Cvičení 7

1. Systém M/M/1/∞/FIFO: Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen".

Podíl $\rho = \dfrac{\lambda}{\mu}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.

Stacionární rozložení: $a_j = \rho^j(1-\rho)$, j = 0, 1, …

Počet N zákazníků ve stabilizovaném systému se tedy řídí rozložením $Ge(1-\rho)$.

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = \dfrac{\lambda}{\mu-\lambda}$, ve frontě: $E(N_Q) = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu-\lambda)}$,

u obsluhy: $E(N_S) = \dfrac{\lambda}{\mu}$

Střední hodnota doby strávené v systému: $E(W) = \dfrac{1}{\mu-\lambda}$, ve frontě: $E(W_Q) = \dfrac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$,

střední hodnota doby obsluhy: $E(W_S) = \dfrac{1}{\mu}$.

Pravděpodobnost, že zákazník nečeká = $1-\dfrac{\lambda}{\mu}$, čeká ve frontě: = $\dfrac{\lambda}{\mu}$

Příklad 1.: K ortopedovi přichází v průměru 16 pacientů za 8 h jeho pracovní doby. Pacient je v průměru ošetřen za 20 min. Předpokládáme, že vstupní proud pacientů je Poissonův proces a doba ošetření se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, vypočtěte

a) využití ortopeda (66,7 %)
b) pravděpodobnost, že pacient nebude čekat (0,33)
c) střední hodnotu doby, kterou pacient stráví v systému (1 h)
d) střední hodnotu počtu pacientů v systému (2 osoby)

Příklad 2.: Do pokladny na železniční stanici přichází v průměru 1 zákazník za 2 minuty. Obsluha trvá v průměru 1 minutu. Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces a doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, řešte následující úkoly:

a) Na kolik % je pokladna využita? (50 %)
b) Jaká je pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě? (0,5)
c) Jaká je střední hodnota doby pobytu v systému, ve frontě a doby obsluhy? (2, 1, 1)
d) Jaká je střední hodnota počtu zákazníků v systému, ve frontě, u pokladny? (1, 0,5, 0,5)

Příklad 3.: K poštovní přepážce přichází v průměru 15 klientů za 1 h. Průměrná doba obsluhy u přepážky činí 3 minuty. Předpokládáme, že doba mezi příchody zákazníků i doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se provoz u poštovní přepážky může stabilizovat. Pokud ano, vyřešte tyto úlohy:

a) Jaká je pravděpodobnost, že klient bude muset čekat ve frontě? (0,75)
b) Jaká je pravděpodobnost, že ve frontě budou více než 3 klienti? (0,3164)
c) Jaká je průměrná doba pobytu zákazníka na poště? (Výsledek udejte v minutách.) (12)

2. Systém M/M/n/∞/FIFO: Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je n linek obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen".

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$. Podíl $\rho = \frac{\beta}{n}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 \text{ pro } j = 1,2,\ldots,n \\ \frac{\beta^j}{n! n^{j-n}} a_0 \text{ pro } j = n+1, n+2, \ldots \end{cases}$, kde $a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)} \right]^{-1}$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě: $P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)}$

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho} + n\rho$.

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = n\rho$.

Střední hodnota doby strávené v systému: $E(W) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$.

Střední hodnota doby strávené ve frontě: $E(W_Q) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$.

Střední hodnota doby strávené obsluhou: $E(W_S) = \frac{1}{\mu}$.

Využití systému: ρ.

Příklad 4.: K benzínové stanici se dvěma čerpadly přijíždí každých 80 sekund jedno auto, přičemž průměrná doba čerpání je 2 min 30 s. Za předpokladu, že příjezdy aut tvoří Poissonův proces, doba čerpání se řídí exponenciálním rozložením a systém se může stabilizovat (ověřte!), vypočtěte
a) pravděpodobnost, že u čerpací stanice budou právě dvě auta (0,0567)
b) střední hodnotu počtu obsazených stojanů (1,875)
c) střední hodnotu doby, kterou řidič stráví u čerpací stanice (20 min 38 s)

Příklad 5.: V laboratoři pracují 3 laborantky. V průměru přichází do laboratoře 15 požadavků za 1 h. Zpracování 1 požadavku trvá v průměru 10 min. Předpokládáme, že vstupní proud požadavků je Poissonův proces a doba zpracování 1 požadavku se řídí exponenciálním rozložením.
a) Může se systém stabilizovat? (ano)
b) Jaký je průměrný počet požadavků čekajících na zpracování? (3,51)
c) Jaká je průměrná doba, která uplyne od předání požadavku po jeho zpracování? (24 min)