

Parametrické úlohy o jednom a dvou výběrech z alternativního rozložení

Osnova:

Případ jednoho náhodného výběru

- asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru alternativního rozložení
- vzorec pro meze intervalu spolehlivosti pro parametr alternativního rozložení
- testování hypotézy o parametru alternativního rozložení

Případ dvou nezávislých náhodných výběrů

- asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrových průměrů dvou nezávislých alternativních rozložení
- vzorec pro meze intervalu spolehlivosti pro rozdíl parametrů dvou alternativních rozložení
- testování hypotézy o rozdílu parametrů dvou alternativních rozložení

Případ jednoho náhodného výběru: S náhodným výběrem rozsahu n z alternativního rozložení se setkáváme v situaci, kdy provádíme n opakovaných nezávislých pokusů a v každém z těchto pokusů sledujeme nastoupení úspěchu. Pravděpodobnost úspěchu je pro všechny pokusy stejná. Náhodná veličina X_i nabude hodnoty 1, pokud v i -tém pokusu nastal úspěch a hodnoty 0, pokud v i -tém pokusu úspěch nenastal, $i = 1, 2, \dots, n$. Realizací náhodného výběru X_1, \dots, X_n je tedy posloupnost 0 a 1.

Opakování:

Alternativní rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v jednom pokusu, přičemž pravděpodobnost úspěchu je ϑ . Píšeme $X \sim A(\vartheta)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} 1 - \vartheta & \text{pro } x = 0 \\ \vartheta & \text{pro } x = 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases} \quad \text{neboli } \pi(x) = \begin{cases} \vartheta^x (1 - \vartheta)^{1-x} & \text{pro } x = 0, 1 \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

Binomické rozložení: Náhodná veličina X udává počet úspěchů v posloupnosti n nezávislých opakovaných pokusů, přičemž pravděpodobnost úspěchu je v každém pokusu ϑ . Píšeme $X \sim \text{Bi}(n, \vartheta)$.

$$\pi(x) = \begin{cases} \binom{n}{x} \vartheta^x (1 - \vartheta)^{n-x} & \text{pro } x = 0, \dots, n \\ 0 & \text{jinak} \end{cases}$$

$$E(X) = n\vartheta, \quad D(X) = n\vartheta(1 - \vartheta)$$

(Alternativní rozložení je speciálním případem binomického rozložení pro $n = 1$.)

Jsou-li X_1, \dots, X_n stochasticky nezávislé náhodné veličiny, $X_i \sim A(\vartheta)$, $i = 1, \dots, n$, pak $X = \sum_{i=1}^n X_i \sim \text{Bi}(n, \vartheta)$.

Centrální limitní věta:

Jsou-li náhodné veličiny X_1, \dots, X_n stochasticky nezávislé a všechny mají stejné rozložení se střední hodnotou μ

