Základní pojmy matematické statistiky II

Osnova:

Základní typy uspořádání pokusů

- jednoduché pozorování
- dvojné pozorování
- mnohonásobné pozorování

Úvod do testování hypotéz

- nulová a alternativní hypotéza
- chyba 1. a 2. druhu
- testování pomocí kritického oboru
- testování pomocí intervalu spolehlivosti
- testování pomocí p-hodnoty

Testování normality

- Kolmogorovův – Smirnovův test a jeho Lilieforsova varianta
- Shapirův – Wilkův test
- Andersonův – Darlingův test
- srovnání S-W testu, A-D testu a Lilieforsova testu pomocí simulačních studií

Základní typy uspořádání pokusů

Metody matematické statistiky často slouží k vyhodnocování výsledků pokusů. Aby mohl být pokus správně vyhodnocen, musí být dobře naplánován. Uvedeme zde nejjednodušší typy uspořádání pokusů.
Předpokládejme například, že sledujeme hmotnostní přírůstky selat téhož plemene při různých výkrmných dietách.

a) Jednoduché pozorování: Náhodná veličina X je pozorována za týchž podmínek. Situace je charakterizována jedním náhodným výběrem $X_1, ..., X_n$.
Náhodně vylosujeme n selat téhož plemene, podrobíme je jediné výkrmné dietě a zjistíme u každého selete hmotnostní přírůstek. Tím dostaneme realizaci jednoho náhodného výběru.

b) Dvojné pozorování: Náhodná veličina X je pozorována za dvojích různých podmínek. Existují dvě odlišná uspořádání tohoto pokusu.

Dvouvýběrové porovnávání: situace je charakterizována dvěma nezávislými náhodnými výběry $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$.

Náhodně vylosujeme n_1 a n_2 selat téhož plemene, náhodně je rozdělíme na dva soubory o n_1 a n_2 jedincích, první podrobíme výkrmné dietě č. 1 a druhý výkrmné dietě číslo 2. Tak dostaneme realizace dvou nezávislých náhodných výběrů.

Párové porovnávání: situace je charakterizována jedním náhodným výběrem $(X_{11}, X_{12}),\ldots,(X_{n1}, X_{n2})$ z dvourozměrného rozložení. Přejdeme k rozdílovému náhodnému výběru $Z_i = X_{i1} - X_{i2}$, i = 1, …, n a tím dostaneme jednoduché pozorování.

Náhodně vylosujeme n vrhů stejně starých selat téhož plemene, z každého odebereme dva sourozence a náhodně jim přiřadíme první a druhou výkrmnou dietu. Tak dostaneme realizaci jednoho dvourozměrného náhodného výběru, kde první složka odpovídá první dietě a druhá složka druhé dietě.

(Párové porovnávání je efektivnější, protože skutečný rozdíl v účinnosti obou diet je překrýván pouze náhodnými vlivy při samotném krmení a trvání, kdežto vliv různých dědičných vloh, který byl losováním znáhodněn, je u sourozeneckého páru selat částečně vyloučen.)

c) Mnohonásobné pozorování: Náhodná veličina X je pozorována za $r \geq 3$ různých podmínek. Existují dvě odlišná uspořádání tohoto pokusu.

Mnohovýběrové porovnávání: situace je charakterizována r nezávislými náhodnými výběry $X_{11}, \dots, X_{1n_1}$ až $X_{r1}, \dots, X_{rn_r}$.

Náhodně vylosujeme n_1 , n_2, …, n_r selat téhož plemene, náhodně je rozdělíme na r souborů o n_1 , n_2, …, n_r jedincích, první podrobíme výkrmné dietě č. 1, druhý výkrmné dietě číslo 2 atd. až r-tý podrobíme výkrmné dietě číslo r. Tak dostaneme realizace r nezávislých náhodných výběrů.

Blokové porovnávání: situace je charakterizována jedním náhodným výběrem $(X_{11}, \dots, X_{1r}), \dots, (X_{n1}, \dots, X_{nr})$ z r-rozměrného rozložení.

Náhodně vylosujeme n vrhů stejně starých selat téhož plemene, z každého odebereme r sourozenců a náhodně jim přiřadíme první až r-tou výkrmnou dietu. Tak dostaneme realizaci jednoho r-rozměrného náhodného výběru, kde první složka odpovídá první dietě , druhá složka druhé dietě atd. až r-tá složka odpovídá r-té dietě.

Úvod do testování hypotéz

Motivace: Častým úkolem statistika je na základě dat ověřit předpoklady o parametrech nebo typu rozložení, z něhož pochází náhodný výběr. Takovému předpokladu se říká nulová hypotéza. Nulová hypotéza vyjadřuje nějaký teoretický předpoklad, často skeptického rázu a uživatel ji musí stanovit předem, bez přihlédnutí k datovému souboru. Proti nulové hypotéze stavíme alternativní hypotézu, která říká, co platí, když neplatí nulová hypotéza. Alternativní hypotéza je formulována tak, aby mohla platit jenom jedna z těchto dvou hypotéz. Pravdivost alternativní hypotézy by znamenala objevení nějakých nových skutečností, nebo zásadnější změnu v dosavadních představách.

