3. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 18.3. 2013

Tentokrát z dvojice úloh **A** a **B** udělejte všichni **A** a pokuste se i o **B**.

1A. Nechť U, V a W jsou tři podprostory ve vektorovém prostoru Z. Podobně jako se definuje součet dvou podprostorů, definuje se i součet tří podprostorů množinovým předpisem

$$U + V + W = \{u + v + w \in Z; u \in U, v \in V, w \in W\}.$$

Nechť tento součet je přímý, tj. platí:

$$(\forall z \in U + V + W)(\exists! u \in U)(\exists! v \in V)(\exists! w \in W)(z = u + v + w).$$

Dokažte, že potom

$$(U + V) \cap W = \{0\}.$$

1B. V situaci z příkladu **1A** dokažte navíc: Platí-li

$$(U + V) \cap W = \{0\}, \quad (U + W) \cap V = \{0\}, \quad (V + W) \cap U = \{0\},$$

pak je součet $U + V + W$ přímý.

2.A Nechť $I_n = [a_n, b_n]$ je posloupnost uzavřených intervalů taková, že $I_{n+1} \subseteq I_n$. Dokažte s použitím věty o supremu, že průnik

$$\cap_{n=1}^{\infty} I_n \neq \emptyset.$$

2B. V situaci příkladu **2A** dokažte navíc, že když

$$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0,$$

pak průnik obsahuje jediný bod.

3. Nechť $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ je spojitá funkce, $f(a) > 0$ a $f(b) < 0$. Definujme m jako infimum množiny

$$\{x \in [a, b], f(x) < 0\}.$$

Dokažte, že $f(m) = 0$.

4A. Dokažte z definice limity, že funkce

$$f(x) = \sin(1/x)$$

nemá limitu v bodě 0. (Návod: Dokažte, že limitou nemůže být 0, a pak, že limitou nemůže být ani číslo různé od 0.)

4B. Nechť $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ je funkce definovaná

$$f(x) = 0$$

pro x iracionální a

$$f(x) = \frac{1}{q}$$

pro $x = p/q$, p, q nesoudělná celá čísla, q přirozené (pro úplnost položíme $f(0) = 1$). Z definice limity dokažte, že pro všechna reálná $a \in \mathbb{R}$ je

$$\lim_{x \to a} f(x) = 0.$$