Parametrické úlohy o jednom a dvou výběrech z alternativního rozložení

Osnova:

Případ jednoho náhodného výběru

- asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru alternativního rozložení
- vzorec pro meze intervalu spolehlivosti pro parametr alternativního rozložení
- testování hypotézy o parametru alternativního rozložení

Případ dvou nezávislých náhodných výběrů

- asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrových průměrů dvou nezávislých alternativních rozložení
- vzorec pro meze intervalu spolehlivosti pro rozdíl parametrů dvou alternativních rouložení
- testování hypotézy o rozdílu parametrů dvou alternativních rozložení

Případ jednoho náhodného výběru: S náhodným výběrem rozsahu n z alternativního rozložení se setkáváme v situaci, kdy provádíme n opakovaných nezávislých pokusů a v každém z těchto pokusů sledujeme nastoupení úspěchu. Pravděpodobnost úspěchu je pro všechny pokusy stejná. Náhodná veličina X_i nabude hodnoty 1, pokud v i-tém pokusu nastal úspěch a hodnoty 0, pokud v i-tém pokusu úspěch nenastal, i = 1, 2, …, n. Realizací náhodného výběru $X_1, \ldots, X_n$ je tedy posloupnost 0 a 1.

Opakování:

Alternativní rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v jednom pokusu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je ϑ. Píšeme X ~ A(ϑ).

$$\pi(x) = \begin{cases} 1-\vartheta \text{ pro } x=0 \\ \vartheta \text{ pro } x=1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases} \quad \text{neboli } \pi(x) = \begin{cases} \vartheta^x (1-\vartheta)^{1-x} \text{ pro } x = 0,1 \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

Binomické rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakovaných pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu ϑ. Píšeme X ~ Bi(n, ϑ).

$$\pi(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \vartheta^x (1-\vartheta)^{n-x} \text{ pro } x = 0, \ldots, n \\ 0 \text{ jinak} \end{cases}$$

E(X) = nϑ, D(X) = nϑ (1-ϑ)

(Alternativní rozložení je speciálním případem binomického rozložení pro n = 1.

Jsou-li $X_1, \ldots, X_n$ stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, i = 1, ..., n, pak $X = \sum_{i=1}^{n} X_i \sim Bi(n, \vartheta)$.)

Centrální limitní věta:

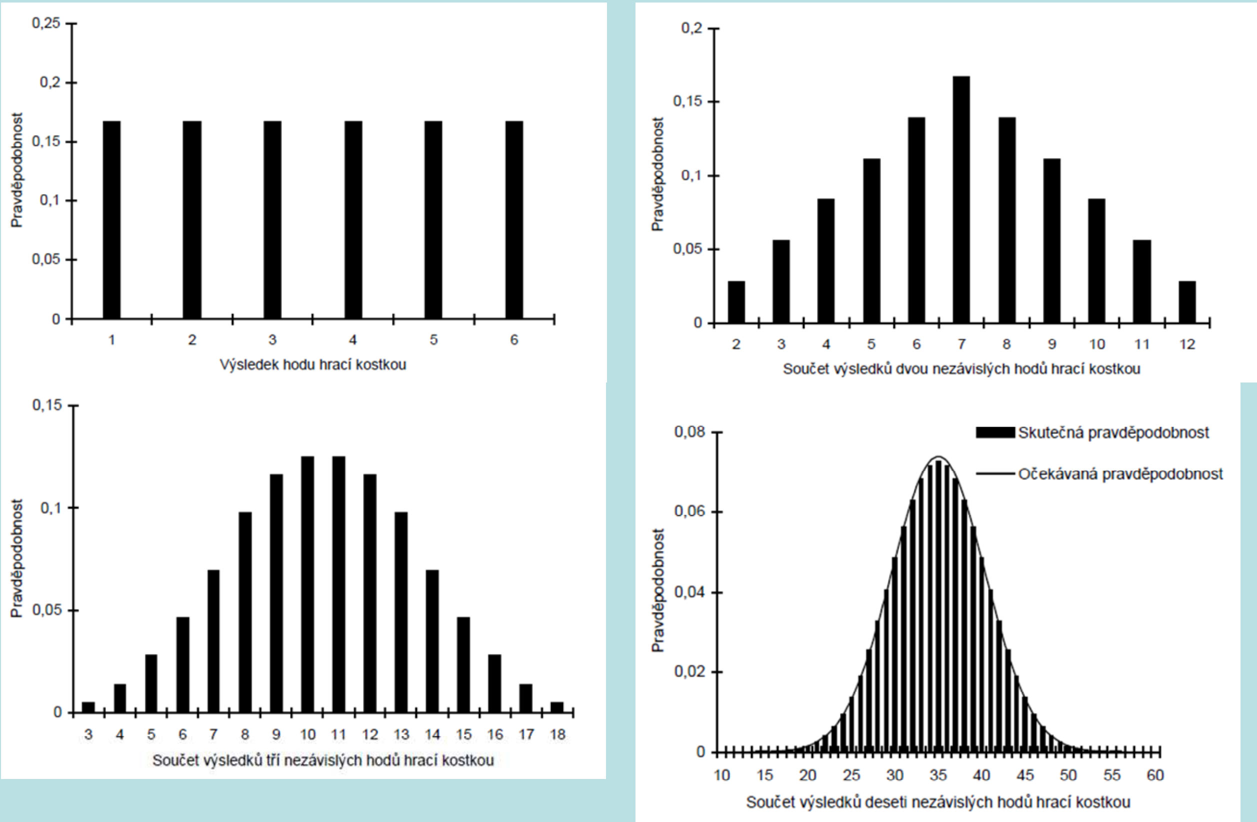
Jsou-li náhodné veličiny $X_1, \ldots, X_n$ stochasticky nezávislé a všechny mají stejné rozložení se střední hodnotou μ a rozptylem σ^2, pak pro velká n ($n \geq 30$) lze rozložení součtu $\sum_{i=1}^{n} X_i$ aproximovat normálním rozložením $N(n\mu, n\sigma^2)$.

