x_1 - x_3 + x_4 + x_5 = -1;\ x_3 + x_4 - x_5 = 4$

(e) $\tau : (0, 2, 6, -5) + t(-7, 1, 1, 1) + s(-10, 1, 2, 3);$
$\sigma : x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 3;\ x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 = 5$

(f) $\tau : (-4, 3, -3, 2, 4) + t(2, 0, 1, 1, 1) + s(-5, 1, 0, 1, 1);$
$\sigma : x_1 - 2x_2 + x_3 - x_4 + 3x_5 = 6;\ x_1 - x_3 - x_4 + 3x_5 = 0$

5. Určete odchylku ϕ přímky $p = \{A, [u]\}$ a podprostoru B v E_4 resp. E_5.

(a) $u = (1, 0, 3, 0)^T;\ B : (1, 1, 1, 1) + t(1, 1, 4, 5) + s(5, 3, 4, -3) + r(2, -1, 1, 2)$

(b) $u = (1, 2, -2, 1)^T;\ B : (1, 1, 1, 1) + t(2, -2, 1, -1)$

(c) $u = (1, 3, -1, 3)^T;\ B : 3x_1 + x_3 - 4x_4 = 0,\ 2x_1 - x_2 - 3x_4 = -1$

(d) $u = (3, 1, \sqrt{2}, -2)^T;\ B : (1, 2, 1, 1)+t(-1, 1, -1, 0)+s(-1, 2, -2, 1)+r(2, -1, 2, 1)$

(e) $u = (2, 0, 2, -1)^T;\ B : 3x_1 - 2x_2 + 2x_3 + x_4 = 7$

(f) $u = (2, 0, 0, 2, 1)^T;\ B : x_1 + x_2 + x_3 + x_5 = 7$

(g) $u = (0, 1, -1, 0, 0)^T;\ B : (2, 1, 1, 2, 2)+t(2, 1, 0, 1, -1)+s(3, 2, 0, 0, 1)+r(0, 1, 0, 1, 0)+$
$p(1, 0, 0, 1, 3)$

(h) $u = (3, 4, 4, 3)^T;\ B : (2, 0, 0, 1) + t(-2, 0, -1, 0) + s(1, 0, 3, 0)$

(i) $u = (3, 4, 4, 3)^T;\ B : (2, 9, 0, 6) + t(0, 1, 0, 5) + s(0, 2, 0, -7)$

(j) $u = (1, -1, 1, 3)^T;\ B : (3, 1, 4, 5) + t(2, -2, 3, 0) + s(-1, 1, -2, 0)$

6. V E_3 určete odchylku rovin τ a σ.

(a) $\tau : 2x - y + z - 1 = 0;\ \sigma : x + y + 2z + 3 = 0$

(b) $\tau : x + 2z - 6 = 0;\ \sigma : x + 2y - 4 = 0$

7. Určete odchylku podprostorů η a ν v E_4 resp. E_5.

(a) $\eta : (1,2,5,1) + t(1,1,0,0) + s(3,3,0,1)$
$\nu : (1,5,4,1) + r(0,0,0,-1) + p(2,0,0,1)$

(b) $\eta : (4,2,0,1,0) + t(1,1,1,0,0) + s(2,2,2,0,3)$
$\nu : (1,1,0,1,0) + r(0,1,0,0,1) + p(1,1,1,1,0) + q(1,1,1,1,1)$

(c) $\eta : (7,3,5,1) + t(0,0,1,0) + s(2,2,1,0)$
$\nu : (1,3,4,1) + r(1,0,0,0) + p(3,0,1,0)$

8. Na přímce $p : x_1 + x_2 + x_4 - 7 = 0,\ x_1 + 2x_3 + x_4 - 7 = 0,\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 + x_4 - 9 = 0$ nalezněte bod Q mající stejnou vzdálenost od bodů $A = (-1,1,1,1)^T$ a $B = (3,-1,-2,2)^T$ v euklidovském prostoru E_4.

9. Na přímce $p : x + y + 2z = 1,\ 3x + 4y - z = 29$ nalezněte bod Q mající stejnou vzdálenost od bodů $A = (3,4,11)^T$ a $B = (-5,-2,-13)^T$ v euklidovském prostoru E_3.

10. Nalezněte podprostor C v E_5, který prochází bodem $Q = (1,0,1,0,1)^T$ a je kolmý k podprostoru

$$B : \begin{array}{cccccccc} 19x_1 & +11x_2 & -4x_3 & +5x_4 & +x_5 & = & 3 \\ 7x_1 & +2x_2 & & +x_4 & & = & 1 \end{array}.$$

11. Nalezněte podprostor C v E_5, který prochází bodem $Q = (-1,2,5,1,4)^T$ a je kolmý k podprostoru B danému bodem $A = (3,2,1,1,2)^T$ a vektory $u = (7,2,1,1,3)^T$, $v = (0,4,-2,1,-1)^T$.

12. Bodem $Q = (2,1,-3)^T$ v E_3 veďte v rovině $\rho : 3x - 2y + z = 1$ přímku q, která je kolmá k přímce $p : (4,5,3) + t(-6,6,1)$.

13. V E_3 nalezněte rovinu ρ rovnoběžnou s rovinou $\sigma : 3x - 6y - 2z + 14 = 0$ a mající od ní vzdálenost 3.

14. V E_3 nalezněte rovinu ρ rovnoběžnou s rovinou $\sigma : 2x - 2y - z - 7 = 0$ a mající od ní vzdálenost 5.

15. Jsou dány body $A = (-4,1,2)$ a $B = (3,5,-1)$ v E_3. Určete bod C, víte-li, že střed dvojice bodů AC leží na přímce $p : (1,0,1) + t(1,1,0)$ a střed dvojice bodů BC leží v rovině $\rho : x - y + 7z + 1 = 0$.

16. Napište rovnici geometrického místa bodů v E_3 stejně vzdálených od bodu $A = (a, \frac{a}{2}, a)$ a bodu $B = (0, \frac{a}{2}, 0)$.

17. Na přímce $q : (1,-1,0) + t(1,-2,-3)$ v E_3 určrte bod Q mající od roviny $\rho : 2x + y - z + 2 = 0$ vzdálenost $\sqrt{6}$.