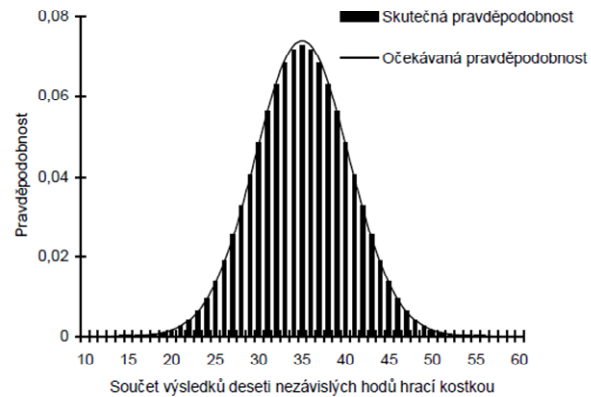
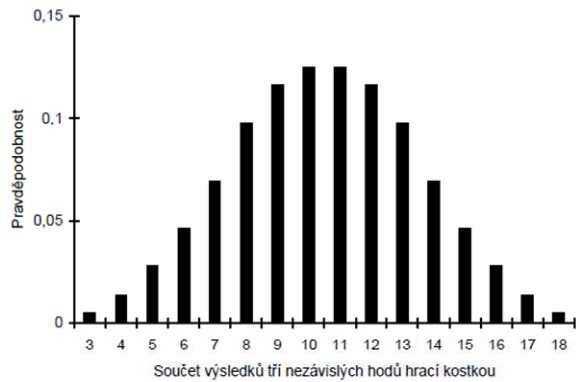
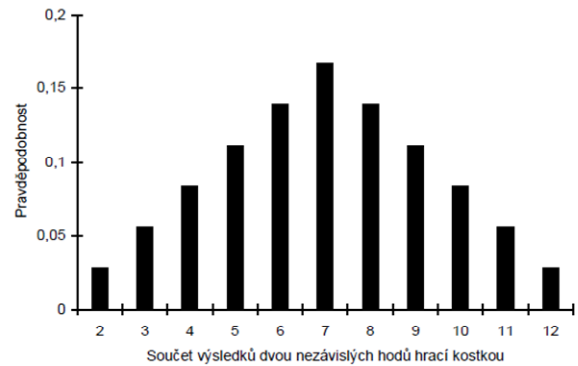
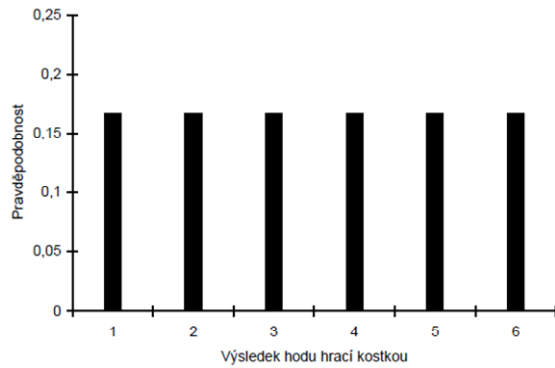
a rozptylem σ^2 , pak pro velká n ($n \geq 30$) lze rozložení součtu $\sum_{i=1}^n X_i$ aproximovat normálním rozložením $N(n\mu, n\sigma^2)$.

Zkráceně píšeme $\sum_{i=1}^n X_i \approx N(n\mu, n\sigma^2)$.

Pokud součet $\sum_{i=1}^n X_i$ standardizujeme, tj. vytvoříme náhodnou veličinu $U_n = \frac{\sum_{i=1}^n X_i - n\mu}{\sigma\sqrt{n}}$, pak rozložení této náhodné veličiny lze aproximovat standardizovaným normálním rozložením. Zkráceně píšeme $U_n \approx N(0,1)$

Normální rozložení je tedy rozložením limitním, k němuž se blíží všechna rozložení, proto hraje velmi důležitou roli v počtu pravděpodobnosti a matematické statistice.

Ilustrace centrální limitní věty – opakované hody kostkou



Asymptotické rozložení statistiky odvozené z výběrového průměru

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a necht' je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$.

Pak statistika $U = \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}}$ konverguje v distribuci k náhodné veličině se standardizovaným normálním rozložením.

(Říkáme, že U má asymptoticky rozložení $N(0,1)$ a píšeme $U \approx N(0,1)$.)

Vysvětlení:

Protože X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$, bude mít statistika $Y_n = \sum_{i=1}^n X_i$ (výběrový úhrn) rozložení $Bi(n, \vartheta)$.

Y_n má střední hodnotu $E(Y_n) = n\vartheta$ a rozptyl $D(Y_n) = n\vartheta(1-\vartheta)$. Podle centrální limitní věty se standardizovaná statistika

$U = \frac{Y_n - n\vartheta}{\sqrt{n\vartheta(1-\vartheta)}}$ asymptoticky řídí standardizovaným normálním rozložením $N(0,1)$. Pokud čitatele i jmenovatele podělíme n ,

dostaneme vyjádření: $U = \frac{\frac{Y_n - n\vartheta}{n}}{\sqrt{\frac{n\vartheta(1-\vartheta)}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} = \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}}} \approx N(0,1)$

Vzorec pro meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ

Meze 100(1- α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ jsou:

$$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}, h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}.$$

Vysvětlení:

Pokud rozptyl $D(M) = \frac{\vartheta(1-\vartheta)}{n}$ nahradíme odhadem $\frac{M(1-M)}{n}$, konvergence náhodné veličiny U k veličině s rozložením $N(0,1)$ se neporuší. Tedy

$$\begin{aligned} \forall \vartheta \in \Xi : 1 - \alpha &\leq P \left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M - \vartheta}{\sqrt{\frac{M(1-M)}{n}}} < u_{1-\alpha/2} \right) = \\ &= P \left(M - \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2} < \vartheta < M + \sqrt{\frac{M(1-M)}{n}} u_{1-\alpha/2} \right) \end{aligned}$$

Příklad:

Náhodně bylo vybráno 100 osob a zjištěno, že 34 z nich nakupuje v internetových obchodech. Najděte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro pravděpodobnost, že náhodně vybraná osoba nakupuje v internetových obchodech.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{100} , přičemž $X_i = 1$, když i -tá osoba nakupuje v internetových obchodech a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \dots, 100$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

$n = 100$, $m = 34/100$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$.

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: parametr ϑ neznáme, musíme ho nahradit výběrovým průměrem. Pak $100 \cdot 0,34 \cdot 0,66 = 22,44 > 9$.

$$d = 0,34 - \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}} \cdot 1,96 = 0,2472, h = 0,34 + \sqrt{\frac{0,34(1-0,34)}{100}} \cdot 1,96 = 0,4328.$$

S pravděpodobností přibližně 0,95 tedy $0,2472 < \vartheta < 0,4328$. Znamená to, že s pravděpodobností přibližně 95% je v uvažované populaci nejméně 24,7% a nejvíce 43,3% osob, které nakupují v internetových obchodech.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Použijeme modul Analýza síly testu

Statistiky – Analýza síly testu – Odhad intervalu – Jeden podíl, Z, Chí-kvadrát test – OK – Pozorovaný podíl p: 0,34,
Velikost vzorku: 100, Spolehlivost: 0,95 – Vypočítat.

Dostaneme tabulku:

	Hodnota
Podíl vzorku p	0,3400
Velikost vz. ve skup. (N)	100,0000
Interval spolehlivosti	0,9500
Meze spolehlivosti:	
Pí (přesně):	
Dolní mez	0,2482
Horní mez	0,4415
Pí (přibližně):	
Dolní mez	0,2501
Horní mez	0,4423
Pí (původ.):	
Dolní mez	0,2472
Horní mez	0,4328

Zajímá nás výsledek uvedený v dolní části tabulky, tj. Pí (původ.). Zjišťujeme, že s pravděpodobností aspoň 0,95 se pravděpodobnost nákupu v internetových obchodech bude pohybovat v mezích 0,2472 až 0,4328.

Příklad: Kolik osob musíme vybrat, abychom podíl modrookých osob v populaci odhadli se spolehlivostí 90% a šířka intervalu spolehlivosti byla nanejvýš a) 0,06, b) 0,01?

Řešení:

Šířka $100(1-\alpha)\%$ asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametr ϑ :

$$h - d = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} - \left(m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} \right) = 2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2}$$

Požadujeme, aby $h - d \leq \Delta$, tedy $2\sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} \leq \Delta$. Odtud vyjádříme $n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2}$.

Předpokládejme, že nemáme žádné předběžné informace o podílu modrookých osob v populaci. Musíme tedy zvolit takové m , aby šířka intervalu spolehlivosti byla maximální. Maximalizujeme výraz $m(1-m) = m - m^2$. Derivujeme podle m a položíme rovno 0: $1 - 2m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$. V tomto případě volíme relativní četnost $m = 0,5$.

$$\text{ad a) } n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot u_{0,95}^2}{0,06^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,645^2}{0,06^2} = 751,67$$

Uvedenou podmínku tedy splníme, když vybereme aspoň 752 osob.

$$\text{ad b) } n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot u_{0,95}^2}{0,01^2} = \frac{4 \cdot 0,5 \cdot 0,5 \cdot 1,645^2}{0,01^2} = 27060,25$$

Chceme-li dosáhnout podstatně užšího intervalu spolehlivosti, musíme vybrat aspoň 27 061 osob.