Např. výzkumník by chtěl na základě dat prověřit tezi (nový objev), že pasivní kouření škodí zdraví. Jako nulovou hypotézu tedy položí tvrzení, že pasivní kouření neškodí zdraví a proti nulové hypotéze postaví alternativní, že pasivní kouření škodí zdraví.

Testováním hypotéz se myslí rozhodovací postup, který je založen na daném náhodném výběru a s jehož pomocí rozhodneme o zamítnutí či nezamítnutí nulové hypotézy.

Nulová a alternativní hypotéza

Nechť $X_1, ..., X_n$ je náhodný výběr z rozložení $L(\vartheta)$, kde parametr $\vartheta \in \Xi$ neznáme. Nechť $h(\vartheta)$ je parametrická funkce a c daná reálná konstanta.

a) Oboustranná alternativa: Tvrzení H_0: $h(\vartheta) = c$ se nazývá jednoduchá nulová hypotéza. Proti nulové hypotéze postavíme složenou oboustrannou alternativní hypotézu H_1: $h(\vartheta) \neq c$.

b) Levostranná alternativa: Tvrzení H_0: $h(\vartheta) \geq c$ se nazývá složená pravostranná nulová hypotéza. Proti jednoduché nebo složené pravostranné nulové hypotéze postavíme složenou levostrannou alternativní hypotézu H_1: $h(\vartheta) < c$.

c) Pravostranná alternativa: Tvrzení H_0: $h(\vartheta) \leq c$ se nazývá složená levostranná nulová hypotéza. Proti jednoduché nebo složené levostranné nulové hypotéze postavíme složenou pravostrannou alternativní hypotézu H_1: $h(\vartheta) > c$.

Testováním H_0 proti H_1 rozumíme rozhodovací postup založený na náhodném výběru $X_1, ..., X_n$, s jehož pomocí zamítneme či nezamítneme platnost nulové hypotézy.

Chyba 1. a 2. druhu

Při testování H_0 proti H_1 se můžeme dopustit jedné ze dvou chyb: chyba 1. druhu spočívá v tom, že H_0 zamítneme, ač ve skutečnosti platí a chyba 2. druhu spočívá v tom, že H_0 nezamítneme, ač ve skutečnosti neplatí. Situaci přehledně znázorňuje tabulka:

skutečnost	rozhodnutí	
	H_0 nezamítáme	H_0 zamítáme
H_0 platí	správné rozhodnutí	chyba 1. druhu
H_0 neplatí	chyba 2. druhu	správné rozhodnutí

Pravděpodobnost chyby 1. druhu se značí α a nazývá se hladina významnosti testu (většinou bývá $\alpha = 0{,}05$, méně často 0,1 či 0,01). Pravděpodobnost chyby 2. druhu se značí β. Číslo $1–\beta$ se nazývá síla testu a vyjadřuje pravděpodobnost, že bude H_0 zamítnuta za předpokladu, že neplatí. Obvykle se snažíme, aby síla testu byla aspoň 0,8. Obě hodnoty, α i $1–\beta$, závisí na velikosti efektu, který se snažíme detekovat. Čím drobnější efekt, tím musí být větší rozsah náhodného výběru.

skutečnost	rozhodnutí	
	zdravý	nemocný
jsem zdravý	zdravý a neléčený	zdravý a léčený
jsem nemocný	nemocný a neléčený	nemocný a léčený

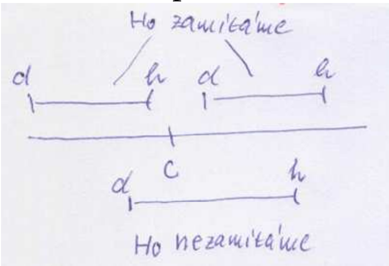
Testování pomocí kritického oboru

Najdeme statistiku $T_0 = T_0(X_1, ..., X_n)$, kterou nazveme testovým kritériem. Množina všech hodnot, jichž může testové kritérium nabýt, se rozpadá na obor nezamítnutí nulové hypotézy (značí se V) a obor zamítnutí nulové hypotézy (značí se W a nazývá se též kritický obor). Tyto dva obory jsou odděleny kritickými hodnotami (pro danou hladinu významnosti α je lze najít ve statistických tabulkách).
Jestliže číselná realizace t_0 testového kritéria T_0 padne do kritického oboru W, pak nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α a znamená to skutečné vyvrácení testované hypotézy. Jestliže t_0 padne do oboru nezamítnutí V, pak jde o pouhé mlčení, které platnost nulové hypotézy jenom připouští.
Pravděpodobnosti chyb 1. a 2. druhu nyní zapíšeme takto:
$P(T_0 \in W/H_0 \text{ platí}) = \alpha$, $P(T_0 \in V/H_1 \text{ platí}) = \beta$.