18. Na přímce $q : x - y + z - 3 = 0; 2x - 3y + 3z + 6 = 0$ v E_3 určete bod Q mající od roviny $\rho : x - 2y + z - 2 = 0$ vzdálenost $\frac{1}{\sqrt{6}}$.

19. Najděte rovinu v E_3 rovnoběžnou s rovinami $\rho : 3x + 2y - 2z - 3 = 0$ a $\sigma : 6x + 4y - 4z + 1 = 0$, která dělí vzdálenost mezi nimi v poměru 2:3.

20. Odvoďte vztah pro vzdálenost bodu $A = (y_1, \ldots, y_n)$ od nadroviny $N : a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + a_0 = 0$ v E_n.

5. VLASTNÍ ČÍSLA A VLASTNÍ VEKTORY, ORTOGONÁLNÍ MATICE

Teorie

5.1. Definice. *Lineární operátor* je lineární zobrazení $\phi : V \to V$, kde V je vektorový prostor.

5.2. Definice. Nechť $\phi : V \to V$ je lineární operátor, $\alpha = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ báze vektorového prostoru V. Pak *matice operátoru ϕ v bázi α* je matice $(\phi)_{\alpha,\alpha} = (a_{ij})$, kde ve sloupci j jsou souřadnice vektoru $\phi(v_j)$ v bázi α.

5.3. Věta. *Nechť $\phi : V \to V$ je lineární operátor, $\alpha = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$, $\beta = (u_1, u_2, \ldots, u_n)$ jsou dvě báze vektorového prostoru V. Pak pro matice zobrazení ϕ v bázích α a β platí tento vztah:*

$$(\phi)_{\beta,\beta} = (id)_{\beta,\alpha} \cdot (\phi)_{\alpha,\alpha} \cdot (id)_{\alpha,\beta},$$

kde $(id)_{\alpha,\beta}$ je matice přechodu od báze β k bázi α.

5.4. Definice. Řekneme, že matice A a B jsou *podobné*, existuje-li regulární matice P taková, že $B = P^{-1} \cdot A \cdot P$.

5.5. Definice. Nechť V je vektorový prostor a $\phi : V \to V$ je lineární operátor. Podprostor $U \subseteq V$ se nazývá *invariantní podprostor operátoru ϕ*, jestliže $\phi(U) \subseteq U$.

5.6. Definice. Vektor $u \neq o, u \in V$, kde V je vektorový prostor, se nazývá *vlastní vektor* lineárního operátoru ϕ, existuje-li číslo $\lambda \in K$ takové, že

$$\phi(u) = \lambda u$$

Číslo λ se pak nazývá *vlastní číslo*.

5.7. Poznámka. Je-li matice lineárního zobrazení A, pak vlastní vektory x jsou nenulová řešení rovnic

$$Ax = \lambda x.$$

Tato soustava je ekvivalentní se soustavou

$$(A - \lambda E)x = 0,$$

což je homogenní soustava rovnic, která má nenulové řešení právě tehdy když

$$\det(A - \lambda E) = 0$$

.

5.8. Definice. Rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$ se nazývá *charakteristická rovnice matice A*.

5.9. Věta. *Vlastní čísla jsou právě kořeny charakteristické rovnice. Je-li číslo λ_0 vlastní číslo, pak vlastní vektory jsou řešením soustavy rovnic $(A - \lambda_0 E) = 0$.*

5.10. Definice. *Algebraická násobnost vlastního čísla* je násobnost tohoto čísla jakožto kořene charakteristické rovnice. *Geometrická násobnost vlastního čísla* je dimenze podprostoru $\mathrm{Ker}(\phi - \lambda\,\mathrm{id})$.

5.11. Věta. *Je-li $\lambda = a+bi$ vlastní číslo reálné matice A s vlastním vektorem $u = u_1+iu_2$, kde $u_1, u_2 \in R^n$, pak $\overline{\lambda} = a - bi$ je taky vlastní číslo s vlastním vektorem $\overline{u} = u_1 - iu_2$.*

5.12. Poznámka. Podprostor generovaný vektory u_1, u_2 v R^n z předchozí věty je invariantní podprostor zobrazení ϕ. Platí, že

$$A \cdot (u_1 + iu_2) = (a + ib)(u_1 + iu_2)\,.$$

Rozepsáním na reálnou a imaginární část rovnice dostáváme

$$\begin{array}{rcll} A \cdot u_1 & = & au_1 & -bu_2 \\ A \cdot u_2 & = & bu_1 & +au_2 \end{array}\,.$$

Zobrazení ϕ má tedy v bázi $[u_1, u_2]$ matici

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}.$$

Číslo $a+ib$ můžeme napsat v goniometrickém tvaru $a+ib = \sqrt{a^2+b^2}(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, pak má matice zobrazení tvar

$$\sqrt{a^2+b^2}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Tento operátor působí jako otočení o úhel α složené se stejnolehlostí na dvourozměrném invariantním podprostoru zobrazení ϕ.

5.13. Věta. *Nechť ϕ je lineární zobrazení a nechť $\alpha = (v_1, v_2, \ldots, v_n)$ je báze tvořená vlastními vektory příslušnými vlastním číslům $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Pak matice lineárního zobrazení v této bázi má tvar*

$$(\phi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

5.14. Věta. *Vlastní vektory příslušné různým vlastním číslům jsou lineárně nezávislé.*

5.15. Definice. Nechť U a V jsou dva euklidovské vektorové prostory. Zobrazení $\phi : U \to V$ se nazývá *ortogonální*, právě když $\langle \phi(u_1), \phi(u_2) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$ pro $\forall u_1, u_2 \in U$.

5.16. Věta. *Nechť $\phi : U \to U$ je lineární operátor. Pak ϕ je ortogonální zobrazení, právě tehdy když pro matici zobrazení v ortonormální bázi α platí, že $A^{-1} = A^T$.*

5.17. Definice. Matici A, pro kterou platí $A^{-1} = A^T$, nazýváme *ortogonální maticí.*

5.18. Definice. Nechť U a V jsou dva unitární vektorové prostory. Zobrazení $\phi : U \to V$ se nazývá *unitární* právě když $\langle \phi(u_1), \phi(u_2) \rangle = \langle u_1, u_2 \rangle$ pro $\forall u_1, u_2 \in U$.

