Cvičení 3: Základní pojmy matematické statistiky I

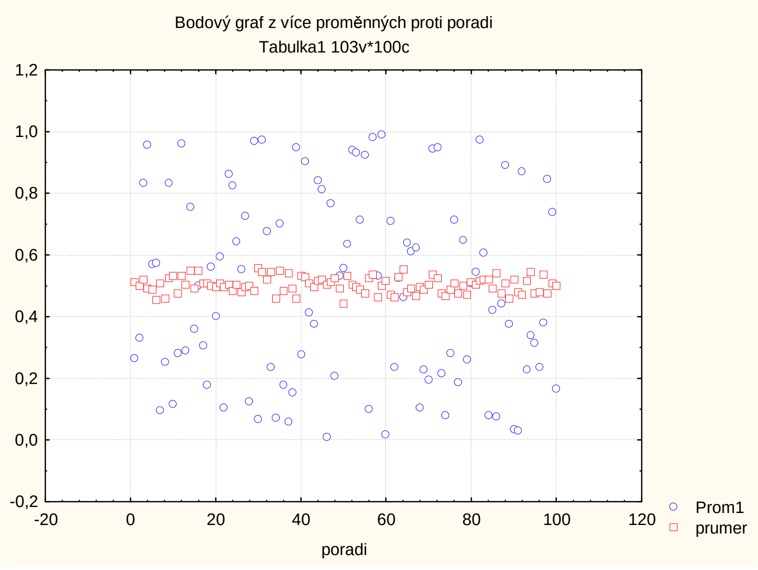
Úkol 1.: Průzkum chování výběrového průměru a výběrového rozptylu

1. Vytvořte nový datový soubor o 103 proměnných a 100 případech. Pomocí programu gener.svb, který si stáhnete z Učebních materiálů, se naplní prvních 100 proměnných 100 realizacemi náh. veličin $X_i \sim Rs(0,1)$, i=1, …, 100, do proměnné v101 se uloží pořadová čísla 1 až 100, do proměnné v102 (resp. v103) se uloží průměry (resp. rozptyly) proměnných v1 až v100.

```
Option Base 1
Sub Main
   Dim s As Spreadsheet
         Set s = ActiveSpreadsheet
         For i = 1 To 100
                  s.Variable(i).FillRandomValues
                  'do promennych v1 az v100 se ulozi nahodna cisla z intervalu(0,1)
         Next i
         s.VariableLongName(101) = "=v0"
         'do promenne v101 se ulozi poradova cisla 1 az 100
         s.VariableLongName(102) = "=mean(v1:v100)"
         'do promenne v102 se ulozi prumery promennych v1 az v100
         s.VariableLongName(103) = "=stdev(v1:v100)^2"
         'do do promenne v103 se ulozi rozptyly promennych v1 az v100
         s.Recalculate
End Sub
```

(Makro se spouští pomocí modré šipky na panelu nástrojů.)
Proměnnou v101 přejmenujte na PORADI, v102 na PRUMER a v103 na ROZPTYL. Vzniklý datový soubor uložte pod názvem uniform.sta.

2. Graficky znázorněte hodnoty některé z proměnných v1, …, v100 (např. v1) a hodnoty proměnné PRUMER.
Návod: Grafy – Bodové grafy – Typ grafu Vícenásobný – vypneme Lineární proložení – Proměnné X PORADI, Y v1, PRUMER, OK, OK. Vidíme, že hodnoty proměnné v1 se nacházejí mezi 0 a 1, zatímco hodnoty proměnné PRUMER se koncentrují v úzkém pásu kolem 0,5.