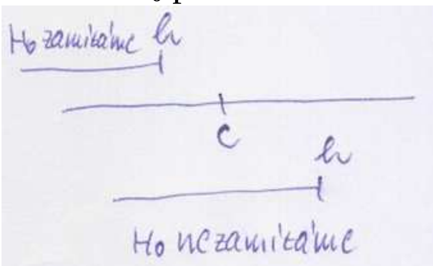
Stanovení kritického oboru pro danou hladinu významnosti α:
Označme t_{min} (resp. t_{max}) nejmenší (resp. největší) hodnotu testového kritéria.
Kritický obor v případě oboustranné alternativy má tvar
$W = \left(t_{min}, K_{\alpha/2}(T)\right\rangle \cup \left\langle K_{1-\alpha/2}(T), t_{max}\right)$, kde $K_{\alpha/2}(T)$ a $K_{1-\alpha/2}(T)$ jsou kvantily rozložení, jímž se řídí testové kritérium T_0, je-li nulová hypotéza pravdivá.
Kritický obor v případě levostranné alternativy má tvar:
$W = \left(t_{min}, K_{\alpha}(T)\right\rangle$.
Kritický obor v případě pravostranné alternativy má tvar:
$W = \left\langle K_{1-\alpha}(T), t_{max}\right)$.

Testování pomocí intervalu spolehlivosti

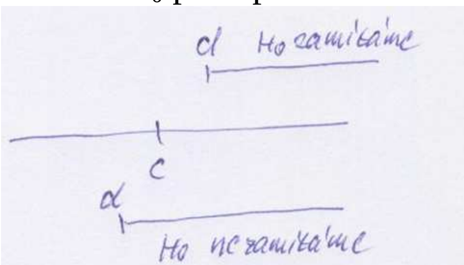
Sestrojíme 100(1-α)% empirický interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $h(\vartheta)$. Pokryje-li tento interval hodnotu c, pak H_0 nezamítáme na hladině významnosti α, v opačném případě H_0 zamítáme na hladině významnosti α.
Pro test H_0 proti oboustranné alternativě sestrojíme oboustranný interval spolehlivosti.



Pro test H_0 proti levostranné alternativě sestrojíme pravostranný interval spolehlivosti.



Pro test H_0 proti pravostranné alternativě sestrojíme levostranný interval spolehlivosti.



Testování pomocí p-hodnoty

p-hodnota udává nejnižší možnou hladinu významnosti pro zamítnutí nulové hypotézy. Je to riziko, že bude zamítnuta H_0 za předpokladu, že platí (riziko planého poplachu). Jestliže p-hodnota $\leq \alpha$, pak H_0 zamítáme na hladině významnosti α, je-li p-hodnota $> \alpha$, pak H_0 nezamítáme na hladině významnosti α.

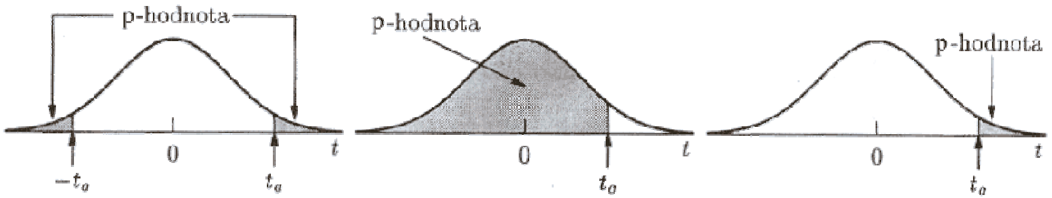
Způsob výpočtu p-hodnoty:

Pro oboustrannou alternativu $p = 2 \min\{P(T_0 \leq t_0), P(T_0 \geq t_0)\}$.

Pro levostrannou alternativu $p = P(T_0 \leq t_0)$.

Pro pravostrannou alternativu $p = P(T_0 \geq t_0)$.

Ilustrace významu p-hodnoty pro test nulové hypotézy proti oboustranné, levostranné a pravostranné alternativě:



(Zvonovitá křivka reprezentuje hustotu rozložení, kterým se řídí testové kritérium, je-li nulová hypotéza pravdivá.)

p-hodnota vyjadřuje pravděpodobnost, s jakou číselné realizace $x_1, ..., x_n$ náhodného výběru $X_1, ..., X_n$ podporují H_0, je-li pravdivá. Statistické programové systémy poskytují ve svých výstupech p-hodnotu. Její výpočet vyžaduje znalost distribuční funkce rozložení, kterým se řídí testové kritérium T_0, je-li H_0 pravdivá.

Doporučený postup při testování hypotéz

1. Stanovíme nulovou hypotézu a alternativní hypotézu. Přitom je vhodné zvolit jako alternativní hypotézu ten předpoklad, jehož přijetí znamená závažné opatření a mělo by k němu dojít jen s malým rizikem omylu.