5.19. Věta. *Nechť $\phi : U \to U$ je lineární operátor. Pak ϕ je unitární zobrazení, právě tehdy když pro matici zobrazení v ortonormální bázi α platí, že $A^{-1} = \overline{A}^T$.*

5.20. Definice. Matici A, pro kterou platí $A^{-1} = \overline{A}^T$, nazýváme *unitární maticí.*

5.21. Věta. *Je-li matice A unitární, pak $|\det A| = 1$ a její vlastní čísla mají absolutní hodnotu rovnu 1.*

5.22. Věta. *Nechť $\phi : U \to U$ je unitární zobrazení. Pak v U existuje ortonormální báze α tvořená vlastními vektory taková, že v této bázi má matice zobrazení diagonální tvar*

$$(\phi)_{\alpha,\alpha} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

5.23. Poznámka. Každá ortogonální matice A je unitární. Má-li A reálná vlastní čísla, pak jsou to 1 nebo -1.
Má-li komplexní vlastní číslo $a+ib$, pak má také vlastní číslo $a-ib$, a protože $|a+ib| = 1$, tak $a^2 + b^2 = 1$. Je-li $u_1 + iu_2$ vlastní číslo, pak $u_1 - iu_2$ je také vlastní číslo. Z toho, že $(u_1 + iu_2) \perp (u_1 - iu_2)$ plyne, že $\|u_1\| = \|u_2\|$ a $u_1 \perp u_2$. u_1, u_2 tedy tvoří ortogonální bázi dvourozměrného invariantního podprostoru.

$$A(u_1 + iu_2) = (a + ib)(u_1 + iu_2)$$

Z toho plyne

$$Au_1 = au_1 - bu_2,\ Au_2 = bu_1 + au_2\,.$$

V bázi u_1, u_2 je tedy matice tohoto zobrazení (tuto bázi nazýváme kanonická báze)

$$\begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Toto zobrazení je tedy otočení o úhel α .
Z toho plyne, že každá ortogonální matice řádu 3 reprezentuje geometricky otočení kolem osy složené případně se symetrií podle roviny kolmé k této ose procházející počátkem.

Řešené příklady

Úloha 1: Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního operátoru zadaného maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

ve standardní bázi.

Řešení: Podle věty 5.9. jsou vlastní čísla řešením charakteristické rovnice $\det(A - \lambda E) = 0$. Spočteme tedy tento determinant, položíme ho roven nule a řešíme charakteristickou rovnici.

$$\det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & 3-\lambda \end{pmatrix} = 0$$

z toho plyne

$$(1-\lambda)^2(3-\lambda) + 1 + 1 + (1-\lambda) + (1-\lambda) - (3-\lambda) = 0$$

$$(1-\lambda)(2-\lambda)^2 = 0$$

Jako řešení charakteristické rovnice dostáváme dvě vlastní čísla, $\lambda_1 = 1$ s algebraickou násobností 1, $\lambda_2 = 2$ s algebraickou násobností 2. Podle věty 5.9. jsou vlastní vektory řešením homogenní soustavy rovnic $(A - \lambda E) = 0$.

Pro $\lambda_1 = 1$ má homogenní soustava tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Zavedeme parametr t, $x_3 = t$, pak $x_2 = t$, $x_1 = t$.
Řešením je podprostor generovaný vektorem $(1,1,1)^T$, tedy podprostor vlastních vektorů

$$[(1,1,1)^T].$$

Geometrická násobnost vlastního čísla λ_1 je 1.

Pro $\lambda_2 = 2$ má homogenní soustava tvar

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Zavedeme parametry t a s, $x_3 = t$, $x_2 = s$, pak $x_1 = t - s$.
Řešením je podprostor generovaný vektory $(1,0,1)^T$, $(-1,1,0)^T$, tedy podprostor vlastních vektorů

$$[(1,0,1)^T, (-1,1,0)^T].$$

Geometrická násobnost vlastního čísla λ_2 je 2 .

Všimněte si, že v bázi α : $\left[(1,1,1)^T, (1,0,1)^T, (-1,1,0)^T\right]$ je matice daného lineárního zobrazení diagonální

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Úloha 2: Analýzou vlastních čísel a vlastních vektorů matice

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

zjistěte, jaké geometrické zobrazení euklidovského prostoru R^3 popisuje lineární operátor daný touto maticí. Určete matici operátoru ve vhodné ortogonální bázi.

Řešení: Lehce ověříme, že $A \cdot A^T = E$ a tedy matice A je ortogonální.
Nejprve hledáme vlastní čísla, to znamená, že najdeme charakteristický polynom.

$$\det \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - \lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\lambda \end{pmatrix} = -\lambda(\frac{1}{2} - \lambda)^2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + (\frac{1}{2} - \lambda) + \frac{1}{4}\lambda = -\lambda^3 + \lambda^2 - \lambda + 1$$

Řešením charakteristické rovnice jsou vlastní čísla

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_2 = i \qquad \lambda_3 = -i.$$

Dále hledáme vlastní vektory, tj. řešíme vždy homogenní soustavu rovnic $(A - \lambda E) = 0$.

Pro λ_1:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -1 & 0 \end{array}\right).$$

Řešením této soustavy je podprostor vlastních vektorů $[(1,1,0)^T]$.

Pro $\lambda_2 = i$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} - i & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} - i & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & -i & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} \frac{1}{2} - i & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ 1 - i & 1 - i & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} - \sqrt{2}i & -i - 1 & 0 \end{array}\right).$$

Řešením této soustavy je podprostor vlastních vektorů $[(-1, 1, \sqrt{2}i)^T]$.
Podle věty 5.11. je podprostor vlastních vektorů pro λ_3 roven $[(-1, 1, -\sqrt{2}i)^T]$.

