

## Cvičení 8

### Systémy hromadné obsluhy s omezenou kapacitou

#### 1. Systém M/M/n/m/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem  $\lambda$ , doba obsluhy se řídí rozložením  $Ex(\mu)$ , v systému je  $n$  linek obsluhy, kapacita systému je omezená (je rovna  $m$ ) a frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Označme  $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$ ,  $\rho = \frac{\beta}{n}$ . Systém se může stabilizovat vždy.

Stacionární rozložení:  $a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 & \text{pro } j = 1, 2, \dots, n \\ \frac{n^n}{n!} \rho^j a_0 & \text{pro } j = n + 1, \dots, m \end{cases}$ , kde

$$a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^m \rho^j}.$$

#### Charakteristiky stabilizovaného systému:

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude odmítnut:  $P_z = \frac{n^n}{n!} \rho^m a_0$ .

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě:

$$P_Q = \begin{cases} a_n \frac{1 - \rho^{m-n}}{1 - \rho} & \text{pro } \rho \neq 1 \\ a_n (m - n) & \text{pro } \rho = 1 \end{cases}.$$

Střední hodnota počtu přijatých zákazníků za jednotku času:  $\lambda_p = \lambda(1 - P_z)$ .

Střední hodnota počtu odmítnutých zákazníků za jednotku času:  $\lambda_z = \lambda P_z$ .

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě:  $E(N_Q) = \sum_{j=n+1}^m (j - n) a_j$ .

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků:  $E(N_S) = \beta(1 - P_z)$ .

Využití systému:  $\kappa = \rho(1 - P_z)$ .

Ostatní charakteristiky dostaneme pomocí Littleova vzorce.

#### Charakteristiky tohoto systému počítá funkce odmítání $m$

**Příklad 1.:** Na jistém oddělení nemocnice jsou na dvou operačních sálech nepřetržitě prováděny neurgentní operace. Na každém sále se v průměru operují 4 pacienti za den a na oddělení přichází v průměru 7 pacientů za den. Přitom z organizačních důvodů bylo stanoveno, že na pořadníku smí být maximálně 10 pacientů, ostatní jsou odesíláni do okolních nemocnic. Určete základní charakteristiky tohoto systému hromadné obsluhy.

**Výsledky:** Jde o systém M/M/n/m/FIFO, kde  $n = 2$ ,  $m = 12$ ,  $\lambda = 7$ ,  $\mu = 4$ ,  $\beta = \frac{7}{4}$ ,  $\rho = \frac{7}{8}$

Pravděpodobnost, že systém bude prázdný: 0,0821

Pravděpodobnost, že pacient bude odeslán jinam: 0,0331

Pravděpodobnost, že pacient bude na operaci čekat: 0,7411

Střední hodnota počtu pacientů čekajících na operaci: 2,8729

Střední hodnota počtu operovaných pacientů: 1,6921

Střední hodnota počtu pacientů v systému: 4,5651

Střední hodnota doby, kterou pacient stráví čekáním: 0,4104 dne = 9 h 51 min

Střední hodnota doby, kterou pacient stráví na operačním sále: 0,2417 dne = 5 h 48 min

Střední hodnota celkové doby: 0,6522 dne = 15 h 39 min

Využití systému: 84,61 %

**Návod na řešení pomocí MATLABu:**

lambda=7;mi=4;n=2;m=12;

[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)

**Příklad 2.:** V autoservisu jsou 3 mycí rampy a jeden pracovník, jemuž mytí auta trvá v průměru 12 min. Za 1 h přijedou průměrně 3 auta. Jsou-li však v okamžiku příjezdu auta všechny rampy obsazeny, auto nečeká a vrací se později.

a) Jaká je pravděpodobnost, že v autoservisu budou 0, 1, 2, 3 auta?

b) Vypočtete střední hodnotu počtu zákazníků v autoservisu a ve frontě.

c) Vypočtete střední hodnotu doby čekání ve frontě.

d) Jaká je pravděpodobnost, že bude volná aspoň jedna rampa?

e) Vypočtete využití systému.

