2. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 11.3. 2013

Z dvojice úloh **A** a **B** je druhá obtížnější a je určena těm, pro které je prvá úloha jednoduchá. Stačí, když odevzdáte řešení jedné z nich.

1A. Dokažte: Vektory $u_1, u_2, \dots, u_n$ tvoří bázi prostoru U, právě když platí

$$(\forall v \in U)(\exists!(a_1, a_2, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n)(v = a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n).$$

1B. Nechť U a V jsou vektorové podprostory v prostoru W. Dokažte: $U \cap V = \{0\}$, právě když

$$(\forall w \in U + V)(\exists! u \in U)(\exists! v \in V)(w = u + v).$$

2A. Mějme prosté lineární zobrazení $\varphi : U \to V$. Nechť $\dim U < \infty$. Potom

$$\dim U = \dim \ker \varphi + \dim \operatorname{im} \varphi.$$

Dokažte.

2B. Nechť $\varphi : U \to U$ je lineární operátor s vlastností

$$\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u)$$

pro všechna $u \in U$. Dokažte, že potom

$$U = \ker \varphi \oplus \operatorname{im} \varphi.$$

(Návod: Prvně musíte dokázat, že každý vektor $u \in U$ je součtem vektoru z $\operatorname{im} \varphi$ a vektoru z $\ker \varphi$. Dále musíte dokázat, že každý prvek z průniku $\operatorname{im} \varphi \cap \ker \varphi$ je nulový.)

3A. Dokažte z definice spojitosti. Je-li funkce f spojitá v bodě a a funkce g je spojitá v bodě $f(a)$, pak je v bodě a spojitá i složená funkce $g \circ f$.

3B. Pomocí věty o supremu dokažte: Je-li funkce $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ spojitá, $f(a) < 0$ a $f(b) > 0$, pak existuje $c \in (a, b)$ takové, že

$$f(c) = 0.$$