Podle poznámky 5.21. zvolíme novou reálnou ortonormální bázi

$$\alpha = \left[\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T, \left(-\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right)^T, (0, 0, 1)^T\right]$$

Protože $\lambda_2 = i$, tak $\cos\alpha = 0$ a $\sin\alpha = 1$ z toho plyne, že se jedná o otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ kolem osy dané směrem $(1, 1, 0)^T$, musíme ale ještě určit orientaci otočení. Z matice zobrazení je vidět, že druhý vektor báze se zobrazí na třetí vektor báze a třetí vektor báze se zobrazí na vektor opačný k druhému vektoru báze. Otočení je tedy ve směru od druhého ke třetímu vektoru báze.
Tvar matice operátoru v nové bázi je

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Úloha 3: Ve standardních souřadnicích napište matici zobrazení, které je otočení o úhel $\frac{\pi}{2}$ kolem přímky $x = 0$, $y - z = 0$.

Řešení: Nejprve určíme matici v jisté ortonormální bázi β, ve které má matice tvar

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\alpha & -\sin\alpha \\ 0 & \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Zobrazení je otočení kolem přímky $x = 0$, $y - z = 0$, první vektor báze β tedy bude jednotkový směrový vektor této přímky $(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2})^T$. Pak β doplníme na ortonormální bázi:

$$\beta : \left[\left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T, \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T, (1, 0, 0)^T\right]$$

$$(\phi)_{\beta,\beta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\frac{\pi}{2} & -\sin\frac{\pi}{2} \\ 0 & \sin\frac{\pi}{2} & \cos\frac{\pi}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice zobrazení ve standardní bázi pak je

$$(\phi)_{\epsilon,\epsilon} = (\mathrm{id})_{\epsilon,\beta} \cdot (\phi)_{\beta,\beta} \cdot (\mathrm{id})_{\beta,\epsilon} = (\mathrm{id})_{\epsilon,\beta} \cdot (\phi)_{\beta,\beta} \cdot (\mathrm{id})^T_{\epsilon,\beta},$$

kde $(\mathrm{id})_{\epsilon,\beta}$ je matice přechodu od báze β k bázi ϵ.

$$(\mathrm{id})_{\epsilon,\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix}$$

Z toho plyne

$$(\phi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$(\phi)_{\epsilon,\epsilon} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Cvičení

1. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory lineárního operátoru daného maticí:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 7 & -12 & 6 \\ 10 & -19 & 10 \\ 12 & -24 & 13 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 5 & -3 \\ 4 & -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -1 \\ -3 & 5 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

2. V R^3 určete podprostor vlastních vektorů příslušných vlastní hodnotě $\lambda = 3$.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Zjistěte, zda je daná matice podobná diagonální matici nad poli Q, R, C. (To nastane právě tehdy, když vlastní vektory generují celý prostor.)

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 2 & -3 \\ 4 & 5 & -4 \\ 6 & 4 & -4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 7 & -5 \\ -4 & 5 & 0 \\ 1 & 9 & -4 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -5 \\ 6 & 4 & -9 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$$

4. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matic.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ -1 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

5. Najděte vlastní čísla a vlastní vektory matice lineárního operátoru. U vlastního čísla určete jeho algebraickou a geometrickou násobnost a zjistěte, zda je matice podobná nějaké diagonální matici.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

6. Zjistěte, jak závisí vlastní hodnoty a vlastní vektory matice na parametrech a, b.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ a & b & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 4 & 1 & 0 \\ a & b & 2+a \end{pmatrix}$$

7. Zjistěte, jak vypadají a jaká geometrická zobrazení určují všechny ortogonální matice řádu 2.

8. Analýzou vlastních čísel a vlastních vektorů najděte matici lineárního operátoru ve vhodné bázi, pomocí které určíte, o jakou geometrickou transformaci se jedná, je-li operátor zadán ve standardní bázi maticí:

$$A = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad B = \tfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}$$

$$C = \tfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \qquad D = \tfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -\sqrt{6} \\ 1 & 3 & \sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & 2 \end{pmatrix}$$

$$E = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & -1 \\ 1 & \sqrt{2} & -1 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad F = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$G = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \qquad H = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ -1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} \qquad I = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 1 & -8 & 4 \\ 4 & 4 & 7 \\ -8 & 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$J = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 3 & -2 & 6 \\ 6 & 3 & -2 \\ -2 & 6 & 3 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{3\sqrt{2}} & \frac{4}{3\sqrt{2}} & \frac{1}{3\sqrt{2}} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{4} & -\frac{\sqrt{6}}{4} \\ -\frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{\sqrt{6}}{4} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

9. Analýzou vlastních čísel a vlastních vektorů zjistěte o jakou geometrickou transformaci euklidovského prostoru R^3 se jedná.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} \frac{3}{5} & 0 & -\frac{4}{5} \\ 0 & 1 & 0 \\ \frac{4}{5} & 0 & \frac{3}{5} \end{pmatrix}$$

10. Najděte ortonormální bázi tvořenou vlastními vektory a matici v této bázi unitárního operátoru daného maticí ve standardní bázi:

$$A = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1+i & 1 \\ -1 & 1-i \end{pmatrix} \qquad B = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 4+3i & 4i & -6-2i \\ -4i & 4-3i & -2-6i \\ 6+2i & -2-6i & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 2+3i & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 2-3i \end{pmatrix} \qquad D = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}$$

11. Ve standardních souřadnicích v R^3 napište matici zobrazení, které je otočením o úhel π kolem přímky $x - z = 0$, $y = 0$.

12. Ve standardních souřadnicích v R^3 napište matici zobrazení, které je otočením o úhel $\frac{\pi}{2}$ kolem přímky $x + y = 0$, $z = 0$, přičemž $f(-1, 1, 1) = (a, b, 0)$, kde $a + b > 0$.

13. Ve standardních souřadnicích v R^3 napište matici zobrazení, které je symetrií podle roviny $\sqrt{3}y - x = 0$.

14. Lineární zobrazení v R^3 je otočení kolem osy procházející počátkem se směrovým vektorem $(1, 1, 0)^T$ takové, že $f(1, -1, 0) = (0, 0, \sqrt{2})$. Najděte matici zobrazení ve standardní bázi.

15. V R^n napište matici symetrie podle roviny kolmé k vektoru v v ortonormální bázi $[v, v_2, \ldots, v_n]$.

16. Definujte na R^3 dva skalární součiny $\langle\, , \rangle_1$ a $\langle\, , \rangle_2$ tak, aby zobrazení $\phi : (R^3, \langle\, , \rangle_1) \to (R^3, \langle\, , \rangle_2)$, $\phi(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, -x_1 + x_2, x_3)$, bylo ortogonální.

