**Jméno:**

| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Celkem |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

**1. test ze semináře z matematiky II, březen 2013**

*Max. počet bodů 24*

**1.** Napište definici lineární nezávislosti vektorů $v_1, v_2, \dots, v_k$ ve vektorovém prostoru $V$.

($\pm 1$ *bod*)

Napište definici jádra lineárního zobrazení.

($\pm 1$ *bod*)

Napište definici infima množiny $M \subseteq \mathbb{R}$.

($\pm 1$ *bod*)

Pomocí kvantifikátorů napište, co znamená, že reálná funkce $f$ nemá v bodě $\infty$ reálnou limitu.

($\pm 1$ *bod*)

**2.** Dokažte z definice spojitosti, že funkce $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definovaná předpisem $f(x) = 2 - x$ pro $x$ racionální a $f(x) = x$ pro $x$ iracionální je spojitá v bodě 1 a je nespojitá v bodě 0.

(4 *body*)

**3.** Pomocí "axiomu o infimu"detailně dokažte: Každá klesající posloupnost kladných reálných čísel má limitu.

(4 *body*)

**4.** Dokažte z definice limity: Jestliže

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = A, \quad \lim_{x\to\infty} g(x) = B,$$

pak

$$\lim_{x\to\infty} f(x)g(x) = A \cdot B.$$

(4 *body*)

**5.** Definujte součet tří podprostorů $U$, $V$ a $W$ v prostoru $Z$ množinovým předpisem

$$U + V + W = \{\dots \quad \}.$$

Nechť platí:

$$(\forall z \in U + V + W)(\exists! u \in U)(\exists! v \in V)(\exists! w \in W)(z = u + v + w).$$

Dokažte, že potom

$$(U + V) \cap W = \{0\}.$$

(4 *body*)

**6.** Mějme prosté lineární zobrazení $\varphi : U \to V$ a vektory $u_1, u_2, \dots, u_k \in U$. Dokažte: Jsou-li vektory $u_1, u_2, \dots, u_k$ lineárně nezávislé v prostoru $U$, jsou lineárně nezávislé také vektory $\varphi(u_1)$, $\varphi(u_2)$, $\dots$,$\varphi(u_k)$ v prostoru $V$.

(4 *body*)