2. Zvolíme hladinu významnosti α. Zpravidla volíme $\alpha = 0{,}05$, méně často 0,1 nebo 0,01.

3. Najdeme vhodné testové kritérium a na základě zjištěných dat vypočítáme jeho realizaci.

4.
a) Testujeme-li pomocí kritického oboru, pak ho stanovíme. Jestliže realizace testového kritéria padla do kritického oboru, nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme alternativní hypotézu. V opačném případě nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α.
b) Testujeme-li pomocí intervalu spolehlivosti, vypočteme empirický $100(1-\alpha)\%$ interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $h(\vartheta)$. Pokud číslo c padne do tohoto intervalu, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α. V opačném případě nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme alternativní hypotézu.
c) Testujeme-li pomocí p-hodnoty, vypočteme ji a porovnáme ji s hladinou významnosti α. Jestliže $p \le \alpha$, pak nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α a přijímáme alternativní hypotézu. Je-li $p > \alpha$, pak nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti α.

5. Na základě rozhodnutí, které jsme učinili o nulové hypotéze, provedeme nějaké konkrétní opatření, např. seřídíme obráběcí stroj.

(Při testování hypotéz musíme mít k dispozici odpovídající nástroje, nejlépe vhodný statistický software. Nemáme-li ho k dispozici, musíme znát příslušné vzorce. Dále potřebujeme statistické tabulky a kalkulačku.)

Příklad: 10 x nezávisle na sobě byla změřena jistá konstanta μ. Výsledky měření byly: 2 1,8 2,1 2,4 1,9 2,1 2 1,8 2,3 2,2. Tyto výsledky považujeme za číselné realizace náhodného výběru $X_1, \ldots, X_{10}$ z rozložení $N(\mu, 0{,}04)$. Nějaká teorie tvrdí, že $\mu = 1{,}95$.

1. Oboustranná alternativa

Proti nulové hypotéze H_0: $\mu = 1{,}95$ postavíme oboustrannou alternativu
H_1: $\mu \neq 1{,}95$. Na hladině významnosti 0,05 testujte H_0 proti H_1 všemi třemi popsanými způsoby.

Řešení:

$m = \frac{1}{10}(2 + \ldots + 2{,}2) = 2{,}06$, $\sigma^2 = 0{,}04$, $n = 10$, $\alpha = 0{,}05$, $c = 1{,}95$

a) Test provedeme pomocí kritického oboru.

Pro úlohy o střední hodnotě normálního rozložení při známém rozptylu používáme pivotovou statistiku $U = \frac{M-\mu}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}} \sim N(0, 1)$.

Testové kritérium tedy bude

$T_0 = \frac{M-c}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$ a bude mít rozložení N(0, 1), pokud je nulová hypotéza pravdivá. Vypočítáme realizaci testového kritéria:

$t_0 = \frac{2{,}06-1{,}95}{\frac{0{,}2}{\sqrt{10}}} = 1{,}74$. Stanovíme kritický obor:

$W = \left(t_{min}, K_{\alpha/2}(T)\right\rangle \cup \left\langle K_{1-\alpha/2}(T), t_{max}\right) = \left(-\infty, u_{\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right) = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right) = \left(-\infty, -u_{0.975}\right\rangle \cup \left\langle u_{0,975}, \infty\right) =$
$\left(-\infty, -1{,}96\right\rangle \cup \left\langle 1{,}96, \infty\right)$.

Protože $1{,}74 \notin W$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

b) Test provedeme pomocí intervalu spolehlivosti.
Meze 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ při známém rozptylu σ^2 jsou:

$$(d, h) = \left(m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2},\ m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}\right).$$

V našem případě dostáváme:

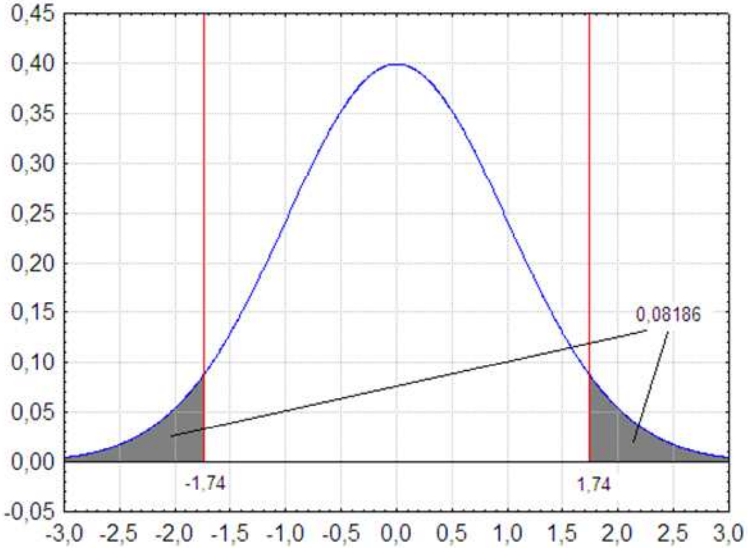
$$d = 2{,}06 - \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} u_{0{,}975} = 2{,}06 - \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} .1{,}96 = 1{,}936,$$

$$h = 2{,}06 + \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} u_{0{,}975} = 2{,}06 + \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} .1{,}96 = 2{,}184.$$

