Cvičení 3

Příklady na využití exponenciálního rozložení

Příklad 1.: Doba do ukončení opravy v opravně obuvi je náhodná veličina, která se řídí exponenciálním rozložením se střední hodnotou 3 dny. Jaká je pravděpodobnost, že oprava bude ukončena do dvou dnů? [0,4866]

Příklad 2.: Životnost žárovky má exponenciální rozložení se střední hodnotou 600 h. Jaká je pravděpodobnost, že žárovka bude svítit dalších aspoň 200 h, jestliže již svítila aspoň 800 h? [0,7165]

Příklad 3.: Náhodné doby života dvou součástek jsou stochasticky nezávislé náhodné veličiny, přičemž $X_i \sim Ex(\lambda_i)$, i = 1, 2. Střední hodnota doby života první součástky je 2 roky, druhé součástky 3 roky. Jaká je pravděpodobnost, že druhá součástka přežije první? [0,6]

Příklad 4.: Doba (v hodinách), která uplyne mezi dvěma naléhavými příjmy v jisté nemocnici, se řídí exponenciálním rozložením se střední hodnotou 2 h. Jaká je pravděpodobnost, že uplyne více než 5 h bez naléhavého příjmu? [0,082]

Příklad 5.: Zkoumá se funkce dvou nezávisle na sobě pracujících přístrojů. Doba bezporuchové funkce i-tého přístroje je náhodná veličina $X_i \sim Ex(\lambda_i)$, i = 1, 2. Jaká je pravděpodobnost, že za dobu $t_0 > 0$ a) ani jeden přístroj neselže, b) selže aspoň jeden přístroj?
Řešení:
[ad a) $e^{-t_0(\lambda_1+\lambda_2)}$, ad b) $1 - e^{-t_0(\lambda_1+\lambda_2)}$]

Příklad 6.: Najděte 5. percentil náhodné veličiny $X \sim Ex(0{,}1)$. [0,5129]

Využití exponenciálního rozložení při analýze příjmů

Úvod do problému: Je známo, že příjmy obyvatelstva ve společnosti jsou rozděleny nerovnoměrně. Jako první zkoumal toto rozdělení italský inženýr Vilfredo Pareto na konci 19. století. Zjistil, že příjmy lze modelovat mocninnou funkcí. V dalších letech se ukázalo, že tento tzv. Paretův zákon platí jen pro 5 % nejbohatších lidí. Příjmy ostatních 95 % obyvatel lze modelovat pomocí exponenciálního rozložení. (Proč to tak je? To je vysvětleno v článku F. Slaniny, Vesmír č. 9, rok 2001)
Nechť náhodná veličina X udává měsíční příjem náhodně vybraného zaměstnance. Předpokládejme, že X ~ Ex(λ). Podle údajů Českého statistického úřadu dosáhla průměrná hrubá mzda v ČR ve 4. čtvrtletí roku 2010 hodnoty 25 752 Kč.

Úkol 1.: Zjistěte parametr λ pro náhodnou veličinu X. [0,00003883]

Úkol 2.: Odvoďte obecný vzorec pro výpočet α-kvantilu náhodné veličiny X a pak vyjádřete medián náhodné veličiny X.
Co lze říci o vztahu střední hodnoty a mediánu?
[$K_\alpha(X) = -\frac{1}{\lambda}\ln(1-\alpha)$, $K_{0,50}(X) = 17850$, medián je vždy menší než střední hodnota]

Úkol 3.: Kolik procent zaměstnanců má podprůměrnou hrubou mzdu? [63,21 %]

Práce se systémem MATLAB

Úkol 1.: Pomocí funkce exprnd náhodně vygenerujte příjmy n = 1000, 10 000 a 100 000 osob (střední hodnotu volte 25 752) a vytvořte histogram vygenerovaných příjmů.

Úkol 2.: Vypočtěte průměrný příjem a vypočtěte medián příjmů.
Zjištěné hodnoty porovnejte s teoretickými hodnotami: střední hodnota = 25 752 Kč, medián = 17 850 Kč.

Úkol 3.: Zjistěte, kolik procent osob bude mít podprůměrné příjmy.
Zjištěnou hodnotu porovnejte s teoretickou hodnotou 63,2%.