**Výsledky:** Jde o systém M/M/n/m/FIFO, kde  $n = 1$ ,  $m = 3$ ,  $\lambda = 3$ ,  $\mu = 5$ ,  $\beta = \frac{3}{5}$ ,  $\rho = \frac{3}{5}$

$$\text{ad a) } a_0 = \frac{125}{272}, a_1 = \frac{75}{272}, a_2 = \frac{45}{272}, a_3 = \frac{27}{272}$$

$$\text{ad b) } E(N) = \frac{246}{272}, E(N_Q) = \frac{99}{272}$$

$$\text{ad c) } E(W_Q) = \frac{33}{272} = 7 \text{ min } 18 \text{ s}$$

$$\text{ad d) } 1 - a_3 = \frac{245}{272}$$

$$\text{ad e) } \kappa = \frac{147}{272} = 0,54$$

**Návod na řešení pomocí MATLABu:**

lambda=3;mi=5;n=1;m=3;

[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)

## 2. Uzavřený systém M/M/n/m/FIFO

V systému je  $m$  zákazníků, přičemž mohou čekat v omezené frontě délky  $m - n \geq 0$ . Zákazníci po ukončení obsluhy opouštějí systém, ale později se do něj vracejí s novým požadavkem.

Doba pobytu každého zákazníka mimo systém se řídí rozložením  $\text{Ex}(\lambda)$ , doba obsluhy každé linky se řídí rozložením  $\text{Ex}(\mu)$ .

Označme  $\beta = \frac{\lambda}{\mu}$ ,  $\rho = \frac{\beta}{n}$ .

Stacionární rozložení:  $a_j = \begin{cases} \binom{m}{j} \beta^j a_0 & \text{pro } j = 1, 2, \dots, n \\ \frac{n^n m!}{n!(m-j)!} \rho^j a_0 & \text{pro } j = n+1, n+2, \dots, m \end{cases}$ , kde  $a_0 = 1 - \sum_{j=1}^m a_j$

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě:  $P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)}$

### Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému:  $E(N) = \sum_{j=0}^m j a_j$ .

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků:  $E(N_s) = \sum_{j=0}^{n-1} j a_j + n \sum_{j=n}^m a_j$ .

Střední hodnota počtu zákazníků mimo systém:  $E(N_R) = m - E(N)$ .

Střední hodnota počtu zákazníků přicházejících za jednotku času (intenzita vstupního proudu):  $\lambda_R = \lambda E(N_R)$ .

Využití systému:  $\kappa = \rho E(N_R)$ .

Ostatní charakteristiky dostaneme pomocí Littleova vzorce.

### Charakteristiky tohoto systému počítá funkce uzavreny.m

**Příklad 3.:** V uzavřeném systému M/M/n/m/FIFO, kde  $n = 1$ ,  $m = 2$ ,  $\lambda = 3$ ,  $\mu = 2$  vypočtete stacionární rozložení a základní charakteristiky systému.

Úlohy řešte pomocí funkce uzavreny.m.

**Výsledek:**

Stacionární rozložení:  $\mathbf{a} = \left( \frac{2}{17}, \frac{6}{17}, \frac{9}{17} \right) = (0,1176; 0,3529; 0,5294)$

Střední hodnota počtu zákazníků v systému je 1,41.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků je 0,88.

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě je 0,53.

Střední hodnota počtu zákazníků mimo systém je 0,59.

Intenzita vstupního proudu zákazníků je 1,76.

Systém je využit na 88 %.

**Návod na řešení pomocí MATLABu:**

```
lambda=3;mi=2;n=1;m=2;
```

```
function[a,ENS,ENR,EN,lambdaR,kappa]=uzavreny(lambda,mi,n,m)
```

**Příklad 4.:** Skupinu pěti stejných strojů má na starosti jeden údržbář. Doba bezporuchového provozu stroje má exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/2 směny a doba opravy má rovněž exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/20 směny.

a) Jaká je pravděpodobnost, že všechny stroje pracují?

b) Jaká je pravděpodobnost, že budou současně vyřazeny aspoň dva stroje?

Úlohy řešte pomocí funkce uzavreny.m.

**Výsledek:**

Jde o uzavřený systém M/M/n/m/FIFO, kde  $n = 1$ ,  $m = 5$ ,  $\lambda = 2$ ,  $\mu = 20$ ,  $\beta = \frac{1}{10}$ ,  $\rho = \frac{1}{10}$

Ad a) 0,564

Ad b) 0,154

**Návod na řešení pomocí MATLABu:**

```
lambda=2;mi=20;n=1;m=5;
```

```
function[a,ENS,ENR,EN,lambdaR,kappa]=uzavreny(lambda,mi,n,m)
```