6. SYMETRICKÉ MATICE A METRICKÁ KLASIFIKACE KUŽELOSEČEK

Teorie

6.1. Definice. Reálná matice A se nazývá *symetrická*, právě když $A = A^T$.

6.2. Věta. *Pro každou reálnou symetrickou matici A existuje ortogonální matice P tak, že $P^{-1} \cdot A \cdot P = P^T \cdot A \cdot P$ je diagonální.*

6.3. Věta. *Každá kvadratická forma f na euklidovském prostoru V má ve vhodné ortonormální bázi analytický tvar $f(x) = \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \cdots + \lambda_n x_n^2$.*

6.4. Věta. (*Metrická klasifikace kuželoseček*) *Nechť ve standardní bázi v R^2 je kuželosečka zadaná rovnicí $k(x) = a_{11}x_1^2 + 2a_{12}x_1x_2 + a_{22}x_2^2 + 2a_1x_1 + 2a_2x_2 + a_0 = 0$. Pak existuje ortonormální afinní báze, které říkáme kanonická báze, v níž je tato kuželosečka dána jednou z rovnic:*

1. $(\frac{y_1}{a})^2 + (\frac{y_2}{b})^2 + 1 = 0$ — *prázdná množina*
2. $(\frac{y_1}{a})^2 + (\frac{y_2}{b})^2 = 0$ — *bod*
3. $(\frac{y_1}{a})^2 + (\frac{y_2}{b})^2 - 1 = 0$ — *elipsa*
4. $(\frac{y_1}{a})^2 - (\frac{y_2}{b})^2 - 1 = 0$ — *hyperbola*
5. $(\frac{y_1}{a})^2 - (\frac{y_2}{b})^2 = 0$ — *dvě různoběžky*
6. $(\frac{y_1}{a})^2 - 2py_2 = 0$ — *parabola*
7. $(\frac{y_1}{a})^2 - 1 = 0$ — *dvě rovnoběžky*
8. $(\frac{y_1}{a})^2 + 1 = 0$ — *prázdná množina*
9. $y_1^2 = 0$ — *přímka*

Řešené příklady

Úloha 1: Najděte ortonormální bázi, v níž má matice zobrazení $\phi(x) = A \cdot x$,

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

diagonální tvar.

Řešení: Matice A je symetrická a podle věty 6.2. ji lze diagonalizovat tak, že na diagonále jsou vlastní čísla a báze, ve které má matice tento tvar, je tvořena vlastními vektory.
Nejprve tedy řešíme charakteristickou rovnici:

$$(\lambda - 4)^3 - 16 - 12(\lambda - 4) = 0$$

vlastní čísla tedy jsou $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 8$.
Dále hledáme vlastní vektory.

Pro $\lambda_1 = 2$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & 2 & 0 \end{array}\right).$$

Zavedeme parametry t a s, $x_3 = t$, $x_2 = s$, pak $x_1 = -t - s$, nezávislou volbou parametrů dostáváme, že podprostor vlastních vektorů je generován vektory $(-1, 1, 0)^T$, $(-1, 0, 1)^T$, užitím Gramm-Schmidtova ortogonalizačního procesu a normováním dostáváme ortonormální bázi tohoto podprostoru:

$$\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T\right]$$

Pro $\lambda_2 = 8$:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -4 & 2 & 2 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 0 \\ 2 & 2 & -4 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right)$$

Zavedeme parametr t , $x_3 = t$, pak $x_2 = t$, $x_1 = t$, volbou parametru dostáváme, že podprostor vlastních vektorů je generován vektorem $(1, 1, 1)^T$, normováním dostáváme ortonormální bázi tohoto podprostoru:

$$\left[\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T\right]$$

diagonální tvar matice je

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

a to v bázi $\left[\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T, \left(-\frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}\right)^T, \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^T\right]$.

Úloha 2: Zjistěte jakou kuželosečku popisuje rovnice

$$k : x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2 + 2x_1 + 1 = 0\,,$$

popřípadě určete její střed, osy a načrtněte obrázek.

Řešení: Matice kvadratické formy je $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ a ta se dá podle věty 6.3. napsat v diagonálním tvaru s vlastními čísly na diagonále.
Hledáme tedy vlastní čísla a vlastní vektory, charakteristická rovnice má tvar

$$(1-\lambda)^2 - 4 = 0\,.$$

Vlastní čísla a jim příslušné vlastní vektory tedy jsou:
$\lambda_1 = -1$ příslušný normovaný vlastní vektor je $u = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$
$\lambda_2 = 3$ příslušný normovaný vlastní vektor je $v = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^T$.

Nyní přejdeme k bázi $\alpha = [u, v]$, ve které má matice kvadratické formy tvar $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$.
Přitom matice přechodu od báze α ke standardní bázi ϵ má tvar $(\mathrm{id})_{\epsilon,\alpha} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$
a souřadnice x_1, x_2 ve standardní bázi spočítáme ze souřadnic y_1, y_2 v bázi α takto:

$$\begin{array}{rcll} x_1 & = & \frac{\sqrt{2}}{2}y_1 & +\frac{\sqrt{2}}{2}y_2 \\ x_2 & = & -\frac{\sqrt{2}}{2}y_1 & +\frac{\sqrt{2}}{2}y_2 \end{array}\,.$$

Převedeme rovnici kuželosečky do nových souřadnic y_1, y_2:

$$k(y) : -y_1^2 + 3y_2^2 + \sqrt{2}y_1 + \sqrt{2}y_2 + 1 = 0\,.$$

Nyní ještě posuneme střed soustavy souřadnic tak, aby ležel ve středu kuželosečky. Doplníme tedy na čtverce a zavedeme nové souřadnice.

$$k : -\left(y_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} + 3\left(y_2 + \frac{\sqrt{2}}{6}\right)^2 - \frac{1}{6} + 1 = 0$$

$$\begin{array}{rcllcllll} z_1 & = & y_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & = & \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 & -\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ z_2 & = & y_2 & -\frac{\sqrt{2}}{6} & = & \frac{\sqrt{2}}{2}x_1 & +\frac{\sqrt{2}}{2}x_2 & +\frac{\sqrt{2}}{6} \end{array}$$

$$k : z_1^2 - 3z_2^2 - \frac{4}{3} = 0$$

$$k : \left(\frac{z_1}{\sqrt{\frac{4}{3}}}\right)^2 - \left(\frac{z_2}{\frac{2}{3}}\right)^2 - 1 = 0$$

Jedná se tedy o hyperbolu, jejíž osy jsou přímky zadané parametricky $S + tu$ a $S + tv$. Střed má souřadnice $(z_1, z_2) = (0, 0)$, $(y_1, y_2) = (\frac{\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{2}}{6})$ a $(x_1, x_2) = (\frac{1}{3}, -\frac{2}{3})$.