Protože $1{,}95 \in (1{,}936; 2{,}184)$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

c) Test provedeme pomocí p-hodnoty.
Protože proti nulové hypotéze stavíme oboustrannou alternativu, použijeme vzorec
$p = 2 \min\{P(T_0 \leq t_0), P(T_0 \geq t_0)\} = 2 \min \{P(T_0 \leq 1{,}74), P(T_0 \geq 1{,}74)\} =$
$= 2 \min \{ \Phi(1{,}74), 1 - \Phi(1{,}74) \} = 2 \min \{ 0{,}95907, 1 - 0{,}95907 \} = 0{,}08186.$
Jelikož $0{,}08186 > 0{,}05$, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Ilustrace významu p-hodnoty pro oboustranný test



2. Levostranná alternativa

Proti nulové hypotéze H_0: $\mu = 1{,}95$ postavíme levostrannou alternativu H_1: $\mu < 1{,}95$. Na hladině významnosti 0,05 testujte H_0 proti H_1 všemi třemi popsanými způsoby.

Řešení:

a) Test provedeme pomocí kritického oboru.

Na rozdíl od oboustranné alternativy bude mít kritický obor tvar

$W = \langle -\infty, u_{\alpha}) = \langle -\infty, u_{0,05}) = \langle -\infty, -1{,}645)$.

Protože $1{,}74 \notin W$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

b) Test provedeme pomocí intervalu spolehlivosti.

Meze $100(1-\alpha)\%$ empirického pravostranného intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ při známém rozptylu σ^2 jsou:

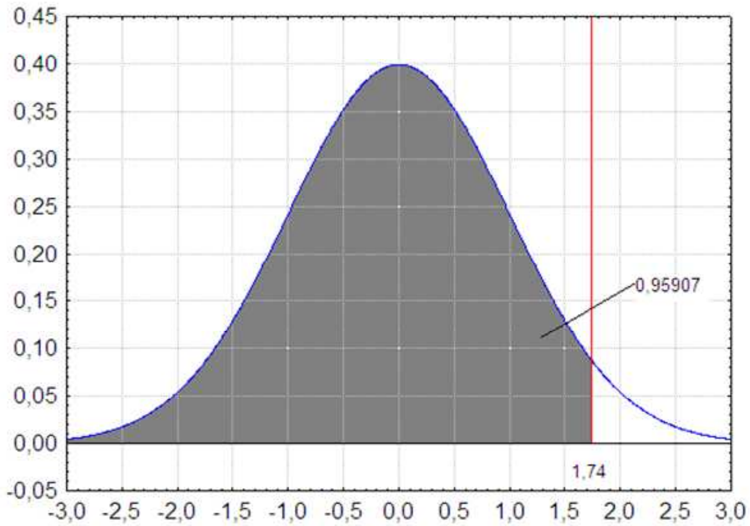
$(-\infty, h) = (-\infty, m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha})$.

V našem případě dostáváme: $h = 2{,}06 + \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} u_{0,95} = 2{,}06 + \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} .1{,}645 = 2{,}164$.

Protože $1{,}95 \in (-\infty; 2{,}164)$, H_0 nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

c) Test provedeme pomocí p-hodnoty.
Protože proti nulové hypotéze stavíme levostrannou alternativu, použijeme vzorec
$p = P(T_0 \leq t_0) = \Phi(1{,}74) = 0{,}95907$.
Jelikož $0{,}95907 > 0{,}05$, nulovou hypotézu nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Ilustrace významu p-hodnoty pro levostranný test



3. Pravostranná alternativa

Proti nulové hypotéze H_0: $\mu = 1{,}95$ postavíme pravostrannou alternativu
H_1: $\mu > 1{,}95$. Na hladině významnosti 0,05 testujte H_0 proti H_1 všemi třemi popsanými způsoby.

Řešení:

a) Test provedeme pomocí kritického oboru.

Na rozdíl od oboustranné alternativy bude mít kritický obor tvar

$W = \langle u_{1-\alpha}, \infty) = \langle u_{0,95}, \infty) = \langle 1{,}645, \infty)$.

Protože $1{,}74 \in W$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05 ve prospěch pravostranné alternativy.

b) Test provedeme pomocí intervalu spolehlivosti.

Meze $100(1-\alpha)\%$ empirického levostranného intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu μ při známém rozptylu σ^2 jsou:

$(d, \infty) = (m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha}, \infty)$.