Modifikace: Předpokládejme, že v populaci je nanejvýš 30% modrookých osob. Pak relativní četnost $m = 0,3$.

$$\text{ad a) } n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot u_{0,95}^2}{0,06^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,645^2}{0,06^2} = 631,41$$

V tomto případě stačí vybrat 632 osob.

Ve srovnání s předešlým případem vidíme, že rozsah výběru skutečně klesl.

ad b)

$$n \geq \frac{4m(1-m)u_{1-\alpha/2}^2}{\Delta^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot u_{0,95}^2}{0,01^2} = \frac{4 \cdot 0,3 \cdot 0,7 \cdot 1,645^2}{0,01^2} = 22730,61$$

V tomto případě musíme vybrat aspoň 22 731 osob.

Testování hypotézy o parametru ϑ

Nechť X_1, \dots, X_n je náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$ a necht' je splněna podmínka $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$.

Na asymptotické hladině významnosti α testujeme hypotézu

$H_0: \vartheta = c$ proti alternativě $H_1: \vartheta \neq c$ (resp. $H_1: \vartheta < c$ resp. $H_1: \vartheta > c$).

Testovým kritériem je statistika $T_0 = \frac{M - c}{\sqrt{\frac{c(1-c)}{n}}}$, která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení $N(0,1)$.

Kritický obor má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty)$ (resp. $W = (-\infty, -u_{1-\alpha})$ resp. $W = (u_{1-\alpha}, \infty)$).

(Testování hypotézy o parametru ϑ lze samozřejmě provést i pomocí $100(1-\alpha)\%$ asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Příklad: Podíl zmetků při výrobě určité součástky činí $\vartheta = 0,01$. Bylo náhodně vybráno 1000 výrobků a zjistilo se, že mezi nimi je 16 zmetků. Na asymptotické hladině významnosti 0,05 testujte hypotézu $H_0: \vartheta = 0,01$ proti oboustranné alternativě $H_1: \vartheta \neq 0,01$.

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{1000} , přičemž $X_i = 1$, když i -tý výrobek byl zmetek a $X_i = 0$ jinak, $i = 1, \dots, 1000$. Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

Testujeme hypotézu $H_0: \vartheta = 0,01$ proti alternativě $H_1: \vartheta \neq 0,01$.

Známe: $n = 1000$, $m = \frac{16}{1000} = 0,016$, $c = 0,01$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha/2} = u_{0,975} = 1,96$

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $1000 \cdot 0,01 \cdot 0,99 = 9,9 > 9$.

a) Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria: $t_0 = \frac{m - c}{\sqrt{\frac{c \cdot (1 - c)}{n}}} = \frac{0,016 - 0,01}{\sqrt{\frac{0,01 \cdot 0,99}{1000}}} = 1,907$.

Kritický obor: $W = (-\infty, -u_{0,975}) \cup (u_{0,975}, \infty) = (-\infty, -1,96) \cup (1,96, \infty)$. Protože $1,907 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

b) Testování pomocí intervalu spolehlivosti

$d = m - \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} = 0,016 - \sqrt{\frac{0,016 \cdot 0,984}{1000}} 1,96 = 0,0082$

$h = m + \sqrt{\frac{m(1-m)}{n}} u_{1-\alpha/2} = 0,016 + \sqrt{\frac{0,016 \cdot 0,984}{1000}} 1,96 = 0,0238$

Protože číslo $c = 0,01$ leží v intervalu 0,0082 až 0,0238, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

c) Testování pomocí p-hodnoty

Protože testujeme nulovou hypotézu proti oboustranné alternativě, vypočteme p-hodnotu podle vzorce:

$p = 2 \min\{\Phi(1,907), 1 - \Phi(1,907)\} = 2 \min\{0,97104, 1 - 0,97104\} = 0,05792$.