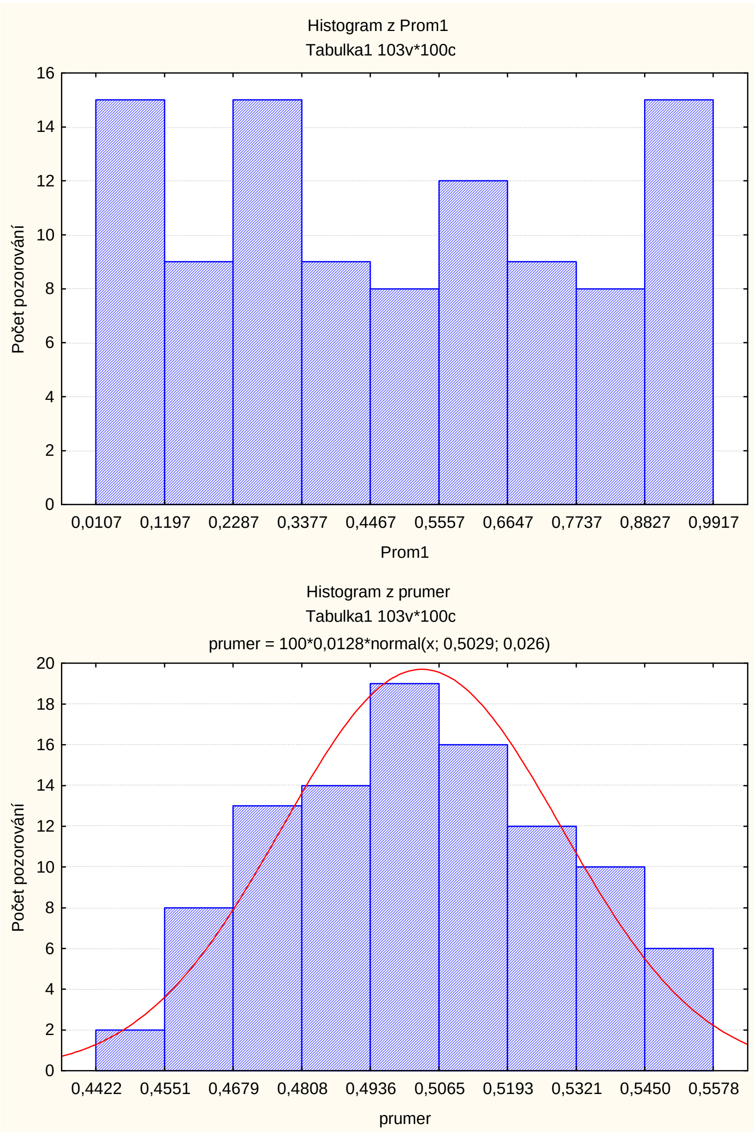


3. Vypočtěte průměr a rozptyl např. proměnné v1 a proměnné PRUMER. Průměr proměnné v1 by měl být blízký 0,5, rozptyl 1/12 = 0,083. Průměr proměnné PRUMER by se měl blížit 0,5, zatímco rozptyl by měl být 100 x menší než 1/12, tj. 0,00083. Dále vypočtěte průměr proměnné ROZPTYL. Měl by se blížit 1/12 = 0,083.

	Popisné statistiky (uniform)	
Proměnná	Průměr	Rozptyl
Prom1	0,536605	0,078676
PRUMER	0,503984	0,000783

	Popisné statistiky (uniform)
Proměnná	Průměr
ROZPTYL	0,083143

4. Nakreslete histogram pro proměnnou v1 a pro proměnnou PRUMER. První histogram se blíží úsečce, druhý Gaussově křivce.



5. Celý postup zopakujte pro exponenciální rozložení s parametrem λ=2. V programu gener.stb napište místo s.Variable(i).FillRandomValues
s.VariableLongName(i) = "=Vexpon(rnd(1);2) "

Připomeneme si, že průměr proměnné v1 i průměr proměnné PRUMER by se měl blížit 1/2, rozptyl proměnné v1 by měl být blízký 1/4 a rozptyl proměnné PRUMER by měl být 100 x menší, tj. 0,0025. Průměr proměnné ROZPTYL by se neměl příliš lišit od 1/4.