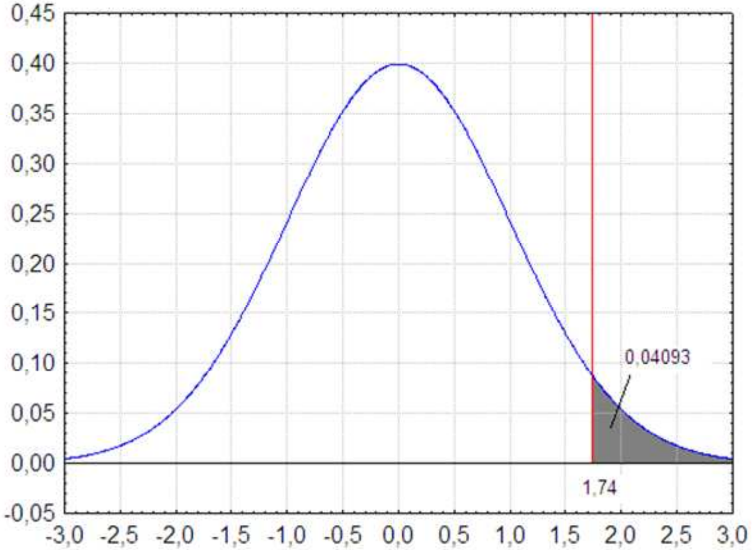
V našem případě dostáváme: $d = 2{,}06 - \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} u_{0,95} = 2{,}06 - \frac{0{,}2}{\sqrt{10}} .1{,}645 = 1{,}956$.

Protože $1{,}95 \notin (1{,}956, \infty)$, H_0 zamítáme na hladině významnosti 0,05 ve prospěch pravostranné alternativy.

c) Test provedeme pomocí p-hodnoty.

Protože proti nulové hypotéze stavíme pravostrannou alternativu, použijeme vzorec
$p = P(T_0 \geq t_0) = 1 - \Phi(1{,}74) = 1 - 0{,}95907 = 0{,}04093$.
Jelikož $0{,}04093 \leq 0{,}05$, nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti 0,05 ve prospěch pravostranné alternativy.

Ilustrace významu p-hodnoty pro pravostranný test



Testy normality dat

K ověřování normality dat slouží celá řada testů, které jsou podrobně popsány ve statistické literatuře. Zde se omezíme na tři testy, které jsou implementovány v systému STATISTICA, a to Kolmogorovův – Smirnovův test a jeho Lilieforsovu variantu, Shapirův – Wilksův test a Andersenův – Darlingův test.

K závěrům těchto testů však přistupujeme s určitou opatrností. Máme-li k dispozici rozsáhlejší datový soubor (orientačně n > 30) a test zamítne na obvyklé hladině významnosti 0,01 nebo 0,05 hypotézu o normalitě, i když vzhled diagnostických grafů svědčí jenom o lehkém porušení normality, nedopustíme se závažné chyby, pokud použijeme statistickou metodu založenou na normalitě dat.

Kolmogorovův – Smirnovův test a jeho Lilieforsova varianta

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ pochází z normálního rozložení s parametry μ a σ^2.

Distribuční funkci tohoto rozložení označme $\Phi_T(x)$.

Nechť $F_n(x)$ je výběrová distribuční funkce.

Testovou statistikou je statistika $D_n = \sup\limits_{-\infty<x<\infty} \left|F_n(x) - \Phi_T(x)\right|$.

Nulovou hypotézu zamítáme na hladině významnosti α, když $D_n \geq D_n(\alpha)$, kde $D_n(\alpha)$ je tabelovaná kritická hodnota.

Pro $n \geq 30$ lze $D_n(\alpha)$ aproximovat výrazem $\sqrt{\frac{1}{2n}\ln\frac{2}{\alpha}}$.

Shapirův – Wilkův test normality dat

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr $X_1, \ldots, X_n$ pochází z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

Testová statistika má tvar:

$$W = \frac{\sum_{i=1}^{m} a_i^{(n)} \left[X_{(n-i+1)} - X_{(i)}\right]^2}{\sum_{i=1}^{m} (X_i - M)^2},$$

kde $m = n/2$ pro n sudé a $m = (n-1)/2$ pro n liché. Koeficienty $a_i^{(n)}$ jsou tabelovány.

Na testovou statistiku W lze pohlížet jako na korelační koeficient mezi uspořádanými pozorováními a jim odpovídajícími kvantily standardizovaného normálního rozložení. V případě, že data vykazují perfektní shodu s normálním rozložením, bude mít W hodnotu 1. Hypotézu o normalitě tedy zamítneme na hladině významnosti α, když se na této hladině neprokáže korelace mezi daty a jim odpovídajícími kvantily rozložení N(0,1).

Lze také říci, že S – W test je založen na zjištění, zda body v Q-Q grafu jsou významně odlišné od regresní přímky proložené těmito body.

(S-W test se používá především pro výběry menších rozsahů, $n < 50$, ale v systému STATISTICA je implementováno jeho rozšíření i na výběry velkých rozsahů, kolem 2000.)

Andersonův – Darlingův test

Testujeme hypotézu, která tvrdí, že náhodný výběr $X_1, ..., X_n$ pochází z normálního rozložení $N(\mu, \sigma^2)$.

Testová statistika má tvar:

$$AD = -\frac{1}{n}\left[\sum_{i=1}^{n}(2i-1)\left\{\ln\Phi\left(\frac{x_{(i)}-m}{s}\right)+\ln\left(1-\Phi\left(\frac{x_{n+1-(i)}-m}{s}\right)\right)\right\}\right]-n\,,$$

kde $x_{(i)}$ jsou vzestupně uspořádané realizace náhodného výběru, Φ je distribuční funkce rozložení N(0,1).