Protože vypočtená p-hodnota je větší než hladina významnosti 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA (pouze přibližný):

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,016, do políčka N1 napíšeme 1000, do políčka P 2 napíšeme 0,01, do políčka N2 napíšeme 32767 (větší hodnotu systém neumožní) - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,0626, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

The screenshot shows the 'Testy rozdílů: r, %, průměry: Tabulka3' dialog box. It is divided into three sections for different types of tests. The 'Rozdíl mezi dvěma poměry' section is active, showing input values for P1 (.01600), N1 (1000), P2 (.01000), and N2 (32767), resulting in a p-value of .0626. The 'Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)' section shows input values for Pr1 (0), SmOd1 (1), N1 (10), Pr2 (0), SmOd2 (1), and N2 (10), resulting in a p-value of 1.0000. The 'Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty' section shows input values for r1 (0.00), N1 (10), r2 (0.00), and N2 (10), resulting in a p-value of 1.0000. The 'Výběrový průměr vs. střední hodnota' checkbox is unchecked. The 'Jednostr.' and 'Oboustr.' radio buttons are selected for the active test.

Test Type	Parameter 1	Parameter 2	Parameter 3	Parameter 4	Parameter 5	Parameter 6	Resulting p-value
Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty	r1: 0,00	N1: 10	r2: 0,00	N2: 10			1,0000
Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)	Pr1: 0,	SmOd1: 1,	N1: 10	Pr2: 0,	SmOd2: 1,	N2: 10	1,0000
Rozdíl mezi dvěma poměry	P 1: .01600	N1: 1000	P 2: .01000	N2: 32767			.0626

Příklad: Nový léčebný postup považujeme za úspěšný, pokud po jeho ukončení bude dosaženo zlepšení zdravotního stavu u alespoň 50% zúčastněných pacientů. Nová terapie byla vyzkoušena u 40 pacientů a ke zlepšení došlo u 24 osob, tj. u 60%. Je možné na asymptotické hladině významnosti 0,05 zamítnout hypotézu, že tato terapie nedosahuje úspěšnosti aspoň 50%?

Řešení:

Zavedeme náhodné veličiny X_1, \dots, X_{40} , přičemž
 $X_i = 1$, když terapie u i -tého pacienta byl úspěšná a
 $X_i = 0$ jinak,
 $i = 1, \dots, 40$.

Tyto náhodné veličiny tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta)$.

Testujeme hypotézu $H_0: \vartheta \leq 0,5$ proti pravostranné alternativě $H_1: \vartheta > 0,5$.

Známe: $n = 40$, $m = \frac{24}{40} = 0,6$, $c = 0,5$, $\alpha = 0,05$, $u_{1-\alpha} = u_{0,95} = 1,645$

Ověření podmínky $n\vartheta(1-\vartheta) > 9$: $40 \cdot 0,6 \cdot 0,4 = 9,6 > 9$.

Realizace testového kritéria: $t_0 = \frac{m-c}{\sqrt{\frac{c \cdot (1-c)}{n}}} = \frac{0,6-0,5}{\sqrt{\frac{0,5 \cdot 0,5}{40}}} = 1,2649$.

Kritický obor: $W = \langle u_{1-\alpha}, \infty \rangle = \langle u_{0,95}, \infty \rangle = \langle 1,645, \infty \rangle$.

Protože $1,2649 \notin W$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

The screenshot shows the 'Testy rozdílů: r, %, průměry: Tabulka9' dialog box in STATISTICA. It is divided into three sections for different types of tests. The first section is for the difference between two correlation coefficients, with $r_1 = 0,00$, $r_2 = 0,00$, $N_1 = 10$, $N_2 = 10$, and a p-value of 1,0000. The second section is for the difference between two means (normal distribution), with $Pr_1 = 0$, $Pr_2 = 0$, $SmOd1 = 1$, $SmOd2 = 1$, $N_1 = 10$, $N_2 = 10$, and a p-value of 1,0000. The third section is for the difference between two ratios, with $P_1 = ,60000$, $P_2 = ,50000$, $N_1 = 40$, $N_2 = 32767$, and a p-value of ,1031. The 'Oboustr.' (two-tailed) radio button is selected in the third section. A 'Výpočet' (Calculate) button is visible next to the p-value in each section.