Zkráceně píšeme $\sum_{i=1}^{n} X_i \approx N\left(n\mu, n\sigma^2\right)$.

Pokud součet $\sum_{i=1}^{n} X_i$ standardizujeme, tj. vytvoříme náhodnou veličinu $U_n = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, pak rozložení této náhodné veličiny lze aproximovat standardizovaným normálním rozložením. Zkráceně píšeme $U_n \approx N(0,1)$

Normální rozložení je tedy rozložením limitním, k němuž se blíží všechna rozložení, proto hraje velmi důležitou roli v počtu pravděpodobnosti a matematické statistice.

Ilustrace centrální limitní věty – opakované hody kostkou



Asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení A(ϑ) a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$.

Pak statistika $U = \dfrac{M-\vartheta}{\sqrt{\dfrac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}}$ konverguje v distribuci k náhodné veličině se standardizovaným normálním rozložením.

(Říkáme, že U má asymptoticky rozložení N(0,1) a píšeme U ≈ N(0,1).)

Vysvětlení:

Protože $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení A(ϑ), bude mít statistika $Y_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ (výběrový úhrn) rozložení Bi(n, ϑ).

Y_n má střední hodnotu $E(Y_n) = n\vartheta$ a rozptyl $D(Y_n) = n\vartheta(1-\vartheta)$. Podle centrální limitní věty se standardizovaná statistika $U = \dfrac{Y_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}$ asymptoticky řídí standardizovaným normálním rozložením N(0,1). Pokud čitatele i jmenovatele podělíme n,

dostaneme vyjádření: $U = \dfrac{\dfrac{Y_n}{n} - \vartheta}{\sqrt{\dfrac{n\vartheta(1-\vartheta)}{n^2}}} = \dfrac{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \vartheta}{\sqrt{\dfrac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} = \dfrac{M-\vartheta}{\sqrt{\dfrac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} \approx N(0,1)$

Vzorec pro meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ jsou:

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2},\ h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}.$$

Vysvětlení:

Pokud rozptyl $D(M) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$ nahradíme odhadem $\frac{M(1-M)}{n}$, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením N(0,1) se neporuší. Tedy

$$\forall\vartheta \in \Xi : 1-\alpha \le P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M-\vartheta}{\sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}} < u_{1-\alpha/2}\right) =$$

$$= P\left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}u_{1-\alpha/2} < \vartheta < M + \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}u_{1-\alpha/2}\right)$$

Příklad:

Náhodně bylo vybráno 100 osob a zjištěno, že 34 z nich nakupuje v internetových obchodech. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba nakupuje v internetových obchodech.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny $X_1, ..., X_{100}$, přičemž $X_i = 1$, když i-tá osoba nakupuje v internetových obchodech a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, ..., 100$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