Hypotéza H_0 se zamítá na hladině významnosti α, je-li vypočítaná hodnota testové statistiky AD větší než kritická hodnota $D_{1-\alpha}$. Pro velký rozsah výběru se přibližná 95% kritická hodnota počítá podle vzorce

$$D_{0,95} = 1{,}0348\left(1-\frac{1{,}013}{n}-\frac{0{,}93}{n^2}\right)$$

Příklad:

Jsou dány hodnoty 10, 12, 8, 9, 16. Pomocí Lilieforsova testu, S – W testu a A – D testu testujte na hladině významnosti 0,05 hypotézu, že tato data pocházejí z normálního rozložení.

Řešení:

Vytvoříme nový datový soubor o jedné proměnné nazvané X a pěti případech. Do proměnné X zapíšeme uvedené hodnoty.

Provedení Lilieforsova a S-W testu:

V menu vybereme Statistiky – Základní statistiky/tabulky – Tabulky četností – OK, Proměnné X – OK. Na záložce zvolíme Normalita a zaškrtneme Lilieforsův test a Shapiro – Wilksův W test – Testy normality.

	Testy normality (Tabulka1)				
Proměnná	N	max D	Lilliefors p	W	p
X	5	0,224085	p > .20	0,912401	0,482151

Vidíme, že testová statistika K-S testu je d = 0,22409, odpovídající Lilieforsova p-hodnota je větší než 0,2, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Testová statistika S-W testu je W = 0,9124, odpovídající p-hodnota je 0,48215, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

Provedení A - D testu:

Statistiky – Rozdělení & simulace – proložení dat rozděleními – OK – Proměnné Spojité: X – na záložce Spojité proměnné ponecháme zaškrtnuté pouze Normální, na záložce Možnosti vybereme Anderson – Darling – OK – Souhrnné statistiky rozdělení.

	Souhrn rozdělení for Proměnná: x (Tabulka4)							
	K-S d	K-S p-hodn.	AD stat.	AD p-hodn.	Chí-kvadrát	Chí-kvadr. p-hodn.	Chí-kvadr. SV	Posun (práh/poloha)
Normální (poloha,měřítko)	0,224085	0,915101	0,295219	0,940172				

Testová statistika A – D testu je 0,2952, odpovídající p-hodnota je 0,9402, tedy hypotézu o normalitě nezamítáme na hladině významnosti 0,05.

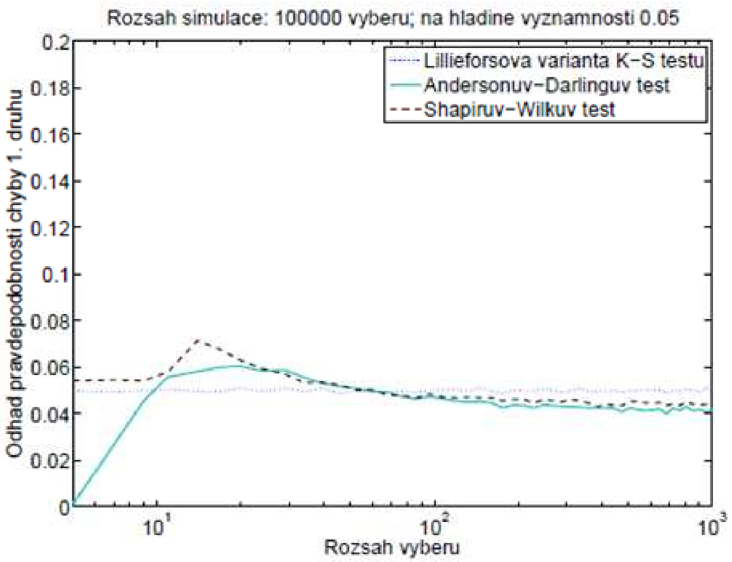
Srovnání S-W testu, Lilieforsovy varianty K-S testu a A-D testu pomocí simulačních studií

Simulační studie byly provedeny v bakalářské práci Marka Haičmana Simulace a testy normality.

Odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu

Bylo vygenerováno 100 000 náhodných výběrů z normálního rozložení, jejichž rozsahy se pohybovaly od 5 do 1000. Na tyto výběry byly aplikovány oba testy (s hladinou významnosti 0,05) a byla stanovena relativní četnost těch případů, kdy došlo k neoprávněnému zamítnutí pravdivé nulové hypotézy. Tato relativní četnost je považována za odhad pravděpodobnosti chyby 1. druhu.