Vypočtená p-hodnota jednostranného testu je 0,1031, tedy větší než asymptotická hladina významnosti 0,05. H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Případ dvou nezávislých výběrů z alternativních rozložení: Provádíme opakovaně nezávisle n_1 -krát jeden náhodný pokus a nezávisle na tom n_2 -krát druhý náhodný pokus. V první sérii pokusů sledujeme nějaký jev, který v každém pokusu může nastat s pravděpodobností ϑ_1 a ve druhé sérii pokusů sledujeme nějaký jiný jev, jehož pravděpodobnost nastoupení je ϑ_2 . Parametry ϑ_1, ϑ_2 neznáme. Naším úkolem bude konstruovat interval spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ nebo testovat hypotézu o této parametrické funkci, a to pomocí dvou nezávislých náhodných výběrů z alternativních rozložení $A(\vartheta_1), A(\vartheta_2)$.

Asymptotické rozložení statistiky odvozené ze dvou výběrových průměrů alternativních rozložení

Nechť X_{11}, \dots, X_{1n_1} je náhodný výběr z alternativního rozložení $A(\vartheta_1)$ a X_{21}, \dots, X_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení $A(\vartheta_2)$ a necht' jsou splněny podmínky $n_1 \vartheta_1 (1 - \vartheta_1) > 9$ a $n_2 \vartheta_2 (1 - \vartheta_2) > 9$. Označme M_1, M_2 výběrové průměry.

Pak statistika
$$U = \frac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\frac{\vartheta_1(1-\vartheta_1)}{n_1} + \frac{\vartheta_2(1-\vartheta_2)}{n_2}}} \approx N(0,1) .$$

Vysvětlení: Analogicky jako v případě jednoho náhodného výběru z alternativního rozložení.

Vzorec pro meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$.

Meze 100(1-α)% asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2}, \quad h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2}$$

Vysvětlení: Pokud rozptyl $D(M_i) = \frac{\vartheta_i(1-\vartheta_i)}{n_i}$ nahradíme odhadem $\frac{M_i(1-M_i)}{n_i}$, $i = 1, 2$, konvergence náhodné veličiny U

k veličině s rozložením $N(0,1)$ se neporuší. Tedy

$$\forall \vartheta_1 - \vartheta_2 \in \Xi : 1 - \alpha \leq P \left(-u_{1-\alpha/2} < \frac{M_1 - M_2 - (\vartheta_1 - \vartheta_2)}{\sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}} < u_{1-\alpha/2} \right) =$$
$$P(M_1 - M_2 - \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2} < \vartheta_1 - \vartheta_2 < M_1 - M_2 + \sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2})$$

Příklad: Management supermarketu vyhlásil týden slev a sledoval, zda toto vyhlášení má vliv na podíl větších nákupů (nad 500 Kč). Na základě náhodného výběru 200 zákazníků v týdnu bez slev bylo zjištěno 97 velkých nákupů, zatímco v týdnu se slevou z 300 náhodně vybraných zákazníků učinilo velký nákup 162 zákazníků. Sestrojte 95% asymptotický interval spolehlivosti pro rozdíl pravděpodobností uskutečnění většího nákupu v týdnu bez slevy a v týdnu se slevou.

Řešení:

Zavedeme náhodnou veličinu X_{1i} , která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu bez slevy i -tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, $i = 1, \dots, 200$. Náhodné veličiny $X_{1,1}, \dots, X_{1,200}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_1)$. Dále zavedeme náhodnou veličinu X_{2i} , která bude nabývat hodnoty 1, když v týdnu se slevou i -tý náhodně vybraný zákazník uskuteční větší nákup a hodnoty 0 jinak, $i = 1, \dots, 300$. Náhodné veličiny $X_{2,1}, \dots, X_{2,300}$ tvoří náhodný výběr z rozložení $A(\vartheta_2)$.

$$n_1 = 200, n_2 = 300, m_1 = 97/200 = 0,485, m_2 = 162/300 = 0,54.$$

Ověření podmínek $n_1 \vartheta_1 (1 - \vartheta_1) > 9$ a $n_2 \vartheta_2 (1 - \vartheta_2) > 9$: Parametry ϑ_1 a ϑ_2 neznáme, nahradíme je odhady m_1 a m_2 , tedy $97 \cdot (1 - 97/200) = 49,955 > 9$, $162 \cdot (1 - 162/300) = 74,52 > 9$.