Úkol 2.: Ilustrace nestrannosti výběrové distribuční funkce

1. Vytvořte nový datový soubor o třech proměnných a 1000 případech.

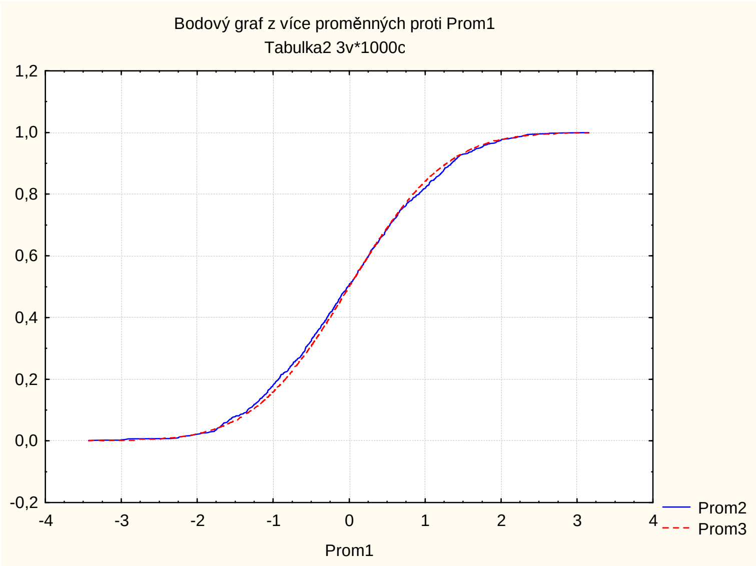
2. Do proměnné v1 uložte 1000 realizací náhodné veličiny s rozložením N(0,1) tak, že v Dlouhém jménu použijte příkaz =vnormal(rnd(1);0;1)

3. Hodnoty proměnné v1 setřiďte podle velikosti: Data - Setřídit.

4. Proměnnou v2 transformujte tak, že v Dlouhém jménu použijte příkaz =v0/1000.

5. Do proměnné v3 uložte hodnoty distribuční funkce rozložení N(0,1). Do Dlouhého jména napište příkaz =INormal(v1;0;1)

6. Nakreslete dvourozměrný tečkový diagram, kde na osu x vyneste v1 a na osu y v2 a v3.



Vidíme, že průběh výběrové distribuční funkce $F_{1000}(x)$ (modrá čára) je velmi podobný průběhu distribuční funkce $\Phi(x)$ (červená čára).

7. Postup zopakujte pro rozsah výběru n = 100. Uvidíte, že průběh výběrové distribuční funkce $F_{100}(x)$ se od průběhu distribuční funkce $\Phi(x)$ liší výrazněji.

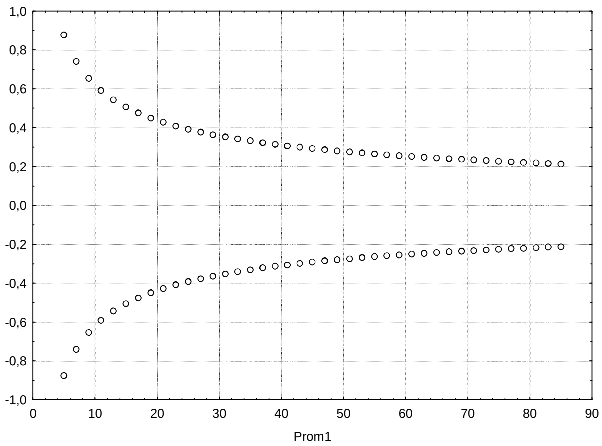
Úkol 3.: Sledování vlivu rozsahu výběru na šířku intervalu spolehlivosti (při α=0,05)

Pro hypotetické náhodné výběry rozsahu n (n = 5, 7, 9, …, 85) z rozložení N(0,1), jejichž výběrové průměry se vždy realizovaly hodnotou 0, vypočtěte dolní a horní meze 95% intervalů spolehlivosti pro μ a graficky znázorněte závislost těchto mezí na rozsahu n. Upozornění: Meze 100(1-α)% empirického intervalu spolehlivosti pro střední hodnotu při známém rozptylu se počítají podle vzorců: $d = m - \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$, $h = m + \frac{\sigma}{\sqrt{n}} u_{1-\alpha/2}$