$n = 100$, $m = 34/100$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: parametr ϑ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem. Pak $100.0,34.0,66 = 22,44 > 9$.

$$d = 0,34 - \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}}1,96 = 0,2472,\ h = 0,34 + \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}}1,96 = 0,4328\,.$$

S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy $0,2472 < \vartheta < 0,4328$. Znamená to, že s pravděpodobností přibližně 95% je v uvažované populaci nejméně 24,7% a nejvíce 43,3% osob, které nakupují v internetových obchodech.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Použijeme modul Analýza síly testu

Statistiky – Analýza síly testu – Odhad intervalu – Jeden podíl, Z, Chí-kvadrát test – OK – Pozorovaný podíl p: 0,34, Velikost vzorku: 100, Spolehlivost: 0,95 – Vypočítat.

Dostaneme tabulku:

	Hodnota
Podíl vzorku p	0,3400
Velikost vz. ve skup. (N)	100,0000
Interval spolehlivosti	0,9500
Meze spolehlivosti:	
Pí (přesně):	
Dolní mez	0,2482
Horní mez	0,4415
Pí (přibližně):	
Dolní mez	0,2501
Horní mez	0,4423
Pí (původ.):	
Dolní mez	0,2472
Horní mez	0,4328

Zajímá nás výsledek uvedený v dolní části tabulky, tj. Pí (původ.). Zjišťujeme, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost nákupu v internetových obchodech bude pohybovat v mezích 0,2472 až 0,4328.

Příklad: Kolik osob musíme vybrat, abychom podíl modrookých osob v populaci odhadli se spolehlivostí 90% a šířka intervalu spolehlivosti byla nanejvýš a) 0,06, b) 0,01?

Řešení:
Šířka 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ:

$$h-d = m+\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} - \left(m-\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}\right) = 2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2}$$

Požadujeme, aby h – d ≤ Δ, tedy $2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} \le \Delta$. Odtud vyjádříme $n \ge \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}{}^2}{\Delta^2}$.

Předpokládejme, že nemáme žádné předběžné informace o podílu modrookých osob v populaci. Musíme tedy zvolit takové m, aby šířka intervalu spolehlivosti byla maximální. Maximalizujeme výraz $m(1-m) = m - m^2$. Derivujeme podle m a položíme rovno 0: $1-2m=0 \Rightarrow m=\frac{1}{2}$.V tomto případě volíme relativní četnost m = 0,5.

ad a) $n \ge \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}{}^2}{\Delta^2} = \frac{4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot u_{0{,}95}{}^2}{0{,}06^2} = \frac{4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}645^2}{0{,}06^2} = 751{,}67$

Uvedenou podmínku tedy splníme, když vybereme aspoň 752 osob.

ad b) $n \ge \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}{}^2}{\Delta^2} = \frac{4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot u_{0{,}95}{}^2}{0{,}01^2} = \frac{4\cdot 0{,}5\cdot 0{,}5\cdot 1{,}645^2}{0{,}01^2} = 27060{,}25$

Chceme-li dosáhnout podstatně užšího intervalu spolehlivosti, musíme vybrat aspoň 27 061 osob.

Modifikace: Předpokládejme, že v populaci je nanejvýš 30% modrookých osob. Pak relativní četnost m = 0,3.

ad a) $$n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^{2}}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot u_{0{,}95}^{2}}{0{,}06^2} = \frac{4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}645^2}{0{,}06^2} = 631{,}41$$

V tomto případě stačí vybrat 632 osob.
Ve srovnání s předešlým případem vidíme, že rozsah výběru skutečně klesl.

ad b)

$$n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^{2}}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot u_{0{,}95}^{2}}{0{,}01^2} = \frac{4 \cdot 0{,}3 \cdot 0{,}7 \cdot 1{,}645^2}{0{,}01^2} = 22730{,}61$$

V tomto případě musíme vybrat aspoň 22 731 osob.

Testování hypotézy o parametru ϑ

Nechť $X_1, \ldots, X_n$ je náhodný výběr z rozložení A(ϑ) a nechť je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$.

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu

H_0: ϑ = c proti alternativě H_1: $\vartheta \neq c$ (resp. H_1: $\vartheta < c$ resp. H_1: $\vartheta > c$).