Meze $100(1-\alpha)\%$ asymptotického empirického intervalu spolehlivosti pro parametrickou funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ jsou:

$$d = m_1 - m_2 - \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} - \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}} 1,96 = -0,1443$$

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}} u_{1-\alpha/2} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}} 1,96 = 0,0343$$

Zjistili jsme tedy, že s pravděpodobností přibližně 0,95: $-0,1443 < \vartheta_1 - \vartheta_2 < 0,0343$.

Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$

Nechť X_{11}, \dots, X_{1n_1} je náhodný výběr z alternativního rozložení $A(\vartheta_1)$ a X_{21}, \dots, X_{2n_2} je na něm nezávislý náhodný výběr alternativního rozložení $A(\vartheta_2)$ a necht' jsou splněny podmínky $n_1 \vartheta_1 (1 - \vartheta_1) > 9$ a $n_2 \vartheta_2 (1 - \vartheta_2) > 9$. Na asymptotické hladině významnosti α testujeme nulovou hypotézu $H_0: \vartheta_1 - \vartheta_2 = c$ proti alternativě $H_1: \vartheta_1 - \vartheta_2 \neq c$ (resp. $H_1: \vartheta_1 - \vartheta_2 < c$ resp. $H_1: \vartheta_1 - \vartheta_2 > c$).

Testovým kritériem je statistika

$$T_0 = \frac{M_1 - M_2 - c}{\sqrt{\frac{M_1(1-M_1)}{n_1} + \frac{M_2(1-M_2)}{n_2}}}, \text{ která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení } N(0,1).$$

Kritický obor má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty)$

(resp. $W = (-\infty, -u_{1-\alpha})$ resp. $W = (u_{1-\alpha}, \infty)$).

(Testování hypotézy o parametrické funkci $\vartheta_1 - \vartheta_2$ lze provést též pomocí 100(1- α)% asymptotického intervalu spolehlivosti nebo pomocí p-hodnoty.)

Poznámka: Postup při testování hypotézy $\vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$

Je-li $c = 0$, pak označme $M_* = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{n_1 + n_2}$ vážený průměr výběrových průměrů. Jako testová statistika slouží

$$T_0 = \frac{M_1 - M_2}{\sqrt{M_*(1-M_*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}}, \text{ která v případě platnosti nulové hypotézy má asymptoticky rozložení } N(0,1).$$

Kritický obor má tvar $W = (-\infty, -u_{1-\alpha/2}) \cup (u_{1-\alpha/2}, \infty)$ (resp. $W = (-\infty, -u_{1-\alpha})$ resp. $W = (u_{1-\alpha}, \infty)$).

Testová statistika T_0 vznikne standardizací statistiky $M_1 - M_2$, kde neznámé parametry ϑ_1, ϑ_2 nahradíme společným odhadem M_* .

Příklad: Pro údaje z příkladu o slevách v supermarketu testujte na asymptotické hladině významnosti 0,05 hypotézu, že týden se slevami nezvýší pravděpodobnost uskutečnění většího nákupu.

Řešení:

Testujeme hypotézu $H_0: \vartheta_1 - \vartheta_2 = 0$ proti levostranné alternativě $H_1: \vartheta_1 - \vartheta_2 < 0$ na asymptotické hladině významnosti 0,05.

$n_1 = 200$, $n_2 = 300$, $m_1 = 97/200$, $m_2 = 162/300$, $m_* = (97 + 162)/500 = 0,518$.

Podmínky dobré aproximace byly ověřeny v předešlém příkladu.

