

8. domácí úloha ze semináře z matematiky II, 6. 5. 2013

1. Necht' U je vektorový prostor konečné dimenze nad \mathbb{C} se skalárním součinem a necht' $f : U \rightarrow \mathbb{C}$ je lineární forma. Pak existuje právě jeden vektor $v \in U$ takový, že všechna $u \in U$ platí

$$f(u) = \langle u, v \rangle.$$

Dokažte.

2. Pomocí věty o supremu a infimu dokažte: Je-li f neklesající funkce na \mathbb{R} , pak pro každé $a \in \mathbb{R}$ existují

$$\lim_{x \rightarrow a-} f(x) \quad \text{a} \quad \lim_{x \rightarrow a+} f(x).$$

3. Pomocí věty o střední hodnotě dokažte následující verzi l'Hospitalova pravidla: Je-li

$$\lim_{x \rightarrow a+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \infty$$

a

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

existuje, pak

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$