Testovým kritériem je statistika $T_0 = \dfrac{M-c}{\sqrt{\dfrac{c(1-c)}{n}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1).

Kritický obor má tvar $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha/2}\right\rangle \cup \left\langle u_{1-\alpha/2}, \infty\right)$ (resp. $W = \left(-\infty, -u_{1-\alpha}\right\rangle$ resp. $W = \left\langle u_{1-\alpha}, \infty\right)$).

(Testování hypotézy o parametru ϑ lze samozřejmě provést i pomocí 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Příklad: Podíl zmetků při výrobě určité součástky činí ϑ = 0,01. Bylo náhodně vybráno 1000 výrobků a zjistilo se, že mezi nimi je 16 zmetků. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu H_0: ϑ = 0,01 proti oboustranné alternativě H_1: $\vartheta \neq 0{,}01$.

Řešení:
Zavedeme náhodné veličiny $X_1, ..., X_{1000}$, přičemž $X_i = 1$, když i-tý výrobek byl zmetek a $X_i = 0$ jinak, i = 1, ..., 1000. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení A(ϑ).
Testujeme hypotézu H_0: ϑ = 0,01 proti alternativě H_1: $\vartheta \neq 0{,}01$.
Známe: n = 1000, $m = \frac{16}{1000} = 0{,}016$, c = 0,01, α = 0,05, $u_{1-\alpha/2} = u_{0{,}975} = 1{,}96$
Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: 1000.0,01.0,99 = 9,9 > 9.

a) Testování pomocí kritického oboru:
Realizace testového kritéria: $t_0 = \dfrac{m-c}{\sqrt{\dfrac{c\cdot(1-c)}{n}}} = \dfrac{0{,}016-0{,}01}{\sqrt{\dfrac{0{,}01\cdot 0{,}99}{1000}}} = 1{,}907$.
Kritický obor: $W = \left(-\infty, -u_{0{,}975}\right\rangle \cup \left\langle u_{0{,}975}, \infty\right) = \left(-\infty, -1{,}96\right\rangle \cup \left\langle 1{,}96, \infty\right)$. Protože 1,907 $\notin$ W, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

b) Testování pomocí intervalu spolehlivosti

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} = 0{,}016 - \sqrt{\frac{0{,}016\cdot 0{,}984}{1000}}1{,}96 = 0{,}0082$$

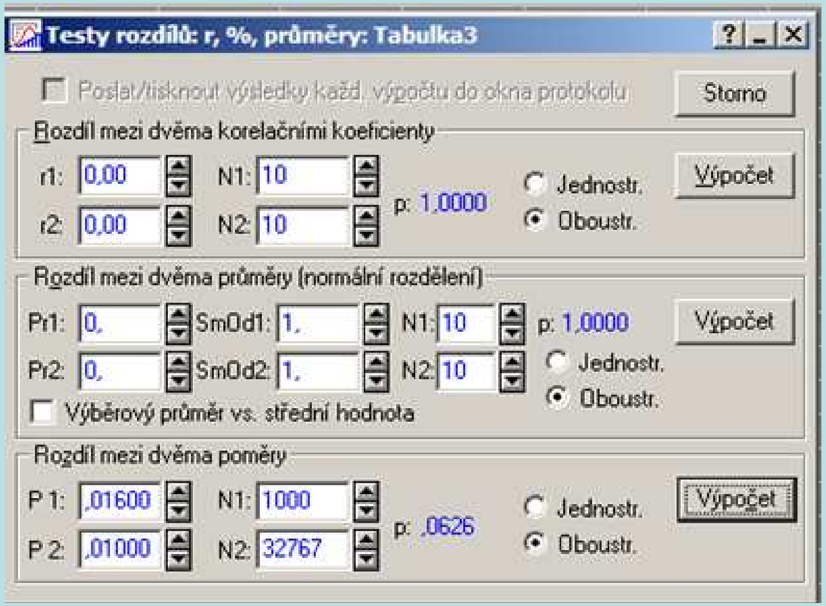
$$h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}}u_{1-\alpha/2} = 0{,}016 + \sqrt{\frac{0{,}016\cdot 0{,}984}{1000}}1{,}96 = 0{,}0238$$

Protože číslo c = 0,01 leží v intervalu 0,0082 až 0,0238, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

c) Testování pomocí p-hodnoty
Protože testujeme nulovou hypotézu proti oboustranné alternativě, vypočteme p-hodnotu podle vzorce:
p = 2 min{ Φ(1,907), 1–Φ(1,907) } = 2 min { 0,97104, 1 – 0,97104 } = 0,05792.
Protože vypočtená p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA (pouze přibližný):

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,016, do políčka N1 napíšeme 1000, do políčka P 2 napíšeme 0,01, do políčka N2 napíšeme 32767 (větší hodnotu systém neumožní) - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0626, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.



