

Cvičení 7

Systémy hromadné obsluhy s neomezenou kapacitou

1. Systém M/M/1/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ , doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je 1 linka obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Podíl $\rho = \frac{\lambda}{\mu}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.

Stacionární rozložení: $a_j = \rho^j(1 - \rho)$, $j = 0, 1, \dots$

Počet N zákazníků ve stabilizovaném systému se tedy řídí rozložením $Ge(1 - \rho)$.

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = \frac{\lambda}{\mu - \lambda}$.

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)}$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_s) = \frac{\lambda}{\mu}$.

Střední hodnota doby strávené v systému: $E(W) = \frac{1}{\mu - \lambda}$.

Střední hodnota doby strávené ve frontě: $E(W_Q) = \frac{\lambda}{\mu(\mu - \lambda)}$.

Střední hodnota doby obsluhy: $E(W_s) = \frac{1}{\mu}$.

Pravděpodobnost, že zákazník najde volnou linku = $1 - \frac{\lambda}{\mu}$.

Pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě = $\frac{\lambda}{\mu}$.

Charakteristiky stabilizovaného systému poskytně funkce neomezeny_1.m

```
function[a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi);
% [a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi)
% Vypočítá prvek a0 stacionárního rozložení, intenzitu provozu
% a charakteristiky systému hromadné obsluhy M|M|1|Inf|FIFO.
% Vstupní parametry:
% lambda .... parametr vstupního proudu, mi ..... parametr obsluhy
% Výstupní parametry:
% a0 ..... pravděpodobnost, že v systému nebude žádný zákazník
% ro ..... intenzita provozu
% ENS ..... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků
% ENQ ..... střední hodnota počtu zákazníků ve frontě
% EN ..... střední hodnota počtu zákazníků v systému
% EWS ..... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví obsluhou
% EWQ ..... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví ve frontě
% EW ..... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v systému
ro=lambda/mi;
if ro<1
    a0=1-ro;
    ENS=ro;
    ENQ=lambda^2/(mi*(mi-lambda));
    EN=lambda/(mi-lambda);
    EW=1/(mi-lambda);
    EWS=1/mi;
    EWQ=lambda/(mi*(mi-lambda));
else
    error('Systém se nemůže stabilizovat. Intenzita provozu je větší než 1.')
end;
```

Příklad 1.: K ortopedovi přichází v průměru 16 pacientů za 8 h jeho pracovní doby. Pacient je v průměru ošetřen za 20 min. Předpokládáme, že vstupní proud pacientů je Poissonův proces a doba ošetření se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, vypočtěte

- využití ortopeda
- pravděpodobnost, že pacient nebude čekat
- střední hodnotu doby, kterou pacient stráví v systému
- střední hodnotu počtu pacientů v systému.

Řešení: $\lambda = 2, \mu = 3, \rho = \frac{2}{3} < 1 \Rightarrow$ systém se může stabilizovat

Ad a) Ortoped je využit na 66,6%.

Ad b) Pravděpodobnost, že pacient nebude čekat: $a_0 = 1 - \rho = 0,3$

Ad c) $E(W) = 1$ h, dále $E(W_Q) = 40$ min, $E(W_S) = 20$ min

Ad d) $E(N) = 2$ osoby, dále $E(N_Q) = 1\frac{1}{3}$ osoby, $E(N_S) = \frac{2}{3}$ osoby

Návod na řešení pomocí MATLABu:

lambda=2;mi=3;

[a0,ro,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_1(lambda,mi)

Příklad 2.: Do pokladny na železniční stanici přichází v průměru 1 zákazník za 2 minuty. Obsluha trvá v průměru 1 minutu. Předpokládáme, že vstupní proud zákazníků je Poissonův proces a doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se systém může stabilizovat. Pokud ano, řešte následující úkoly:

- Na kolik % je pokladna využita? (na 50 %)
- Jaká je pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě? (0,5)
- Jaká je střední hodnota doby pobytu v systému, ve frontě a doby obsluhy? (2 min, 1 min, 1 min)

Jaká je střední hodnota počtu zákazníků v systému, ve frontě, u pokladny? (1 osoba, 0,5 osoby, 0,5 osoby)

Výsledek: Systém se může stabilizovat.