Cvičení

1. Najděte diagonální tvar symetrické matice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -4 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 4 & 4 & 0 & 0 \\ 4 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

2. Najděte diagonální tvar symetrické matice a bázi, ve které má matice tento tvar.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 6 & 2\sqrt{3} \\ 2\sqrt{3} & 7 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 6 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -36 \\ 0 & -3 & 0 \\ -36 & 0 & -23 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} -7 & 24 & 0 & 0 \\ 24 & 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 24 \\ 0 & 0 & 24 & 7 \end{pmatrix}$$

3. Určete o jakou kuželosečku se jedná, případně určete její střed, osy a nakreslete obrázek.
   (a) $k : 4xy + 3y^2 + 6x + 12y - 36 = 0$
   (b) $k : x^2 + 6xy + 9y^2 - 12x + 24y + 15 = 0$
   (c) $k : x^2 + 2xy + y^2 - 2x - 2y - 3 = 0$

4. Určete typ a kanonickou rovnici kuželosečky, případně nakreslete obrázek.
   (a) $k : 3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0$
   (b) $k : 25x^2 - 14xy + 25y^2 + 64x - 64y - 224 = 0$
   (c) $k : 4xy + 3y^2 + 16x + 12y - 36 = 0$
   (d) $k : 7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0$

(e) $k: 19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0$

(f) $k: 5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0$

(g) $k: 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 20x + 110y - 50 = 0$

(h) $k: 9x^2 + 12xy + 4y^2 - 24x - 16y + 3 = 0$

(i) $k: 16x^2 - 24xy + 9y^2 - 160x + 120y + 425 = 0$

5. Určete typ kuželosečky a délky jejích poloos.

(a) $k: 41x^2 + 24xy + 9y^2 + 24x + 18y - 36 = 0$

(b) $k: 8x^2 + 4xy + 5y^2 + 16x + 4y - 28 = 0$

(c) $k: 4x^2 + 24xy + 11y^2 + 64x + 42y + 51 = 0$

(d) $k: 12x^2 + 26xy + 12y^2 - 52x - 48y + 73 = 0$

6. Ověřte, že daná kuželosečka je parabola a určete její parametr.

(a) $k: 9x^2 + 24xy + 16y^2 - 120x + 90y = 0$

(b) $k: 9x^2 - 24xy + 16y^2 - 54x - 178y + 181 = 0$

(c) $k: x^2 - 2xy + y^2 + 6x - 14y + 29 = 0$

(d) $k: 9x^2 - 6xy + y^2 - 50x + 50y - 275 = 0$

7. Určete typ kuželosečky, případně délky jejích poloos a střed.

(a) $k: 3x^2 + 8xy - 3y^2 - 1 = 0$

(b) $k: 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 32 = 0$

(c) $k: \frac{1}{2}x^2 - xy + \frac{1}{2}y^2 - \sqrt{2}x - \sqrt{2}y + 3 = 0$

(d) $k: xy + 3x - 2y - 6 = 0$

(e) $k: 6x^2 + 4xy + 6y^2 - 16 = 0$

(f) $k: 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 8 = 0$

(g) $k: x^2 + 2\sqrt{3}xy - y^2 - 2 = 0$

8. Najděte ortonormální bázi kvadratické formy $f(x, y, z) = 17x^2 + 4xy - 4xz + 14y^2 + 8yz + 14z^2$, ve které má forma diagonální tvar, na euklidovském prostoru R^3 se standardním skalárním součinem vzhledem ke standardní (rovněž ortonormální) bázi. Přitom jedno z vlastních čísel matice kvadratické formy je 18.

9. Najděte ortonormální polární bázi kvadratické formy $f(x, y, z) = 3x^2 - 4xy$, ve které má forma diagonální tvar, na euklidovském prostoru R^3 se standartním skalárním součinem vzhledem ke standardní (rovněž ortonormální) bázi.

7. JORDANŮV KANONICKÝ TVAR

Teorie

7.1. Definice. *Jordanova buňka* dimenze k je čtvercová matice řádu k tvaru

$$J_k(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda \end{pmatrix}$$

7.2. Poznámka. Jestliže lineární zobrazení $\phi : V \to V$ má v nějaké bázi $\alpha = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ matici buňku $(\phi)_{\alpha,\alpha} = J_k(\lambda)$, pak platí

$$\begin{array}{rcl} \phi(v_1) &=& \lambda v_1 \\ \phi(v_2) &=& v_1 + \lambda v_2 \\ \phi(v_3) &=& v_2 + \lambda v_3 \\ & \vdots & \\ \phi(v_k) &=& v_{k-1} + \lambda v_k \end{array} \quad \text{z toho plyne} \quad \begin{array}{rcl} (\phi - \lambda\mathrm{id})v_1 &=& 0 \\ (\phi - \lambda\mathrm{id})v_2 &=& v_1 \\ (\phi - \lambda\mathrm{id})v_3 &=& v_2 \\ & \vdots & \\ (\phi - \lambda\mathrm{id})v_k &=& v_{k-1} \end{array}$$

Posloupnost vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$ nazýváme řetězec pro vlastní číslo λ. V příkladech hledáme obráceně nejdříve řetězec pro vlastní číslo λ a platí, že vektory řetězce jsou lineárně nezávislé a v bázi jimi tvořené má operátor matici $(\phi)_{\alpha,\alpha} = J_k(\lambda)$.