Příklad: Nový léčebný postup považujeme za úspěšný, pokud po jeho ukončení bude dosaženo zlepšení zdravotního stavu u alespoň 50% zúčastněných pacientů. Nová terapie byla vyzkoušena u 40 pacientů a ke zlepšení došlo u 24 osob, tj. u 60%. Je možné na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že tato terapie nedosahuje úspěšnosti aspoň 50%?

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny $X_1, \dots, X_{40}$, přičemž
$X_i = 1$, když terapie u i-tého pacienta byl úspěšná a
$X_i = 0$ jinak,
$i = 1, \dots, 40$.
Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.
Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta \leq 0,5$ proti pravostranné alternativě H_1: $\vartheta > 0,5$.

Známe: $n = 40$, $m = \frac{24}{40} = 0,6$, $c = 0,5$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,645$

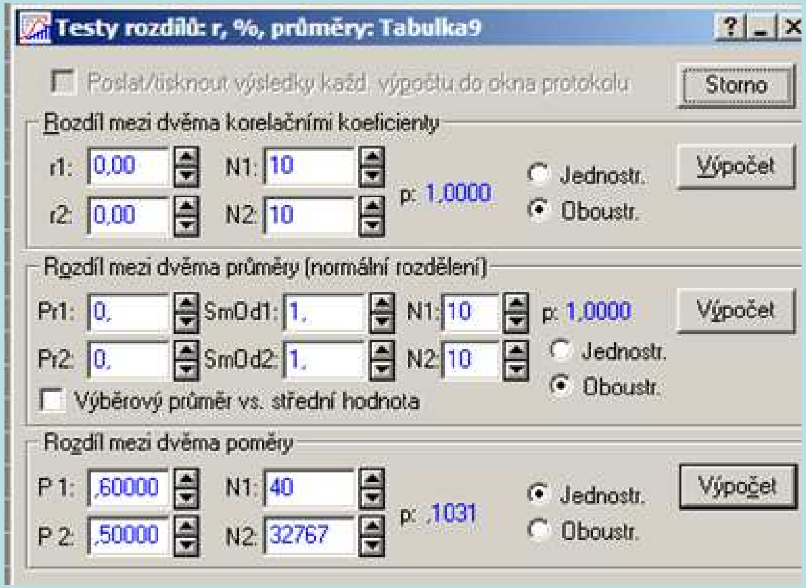
Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: 40.0,6.0,4 = 9,6 > 9.

Realizace testového kritéria: $t_0 = \dfrac{m-c}{\sqrt{\dfrac{c\cdot(1-c)}{n}}} = \dfrac{0,6-0,5}{\sqrt{\dfrac{0,5\cdot 0,5}{40}}} = 1,2649$.

Kritický obor: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty) = \langle u_{0,95}, \infty) = \langle 1,645, \infty)$.

Protože $1,2649 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:



Vypočtená p-hodnota jednostranného testu je 0,1031, tedy větší než asymptotická hladina významnosti 0,05. H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Případ dvou nezávislých výběrů z alternativních rozložení: Provádíme opakovaně nezávisle n_1-krát jeden náhodný pokus a nezávisle na tom n_2-krát druhý náhodný pokus. V první sérii pokusů sledujeme nějaký jev, který v každém pokusu může nastat s pravděpodobností ϑ_1 a ve druhé sérii pokusů sledujeme nějaký jiný jev, jehož pravděpodobnost nastoupení je ϑ_2. Parametry ϑ_1, ϑ_2 neznáme. Naším úkolem bude konstruovat interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ nebo testovat hypotézu o této parametrické funkci, a to pomocí dvou nezávislých náhodných výběrů z alternativních rozložení $A(\vartheta_1)$, $A(\vartheta_2)$.