Ad a) Pokladna je využita na 50 %.

Ad b) Pravděpodobnost, že zákazník bude čekat ve frontě, je 0,5.

Ad c) $E(W) = 2$ min, $E(W_Q) = 1$ min, $E(W_S) = 1$ min

Ad d) $E(N) = 1$ osoba, $E(N_Q) = 0,5$ osoby, $E(N_S) = 0,5$ osoby

Příklad 3.: K poštovní přepážce přichází v průměru 15 klientů za 1 h. Průměrná doba obsluhy u přepážky činí 3 minuty. Předpokládáme, že doba mezi příchody zákazníků i doba obsluhy se řídí exponenciálním rozložením. Zjistěte, zda se provoz u poštovní přepážky může stabilizovat. Pokud ano, vyřešte tyto úlohy:

- Jaká je pravděpodobnost, že klient bude muset čekat ve frontě?
- Jaká je pravděpodobnost, že ve frontě budou více než 3 klienti?
- Jaká je průměrná doba pobytu zákazníka na poště? (Výsledek udejte v minutách.)

Řešení:

Jde o systém M/M/1/∞/FIFO.

$$\lambda = \frac{15}{60} = \frac{1}{4}, \mu = \frac{1}{3}, \rho = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \text{system se může stabilizovat}$$

Ad a) Pravděpodobnost čekání = $\rho = 0,75$

Ad b)

$$P(N > 3) = 1 - P(N \leq 3) = 1 - a_0 - a_1 - a_2 - a_3 = 1 - \sum_{j=0}^3 (1 - \rho)\rho^j = 1 - \frac{1}{4} \sum_{j=0}^3 \left(\frac{3}{4}\right)^j = 0,3164$$

$$\text{Ad c) } E(W) = \frac{1}{\mu - \lambda} = \frac{1}{\frac{1}{3} - \frac{1}{4}} = 12 \text{ min.}$$

2. Systém M/M/n/∞/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ , doba obsluhy se řídí rozložením $Ex(\mu)$, v systému je n linek obsluhy, kapacita systému je neomezená, frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$. Podíl $\rho = \frac{\beta}{n}$ se nazývá intenzita provozu. Systém se může stabilizovat, pokud $\rho < 1$.

$$\text{Stacionární rozložení: } a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 & \text{pro } j = 1, 2, \dots, n \\ \frac{\beta^j}{n! n^{j-n}} a_0 & \text{pro } j = n + 1, n + 2, \dots \end{cases}, \text{ kde } a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)} \right]^{-1}$$

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě: $P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)}$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho} + n\rho$.

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = P_Q \frac{\rho}{1-\rho}$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_s) = n\rho$.

Střední hodnota doby strávené v systému: $E(W) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)} + \frac{1}{\mu}$.

Střední hodnota doby strávené ve frontě: $E(W_Q) = P_Q \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$.

Střední hodnota doby strávené obsluhou: $E(W_s) = \frac{1}{\mu}$.

Využití systému: $\kappa = \rho$.