Závislost odhadu pravděpodobnosti chyby 1. druhu na rozsahu výběru (hodnoty na vodorovné ose jsou logaritmovány)



Výsledek:

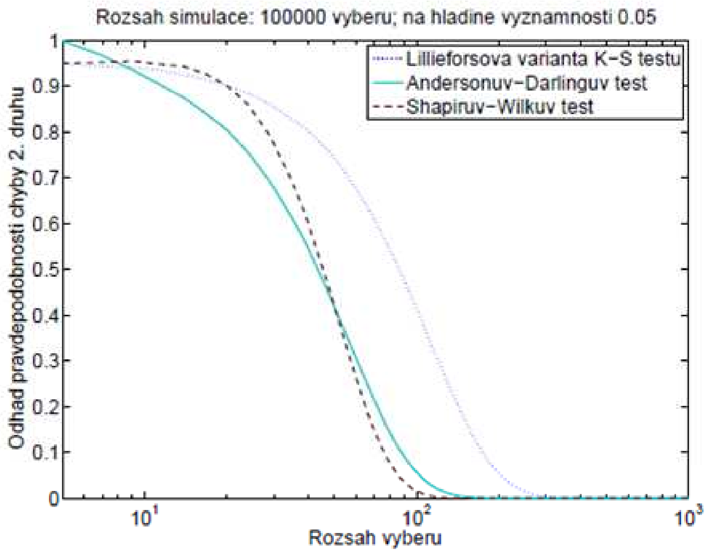
Lileforsův test má pravděpodobnost chyby 1. druhu nezávislou na rozsahu výběru, udržuje se na 5 %.

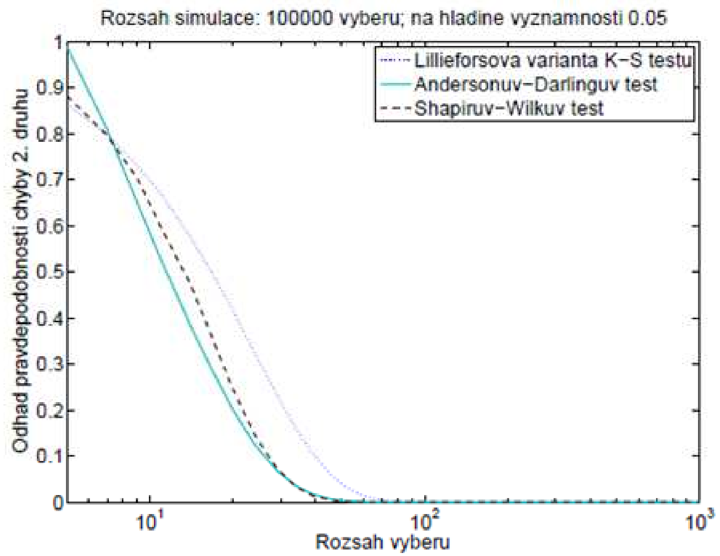
S-W test má do velikosti výběru 60 vyšší pravděpodobnost chyby 1. druhu, poté poklesne pod 5 % a již nevystoupí nad 5 %.

Odhad pravděpodobnosti chyby 2. druhu

Pro toto zkoumání byla vybrána následující rozložení: rovnoměrné spojité, exponenciální, logaritmicko – normální, Studentovo s jedním, třemi a pěti stupni volnosti. Pro každé z těchto rozložení bylo vygenerováno 100 000 náhodných výběrů o rozsazích 5 až 1 000. Při aplikaci všech tří testů byla zjišťována relativní četnost těch případů, kdy test nezamítl nepravdivou nulovou hypotézu. Tato relativní četnost je považována za odhad pravděpodobnosti chyby 2. druhu.

Ilustrace pro rovnoměrné spojité rozložení a exponenciální rozložení: závislost odhadu pravděpodobnosti chyby 2. druhu na rozsahu výběru (hodnoty na vodorovné ose jsou logaritmovány)





Výsledek:

Lilieforsův test a A-D test nejméně chybují u velmi malých výběrů, orientačně do 10 prvků.
S-W test a A-D test se pro výběry větších rozsahů (nad 60) vesměs nedopouštějí chyby. K chybám však dochází i pro velmi rozsáhlé výběry ze Studentova rozložení.

Stanovení hranice 20 % odhadu pravděpodobnosti chyby 2. druhu

Zde byl hledán rozsah výběru z rovnoměrného, exponenciálního, logaritmicko – normálního a Studentova rozložení tak, aby odhadu pravděpodobnosti chyby 2. druhu byl nanejvýš 20 %.

Tabulka minimálních rozsahů výběrů, pro něž je odhad pravděpodobnosti chyby 2. druhu nejvýše 20 %:

Test normality	Norm	Rovno.	Expo.	Logn.	Stud(1)	Stud(3)	Stud(5)
Anderson-Darling	–	72	21	15	16	87	247
Lilliefors	–	143	32	21	18	121	377
Shapiro-Wilk	–	65	22	17	19	89	221

Výsledek:

S-W test a A-D test je možno použít na výběry menších rozsahů než Lilieforsův test.

U výběrů, jejichž rozsah je menší než 15, nemá příliš smysl testovat hypotézu o normalitě, neboť pravděpodobnost chyby 2. druhu je příliš vysoká (nad 70 %).