7.3. Definice. Matice je v *Jordanově kanonickém tvaru*, jestliže je blokově diagonální s bloky tvořenými Jordanovými buňkami.

7.4. Věta. *Nechť V je vektorový prostor nad polem K dimenze n a nechť $\phi : V \to V$ je lineární operátor, jehož charakteristická rovnice má n kořenů (včetně násobnosti), potom existuje taková báze α ve V, že $(\phi)_{\alpha,\alpha}$ je matice v Jordanově kanonickém tvaru. Přitom tento tvar je určen jednoznačně až na pořadí Jordanových buněk.*

7.5. Věta. *Pro výpočet Jordanova kanonického tvaru platí:*

1. *Na uhlopříčce Jordanova kanonického tvaru jsou vlastní čísla lineárního operátoru, každé tolikrát, kolik je jeho algebraická násobnost.*

2. *Jordanův kanonický tvar má tolik buněk, kolik existuje lineárně nezávislých vlastních vektorů.*

3. *Velikost největší buňky pro vlastní číslo λ je k právě tehdy, když k je nejmenší takové číslo, že hodnost matice $(A - \lambda E)^k$ je rovna algebraické násobnosti vlastního čísla λ.*

Řešené příklady

Úloha 1: Najděte Jordanův kanonický tvar lineárního operátoru zadaného ve standardní bázi maticí

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Charakteristická rovnice má tvar

$$(\lambda - 2)^3 = 0 \quad \text{z toho plyne} \quad \lambda = 2\,.$$

Máme tedy jedno vlastní číslo, jehož algebraická násobnost je 3, na diagonále Jordanova kanonického tvaru tedy budou podle věty 7.5. samé dvojky.
Podprostor vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu $\lambda = 2$ je generován vektory:

$$u = (3, 0, 1)^T \quad v = (-2, 1, 0)^T$$

a podle druhého bodu věty 7.5. bude mít Jordanův kanonický tvar dvě buňky. Nyní jej už můžeme napsat:

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Dále musíme ale vypočítat ještě bázi, ve které má matice lineárního operátoru tento tvar. Pro druhou buňku podle poznámky 7.2. musíme najít řetězec vektorů báze. Pro první vektor báze, označme jej x, musí platit

$$(\phi - \lambda \mathrm{id})x = 0 \quad \text{z toho plyne} \quad (A - 2E)x = 0\,,$$

x je tedy z podprostoru vlastních vektorů. Pro druhý vektor, označme jej y, pak musí platit

$$(A - 2E)y = x = au + bv.$$

Nevíme, na který vlkastní vektor se y zobrazí, musíme tedy psát x obecně jako lineární kombinaci vektorů báze podpostoru vlastních vektorů. Dále řešíme uvedenou soustavu rovnic $(A - 2E)y = au + bv$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3a - 2b \\ 4 & 8 & -12 & b \\ 3 & 6 & -9 & a \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 3a - 2b \\ 0 & 0 & 0 & -12a + 9b \\ 0 & 0 & 0 & -8a + 6b \end{array}\right)$$

Tato soustava má řešení pouze když:

$$-12a + 9b = 0 \wedge -8a + 6b = 0 \quad \text{a tedy} \quad a = \frac{3}{4}b$$

Zvolíme např. $a = 3$ a $b = 4$, pak řešením soustavy je např. vektor $y = (1, 0, 0)^T$ a vektor $x = 3(3, 0, 1)^T + 4(-2, 1, 0)^T = (1, 4, 3)^T$.

Třetí vektor báze z, příslušný druhé buňce velikosti jedna musí být podle poznámky 7.2. taky z podprostoru vlastních vektorů. Zvolíme jej tak, aby byl lineárně nezávislý s vektorem x i y, můžeme zvolit např. vektor u.
Báze, ve které má matice lineárního operátoru Jordanův kanonický tvar, je:

$$\alpha = \left[(1,4,3)^T, (1,0,0)^T, (3,0,1)^T\right] .$$

Úloha 2: Najděte Jordanův kanonický tvar lineárního operátoru zadaného ve standardní bázi maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Charakteristická rovnice má tvar

$$(\lambda - 1)^4 = 0 \quad \text{z toho plyne} \quad \lambda = 1$$

Máme tedy jedno vlastní číslo, jehož algebraická násobnost je 4, na diagonále Jordanova kanonického tvaru tedy budou podle věty 7.5. samé jedničky.
Podprostor vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu $\lambda = 1$ je generován vektory:

$$u = (1,1,0,0)^T \quad v = (0,0,1,1)^T$$

a podle druhého bodu věty 7.5. bude mít Jordanův kanonický tvar dvě buňky. Narozdíl od předchozího příkladu jej ale nemůžeme ještě napsat, neboť nevíme, jestli budeme mít dvě buňky velikosti dvě, nebo jednu buňku velikosti tři a jednu velikosti jedna.

Dále budeme počítat bázi, ve které má matice lineárního operátoru Jordanův kanonický tvar. Pro první buňku (nevíme jak je velká) podle poznámky 7.2. musíme najít řetězec vektorů báze. Pro první vektor báze, označme jej w, musí platit

$$(A - E)w = 0$$

w je tedy z podprostoru vlastních vektorů. Pro druhý vektor, označme jej x, pak musí platit

$$(A - E)x = w = au + bv.$$

Dále řešíme uvedenou soustavu rovnic

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & -1 & 1 & a \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b \\ -1 & 1 & 0 & 0 & b \end{array}\right).$$

Tato soustava má řešení pro libovolná a, b, můžeme tedy zvolit dvě nezávislé volby $a = 1$, $b = 0$ a $a = 0$, $b = 1$, budeme mít tedy dvě buňky velikosti dvě. Přičemž dva z vektorů báze budou přímo vektory u, v.

Hledáme řetězec odpovídající první buňce, hledáme tedy řešení soustavy rovnic $(A-E)x = u$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Řešením této soustavy je např. vektor $x_1 = (0, 0, -1, 0)^T$.