Asymptotické rozložení statistiky odvozené ze dvou výběrových průměrů alternativních rozložení

Nechť $X_{11},\ldots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z alternativního rozložení $A(\vartheta_1)$ a $X_{21},\ldots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení $A(\vartheta_2)$ a nechť jsou splněny podmínky $n_1\vartheta_1(1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2\vartheta_2(1-\vartheta_2) > 9$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry.

Pak statistika $U = \dfrac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\dfrac{\vartheta_1(1-\vartheta_1)}{n_1} + \dfrac{\vartheta_2(1-\vartheta_2)}{n_2}}} \approx N(0,1)$.

Vysvětlení: Analogicky jako v případě jednoho náhodného výběru z alternativního rozložení.

Vzorec pro meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$.

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2},\quad h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2}$$

Vysvětlení: Pokud rozptyl $D(M_i) = \frac{\vartheta_i(1-\vartheta_i)}{n_i}$ nahradíme odhadem $\frac{M_i(1-M_i)}{n_i}$, i = 1, 2, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením N(0,1) se neporuší. Tedy

$$\forall \vartheta_1 - \vartheta_2 \in \Xi : 1-\alpha \le P\left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}} < u_{1-\alpha/2}\right) =$$

$$P(M_1 - M_2 - \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2} < \vartheta_1 - \vartheta_2 < M_1 - M_2 + \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2})$$

Příklad: Management supermarketu vyhlásil týden slev a sledoval, zda toto vyhlášení má vliv na podíl větších nákupů (nad 500 Kč). Na základě náhodného výběru 200 zákazníků v týdnu bez slev bylo zjištěno 97 velkých nákupů, zatímco v týdnu se slevou z 300 náhodně vybraných zákazníků učinilo velký nákup 162 zákazníků. Sestrojte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro rozdíl pravděpodobností uskutečnění většího nákupu v týdnu bez slevy a v týdnu se slevou.

Řešení:

Zavedeme náhodnou veličinu X_{1i}, která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu bez slevy i-tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, i = 1, …, 200. Náhodné veličiny $X_{1,1}, \ldots, X_{1,200}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_1)$. Dále zavedeme náhodnou veličinu X_{2i}, která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu se slevou i-tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, i = 1, …, 300. Náhodné veličiny $X_{2,1}, \ldots, X_{2,300}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_2)$.

$n_1 = 200$, $n_2 = 300$, $m_1 = 97/200 = 0{,}485$, $m_2 = 162/300 = 0{,}54$.

Ověření podmínek $n_1\vartheta_1(1-\vartheta_1) > 9$ a $n_2\vartheta_2(1-\vartheta_2) > 9$: Parametry ϑ_1 a ϑ_2 neznáme, nahradíme je odhady m_1 a m_2, tedy

97.(1-97/200) = 49,955 > 9, 162.(1-162/300) = 74,52 > 9.

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} - \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}}\,1{,}96 = -0{,}1443$$

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha/2} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}}\,1{,}96 = 0{,}0343$$

Zjistili jsme tedy, že s pravděpodobností přibližně 0,95: $-0{,}1443 < \vartheta_1 - \vartheta_2 < 0{,}0343$.

Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$

Nechť $X_{11},\dots,X_{1n_1}$ je náhodný výběr z alternativního rozložení A(ϑ_1) a $X_{21},\dots,X_{2n_2}$ je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení A(ϑ_2) a nechť jsou splněny podmínky $n_1\vartheta_1$ (1-ϑ_1) > 9 a $n_2\vartheta_2$ (1-ϑ_2) > 9. Na asymptotické hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu H_0: $\vartheta_1 - \vartheta_2 = c$ proti alternativě H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 \neq c$

(resp. H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 < c$ resp. H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 > c$).

Testovým kritériem je statistika

$$T_0 = \frac{M_1 - M_2 - c}{\sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}},$$ která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1).

Kritický obor má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$

(resp. $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$ resp. $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$).

(Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ lze provést též pomocí 100(1-α)% asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Poznámka: Postup při testování hypotézy $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$

Je-li c = 0, pak označme $M_* = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{n_1 + n_2}$ vážený průměr výběrových průměrů. Jako testová statistika slouží

$$T_0 = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1 - M_*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}},$$ která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení N(0,1).

Kritický obor má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}\rangle \cup \langle u_{1-\alpha/2}, \infty)$ (resp. $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle$ resp. $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty)$).

Testová statistika T_0 vznikne standardizací statistiky $M_1 - M_2$, kde neznámé parametry ϑ_1, ϑ_2 nahradíme společným odhadem M_*.