Testování pomocí intervalu spolehlivosti:

Pro levostrannou alternativu používáme pravostranný interval spolehlivosti:

$$h = m_1 - m_2 + \sqrt{\frac{m_1(1-m_1)}{n_1} + \frac{m_2(1-m_2)}{n_2}} u_{1-\alpha} = \frac{97}{200} - \frac{162}{300} + \sqrt{\frac{\frac{97}{200}(1-\frac{97}{200})}{200} + \frac{\frac{162}{300}(1-\frac{162}{300})}{300}} 1,645 = 0,02$$

Protože číslo $c = 0$ je obsaženo v intervalu $(-\infty; 0,02)$, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí kritického oboru:

Realizace testového kritéria:

$$t_0 = \frac{m_1 - m_2}{\sqrt{m_*(1-m_*)\left(\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}\right)}} = \frac{\frac{97}{200} - \frac{162}{300}}{\sqrt{0,518(1-0,518)\left(\frac{1}{200} + \frac{1}{300}\right)}} = -1,2058.$$

Kritický obor je $W = (-\infty, -u_{1-\alpha}) = (-\infty, -u_{0,95}) = (-\infty, -1,645)$. Protože testové kritérium nepatří do kritického oboru, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Testování pomocí p-hodnoty:

Pro levostrannou alternativu se p-hodnota počítá podle vzorce $p = P(T_0 \leq t_0)$:

$$p = P(T_0 \leq -1,2058) = \Phi(-1,2058) = 1 - \Phi(1,2058) = 1 - 0,8861 = 0,1139$$

Protože p-hodnota je větší než 0,05, H_0 nezamítáme na asymptotické hladině významnosti 0,05.

Výpočet pomocí systému STATISTICA:

Statistiky – Základní statistiky a tabulky – Testy rozdílů: r, %, průměry – OK – vybereme Rozdíl mezi dvěma poměry – do políčka P 1 napíšeme 0,485, do políčka N1 napíšeme 200, do políčka P 2 napíšeme 0,54, do políčka N2 napíšeme 300 – zaškrtneme Jednostr. - Výpočet. Dostaneme p-hodnotu 0,1142, tedy nezamítáme nulovou hypotézu na hladině významnosti 0,05.

The screenshot shows the 'Testy rozdílů: r, %, průměry: tram_bus' dialog box. It is divided into three sections for different types of tests. The 'Rozdíl mezi dvěma poměry' section is active, showing input values for P 1 (.48500), N1 (200), P 2 (.54000), and N2 (300). The resulting p-value is .1142. The 'Jednostr.' radio button is selected. The 'Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)' section shows input values for Pr1 (0), SmOd1 (1), N1 (10), Pr2 (0), SmOd2 (1), and N2 (10), with a p-value of 1.0000. The 'Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty' section shows input values for r1 (0.00), N1 (10), r2 (0.00), and N2 (10), with a p-value of 1.0000. A 'Storno' button is at the top right, and 'Výpočet' buttons are next to each section.

Section	Parameter	Value	Result
Rozdíl mezi dvěma poměry	P 1	.48500	p: .1142
	N1	200	
	P 2	.54000	
	N2	300	
Rozdíl mezi dvěma průměry (normální rozdělení)	Pr1	0	p: 1.0000
	SmOd1	1	
	N1	10	
	Pr2	0	
	SmOd2	1	
	N2	10	
Rozdíl mezi dvěma korelačními koeficienty	r1	0.00	p: 1.0000
	N1	10	
	r2	0.00	
	N2	10	

Test hypotézy o shodě podílů ϑ_1 a ϑ_2 :

System STATISTICA počítá jednostrannou p-hodnotu (ozn. *softw. p*) jako $P(T_0 > |t_0|)$, proto kromě typu alternativy záleží i na znaménku realizace testového kritéria. Skutečnou p-hodnotu (ozn. *skut. p*) tedy počítáme podle následující tabulky:

① $t_0 > 0$, levostranná alternativa $skut. p = softw. p$	③ $t_0 < 0$, levostranná alternativa $skut. p = 1 - softw. p$
② $t_0 > 0$, pravostranná alternativa $skut. p = 1 - softw. p$	④ $t_0 < 0$, pravostranná alternativa $skut. p = softw. p$