Návod: Z Učebních materiálů stáhněte program intsp1.svb a otevřete ho v programovacím okně.

```
Option Base 1
Dim s As Spreadsheet
Sub Main
	alfa = 0.05
	'pevně zvolené riziko
	m = 0
	'pevně zvolený průměr
	sigma = 1
	'pevně zvolená směrodatná odchylka
	n = 3
	'počáteční rozsah výběru
	Set s = ActiveSpreadsheet
	For I = 1 To 41
		s.Cells(I, 2) = m - VNormal(1 - alfa / 2, 0, 1) / Sqrt(n + 2 * I)
		'dolní mez intervalu spolehlivosti
		s.Cells(I, 3) = m + VNormal(1 - alfa / 2, 0, 1) / Sqrt(n + 2 * I)
		'horní mez intervalu spolehlivosti
		s.Cells(I, 1) = n + 2 * I
		'zvětšení rozsahu výběru o 2
	Next I
End Sub
```

Vytvořte nový datový soubor o 3 proměnných a 41 případech. Po spuštění programu intsp1 se do proměnné v1 uloží rozsahy výběrů 5, 7, ..., 85, do v2 (resp. v3) dolní (resp. horní) meze 95% intervalů spolehlivosti pro μ. Vytvoření grafu: Grafy – Bodové grafy – Typ grafu Vícenásobný – vypneme Lineární proložení – Proměnné X v1, Y v2, v3 OK, OK.



Vidíme, že šířka intervalu spolehlivosti klesá se zvětšujícím se rozsahem náhodného výběru, zprvu rychle a pak stále pomaleji.

Úkol 4.: Sledování vlivu rizika na šířku intervalu spolehlivosti (při konstantním rozsahu výběru)

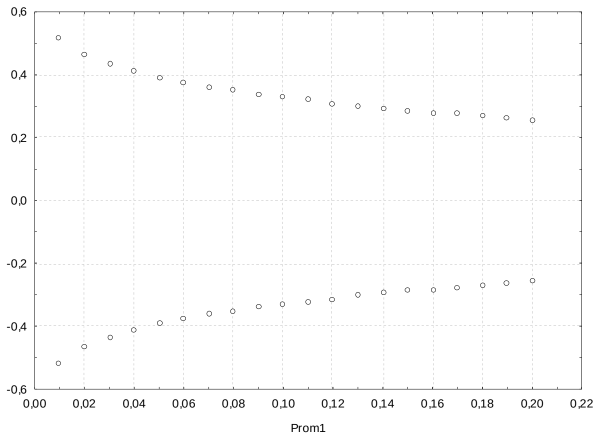
Pro hypotetický náhodný výběr rozsahu n=25 z rozložení N(0,1), jehož výběrový průměr se realizoval hodnotou 0, vypočtěte dolní a horní meze 100(1-α)% intervalů spolehlivosti (α=0,20, 0,19, …, 0,01) pro μ a graficky znázorněte závislost těchto mezí na riziku α.

Návod: Z Učebních materiálů stáhněte program intsp2.svb a otevřete ho v programovacím okně.

```
Option Base 1
```

```
Dim s As Spreadsheet
Sub Main
    alfa = 0.21
    'počáteční hodnota rizika
    m = 0
    'pevně zvolený průměr
    sigma = 1
    'pevně zvolená směrodatná odchylka
    n = 25
    'pevně zvolený rozsah výběru
    Set s = ActiveSpreadsheet
    For I = 1 To 20
        s.Cells(I, 2) = m - VNormal(1 - (alfa - I / 100) / 2, 0, 1) / Sqrt(n)
        'dolní mez intervalu spolehlivosti
        s.Cells(I, 3) = m + VNormal(1 - (alfa - I / 100) / 2, 0, 1) / Sqrt(n)
        'horní mez intervalu spolehlivosti
        s.Cells(I, 1) = alfa - I / 100
        'zmenšení rizika o 1/100
    Next I
End Sub
```

Vytvořte nový datový soubor o 3 proměnných a 20 případech. Po spuštění programu intsp2 se do proměnné v1 uloží rizika 0,20, 0,19, ..., 0,01, do v2 (resp. v3) dolní (resp. horní) meze 100(1-α)% intervalů spolehlivosti pro μ. Vytvoření grafu: stejným způsobem jako v předešlém případě.



Vidíme, že šířka intervalu spolehlivosti s rostoucím rizikem klesá.