Příklad: Pro údaje z příkladu o slevách v supermarketu testujte na asymptotické hladině významnosti 0,05 hypotézu, že týden se slevami nezvýší pravděpodobnost uskutečnění většího nákupu.

Řešení:

Testujeme hypotézu H_0: $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$ proti levostranné alternativě H_1: $\vartheta_1 - \vartheta_2 < 0$ na asymptotické hladině významnosti 0,05.

$n_1 = 200$, $n_2 = 300$, $m_1 = 97/200$, $m_2 = 162/300$, $m_* = (97 + 162)/500 = 0{,}518$.

Podmínky dobré aproximace byly ověřeny v předešlém příkladu.

Testování pomocí intervalu spolehlivosti:

Pro levostrannou alternativu používáme pravostranný interval spolehlivosti:

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}}\,u_{1-\alpha} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}}\,1{,}645 = 0{,}02$$

Protože číslo c = 0 je obsaženo v intervalu $(-\infty; 0{,}02\rangle$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{m_*(1-m_*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{97}{200} - \frac{162}{300}}{\sqrt{0{,}518(1-0{,}518)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{300}\right)}} = -1{,}2058.$$

Kritický obor je $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}\rangle = (-\infty, -u_{0,95}\rangle = (-\infty, -1{,}645\rangle$. Protože testové kritérium nepatří do kritického oboru, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí p-hodnoty:

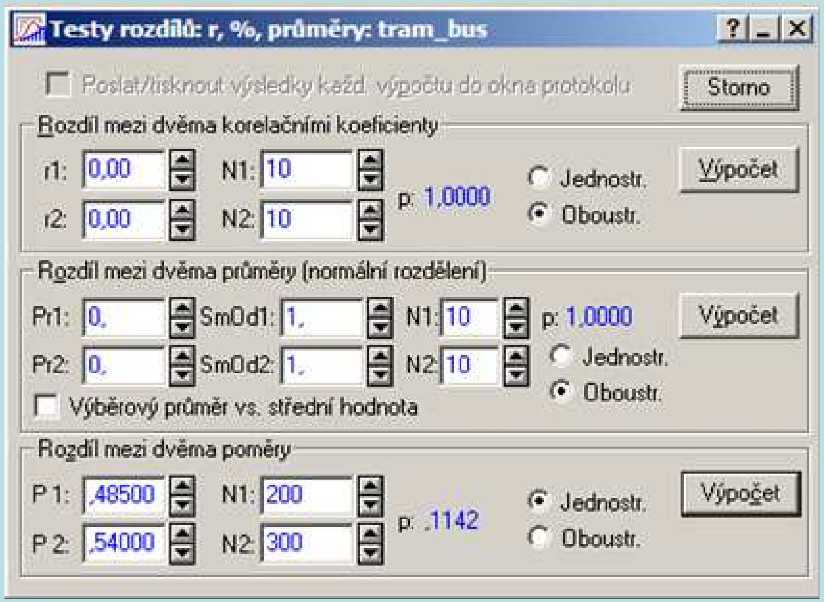
Pro levostrannou alternativu se p-hodnota počítá podle vzorce $p = P(T_0 \le t_0)$:

$$p = P(T_0 \le -1{,}2058) = \Phi(-1{,}2058) = 1 - \Phi(1{,}2058) = 1 - 0{,}8861 = 0{,}1139$$

Protože p-hodnota je větší než 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,485, do políčka N1 napíšeme 200, do políčka P 2 napíšeme 0,54, do políčka N2 napíšeme 300 – zaškrtneme Jednostr. - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,1142, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.



Test hypotézy o shodě podílů ϑ_1 a ϑ_2:

Systém STATISTICA počítá jednostrannou p-hodnotu (ozn. *softw. p*) jako $P(T_0 > |t_0|)$, proto kromě typu alternativy záleží i na znaménku realizace testového kritéria. Skutečnou p-hodnotu (ozn. *skut. p*) tedy počítáme podle následující tabulky:

① $t_0 > 0$, levostranná alternativa $skut.\ p = softw.p$	③ $t_0 < 0$, levostranná alternativa $skut.\ p = 1 - softw.p$
② $t_0 > 0$, pravostranná alternativa $skut.\ p = 1 - softw.p$	④ $t_0 < 0$, pravostranná alternativa $skut.\ p = softw.p$