Dále hledáme řetězec odpovídající druhé buňce, hledáme tedy řešení soustavy rovnic $(A - E)y = v$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Řešením této soustavy je např. vektor $x_2 = (-1, 0, 1, 0)^T$.
Jordanův kanonický tvar je:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Báze, ve které má matice lineárního operátoru Jordanův kanonický tvar, je:

$$\alpha = \left[(1, 1, 0, 0)^T, (0, 0, -1, 0)^T, (0, 0, 1, 1)^T, (-1, 0, 1, 0)^T\right] .$$

Úloha 3: Najděte Jordanův kanonický tvar lineárního operátoru zadaného ve standardní bázi maticí

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

Řešení: Charakteristická rovnice má tvar

$$(\lambda - 1)^4 = 0 \quad \text{z toho plyne} \quad \lambda = 1$$

Máme tedy jedno vlastní číslo, jehož algebraická násobnost je 4, na diagonále Jordanova kanonického tvaru tedy budou podle věty 7.5. samé jedničky.
Podprostor vlastních vektorů příslušných vlastnímu číslu $\lambda = 1$ je generován vektory:

$$u = (0, 0, 1, 0)^T \quad v = (3, 1, 0, 1)^T$$

a podle druhého bodu věty 7.5. bude mít Jordanův kanonický tvar dvě buňky, nevíme ale jak budou velké.

Dále budeme počítat bázi, ve které má matice lineárního operátoru Jordanův kanonický tvar. Pro první buňku (nevíme jak je velká) podle poznámky 7.2. musíme najít řetězec vektorů báze. Pro první vektor báze, označme jej w, musí platit

$$(A - E)w = 0\,,$$

w je tedy z podprostoru vlastních vektorů. Pro druhý vektor, označme jej x, pak musí platit

$$(A - E)x = w = au + bv\,.$$

Dále řešíme uvedenou soustavu rovnic.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 0 & 3 & 3b \\ -2 & -7 & 0 & 13 & b \\ 0 & -3 & 0 & 3 & a \\ -1 & -4 & 0 & 7 & b \end{array}\right)$$

Z prvního a třetího řádku plyne, že tato soustava má řešení právě když $a = 3b$, můžeme zvolit jen jednu nezávislou volbu a, b, např. $a = 3$, $b = 1$, budeme mít tedy v Jordanově kanonickém tvaru jednu buňku velikosti tři a jednu velikosti jedna.

Řetězec odpovídající první buňce velikosti tři bude začínat vlastním vektorem $w = 3u+v = (3, 1, 3, 1)^T$. Na vektor w se zobrazí druhý vektor řetězce, označíme jej x, pro který platí $(A - E)x = w$. Řešíme tuto soustavu rovnic.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 & 1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 & 1 \end{array}\right)$$

Řešením této soustavy je např. vektor $x_0 = (3, -1, 0, 0)^T$. Na druhý vektor řetězce se však zobrazí třetí vektor řetězce, označme jej z. Nevíme ale na který vektor, který odpovídá řešení předchozí soustavy se vektor z zobrazí, musíme tedy obecně předpokládat

$$(A - E)z = x = x_0 + cu + dv$$

kde c, d jsou libovolná reálná čísla. (Víme, že vektor x odpovídá řešení předchozí soustavy, neboť mu odpovídá vektor x_0 a vektor $cu + dv$ je vektor vlastní, který se zobrazí na nulový vektor, platí $(A - E)(cu + dv) = o$.)

Nyní řešíme uvedenou soustavu rovnic.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 0 & 3 & 3 + 3d \\ -2 & -7 & 0 & 13 & -1 + d \\ 0 & -3 & 0 & 3 & c \\ -1 & -4 & 0 & 7 & d \end{array}\right)$$

Z prvního a třetího řádku plyne, že tato soustava má řešení pouze pro $c = 3 + 3d$, zvolíme např. $d = 0$ a $c = 3$. Pak vektor $x = x_0 + 3u$ z toho plzne $x = (3, -1, 3, 0)^T$.
Vektor z je pak řešením soustavy $(A - E)x = z$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 0 & -3 & 0 & 3 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & 13 & -1 \\ 0 & -3 & 0 & 3 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 7 & 0 \end{array}\right)$$

Např. $z = (4, -1, 0, 0)^T$.

Čtvrtý vektor báze odpovídající druhé buňce bude vlastní vektor, který zvolíme tak, aby byl lineárně nezávislý na vektoru w, např. vektor u.

Jordanův kanonický tvar je:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Báze, ve které má matice lineárního operátoru Jordanův kanonický tvar, je:

$$\alpha = \left[(3,1,3,1)^T, (3,-1,3,0)^T, (4,-1,0,0)^T, (0,0,1,0)^T\right].$$

Cvičení

1. Najděte Jordanův kanonický tvar matice.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 & -7 \\ 9 & -3 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & 4 & -8 \\ 0 & 0 & 2 & -4 \end{pmatrix}$$

2. Najděte Jordanův kanonický tvar lineárního operátoru a bázi, ve které má matice operátoru tento tvar. Lineární operátor je zadán maticí ve standardní bázi:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -3 \\ 4 & 10 & -12 \\ 3 & 6 & -7 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad D = \begin{pmatrix} 6 & -9 & 5 & 4 \\ 7 & -13 & 8 & 7 \\ 8 & -17 & 11 & 8 \\ 1 & -2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

3. Najděte Jordanovy kanonické tvary matic řádu 3.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -1 & 4 & 0 \\ 5 & 7 & 3 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & 3 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -2 \\ -1 & -2 & -2 \\ 4 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

4. Najděte Jordanovy kanonické tvary matic řádu 4.

$$A = \begin{pmatrix} -13 & 5 & 4 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -30 & 12 & 9 & 5 \\ -12 & 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad E = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & \frac{1}{3} \\ 0 & 3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} -1 & -6 & -9 & -11 \\ 0 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & -6 & 3 & 3 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad I = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$J = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad K = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -6 & 3 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & -9 & -6 & -4 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad N = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 2 & -3 \\ 6 & 9 & 4 & -8 \\ -3 & -4 & -1 & 4 \\ 9 & 9 & 6 & -8 \end{pmatrix} \qquad O = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

5. Napište všechny Jordanovy kanonické tvary matic s charakteristickým polynomem tvaru $(\lambda - 4)^5$.

6. Napište všechny Jordanovy kanonické tvary matic s charakteristickým polynomem tvaru $(\lambda - 1)^3(\lambda - 3)^5$.