

Jméno:

1	2	3	4	5	6	Celkem

**1. test ze semináře z matematiky II pro pokročilé, březen 2013**

*Max. počet bodů 24*

1. Necht'  $U, V$  a  $W$  jsou tři podprostory ve vektorovém prostoru  $Z$ . Dokažte: Podmínky

$$(U + V) \cap W = \{0\}, \quad (U + W) \cap V = \{0\}, \quad (V + W) \cap U = \{0\}$$

jsou splněny, právě když je součet  $U + V + W$  přímý, tj. platí

$$(\forall z \in U + V + W)(\exists! u \in U)(\exists! v \in V)(\exists! w \in W)(z = u + v + w).$$

(4 body)

2. Necht'  $\varphi : U \rightarrow U$  je lineární operátor s vlastností

$$\varphi(\varphi(u)) = \varphi(u)$$

pro všechna  $u \in U$ . Dokažte, že potom

$$U = \ker \varphi \oplus \operatorname{im} \varphi.$$

(4 body)

3. Mějme vektorový prostor  $U$  nad  $\mathbb{R}$  dimenze  $n$  a dvě lineární formy  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$ . Dokažte:

a)  $\dim(\ker f \cap \ker g) \geq n - 2$ .

b)  $\dim(\ker f \cap \ker g) = n - 2$  právě když jsou  $f$  a  $g$  lineárně nezávislé.

(4 body)

4. Necht'  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  je funkce definovaná

$$f(x) = 0$$

pro  $x$  iracionální a

$$f(x) = \frac{1}{q}$$

pro  $x = p/q$ ,  $p, q$  nesoudělná celá čísla,  $q$  přirozené (pro úplnost položíme  $f(0) = 1$ ). Z definice spojitosti dokažte, že pro  $f$  je spojitá ve všech iracionálních číslech a ve všech racionálních je nespojitá.

(4 body)

5. Dokažte z definice limity: Jestliže

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow \infty} g(x) \neq 0,$$

pak

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}.$$

(4 body)

6. Dokažte, že spojitá funkce  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  je omezená shora.

(4 body)