Charakteristiky stabilizovaného systému poskytné funkce neomezeny_n.m

```
function[a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi);
% [a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi)
%
% Vypočítá prvek a0 stacionárního rozložení, intenzitu provozu
% a charakteristiky systému hromadné obsluhy M|M|n|Inf|FIFO.
%
% Vstupní parametry:
% n ..... počet linek obsluhy,
% lambda .... parametr vstupního proudu,
% mi ..... parametr obsluhy
%
% Výstupní parametry:
% a0 ..... pravděpodobnost, že v systému nebude žádný zákazník
% ro ..... intenzita provozu (využití systému)
% PQ ..... pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě
% ENS ..... střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků
% ENQ ..... střední hodnota počtu zákazníků ve frontě
% EN ..... střední hodnota počtu zákazníků v systému
% EWS ..... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví obsluhou
% EWQ ..... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví ve frontě
% EW ..... střední hodnota doby, kterou zákazník stráví v systému

beta=lambda/mi;
ro=beta/n;
if ro<1
    a0=inv(sum(beta.^(0:n-1)./factorial(0:n-1))+n*beta^n/factorial(n)/(n-beta));
    PQ=a0*beta^n/(factorial(n)*(1-ro));
    ENS=n*ro;
    ENQ=PQ*ro/(1-ro);
    EN=ENQ+ENS;
    EWS=1/mi;
    EWQ=PQ*ro/(lambda*(1-ro));
    EW=EWS+EWQ;
else
    error('Systém se nemůže stabilizovat. Intenzita provozu je větší než 1.')
end;
```

Příklad 4.: K benzínové stanici se dvěma čerpadly přijíždí každých 80 sekund jedno auto, přičemž průměrná doba čerpání je 2 min 30 s. Za předpokladu, že příjezdy aut tvoří Poissonův proces, doba čerpání se řídí exponenciálním rozložením a systém se může stabilizovat (ověřte!), vypočtete

- pravděpodobnost, že u čerpací stanice budou právě dvě auta
- střední hodnotu počtu obsazených stojanů
- střední hodnotu doby, kterou řidič stráví u čerpací stanice.

Řešení: $n = 2$, $\lambda = \frac{3600}{80} = 45$, $\mu = \frac{1}{\frac{2,5}{60}} = \frac{600}{25} = 24$, $\beta = \frac{45}{24} = \frac{15}{8}$, $\rho = \frac{\beta}{n} = \frac{15}{16} < 1 \Rightarrow$ systém se

může stabilizovat

$$\text{ad a) } a_0 = \left[\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n\beta^n}{n!(n-\beta)} \right]^{-1} = \left[1 + \frac{15}{8} + \frac{2 \left(\frac{15}{8} \right)^2}{2 \left(2 - \frac{15}{8} \right)} \right]^{-1} = \frac{8}{248} = \frac{1}{31} = 0,0323$$

$$a_2 = \frac{\beta^2}{2!} a_0 = \left(\frac{15}{8} \right)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{31} = \frac{225}{3968} = 0,0567$$

$$\text{ad b) } E(N_s) = n\rho = 2 \frac{15}{16} = \frac{15}{8} = 1,875$$

ad e)

$$P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)} = \frac{1}{31} \cdot \frac{\frac{225}{64}}{\frac{1}{8}} = \frac{225}{248}$$

$$E(W) = P_Q \frac{\rho}{(1-\rho)\lambda} + \frac{1}{\mu} = \frac{225}{248} \cdot \frac{\frac{15}{16}}{\left(1 - \frac{15}{16} \right) \cdot 45} + \frac{1}{24} = \frac{32}{93} = 0,344 \text{ h} = 20 \text{ min } 38 \text{ s}$$

Návod na řešení pomocí MATLABu:

lambda=45;mi=24;n=2;

[a0,ro,PQ,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=neomezeny_n(n,lambda,mi)

Příklad 5.: V laboratoři pracují 3 laborantky. V průměru přichází do laboratoře 15 požadavků za 1 h. Zpracování 1 požadavku trvá v průměru 10 min. Předpokládáme, že vstupní proud požadavků je Poissonův proces a doba zpracování 1 požadavku se řídí exponenciálním rozložením.

- a) Může se systém stabilizovat?
- b) Jaký je průměrný počet požadavků čekajících na zpracování?
- c) Jaká je průměrná doba, která uplyne od předání požadavku po jeho zpracování?

Úlohy řešte pomocí funkce neomezeny_n.m.

Výsledek:

Ad a) Systém se může stabilizovat.

Ad b) Průměrný počet požadavků čekajících na zpracování je 3,51.

Ad c) Průměrná doba, která uplyne od předání požadavku po jeho zpracování, činí 24 min.