7. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 29. 4. 2013

1. Dokažte následující tvrzení: Nechť U je vektorový prostor dimenze n nad tělesem $\mathbb{K}$ a nechť $f_1, f_2, \ldots, f_n$ tvoří bázi duálního prostoru U^*. Potom existuje právě jedna báze $u_1, u_2, \ldots, u_n$ prostoru U taková, že

$$f_i(u_j) = \begin{cases} 0 & \text{for } i \neq j, \\ 1 & \text{for } i = j. \end{cases}$$

2. Pomocí věty o supremu dokažte následující verzi plíživého lemmatu: Nechť množina $M \subseteq [a, b]$ má následující dvě vlastnosti:

(1) $(\forall x \in M)(\exists \delta > 0)((x, x + \delta) \cap [a, b] \subset M)$,

(2) Jestliže $x_n \in M$ je rostoucí posloupnost, která konverguje k $x \in [a, b]$, pak $x \in M$.

Potom $M = [a, b]$.