Cvičení 8 s návodem

Systémy hromadné obsluhy s omezenou kapacitou

1. Systém M/M/n/m/FIFO

Vstupní proud zákazníků je Poissonův proces s parametrem λ, doba obsluhy se řídí rozložením $\mathrm{Ex}(\mu)$, v systému je n linek obsluhy, kapacita systému je omezená (je rovna m) a frontový režim je „první vstupuje, první je obsloužen“.

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}, \rho = \frac{\beta}{n}$. Systém se může stabilizovat vždy.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \frac{\beta^j}{j!} a_0 \text{ pro } j = 1,2,\dots,n \\ \frac{n^n}{n!} \rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1,\dots,m \end{cases}$, kde

$$a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^{m} \rho^j}.$$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude odmítnut: $P_Z = \frac{n^n}{n!} \rho^m a_0$.

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě:

$$P_Q = \begin{cases} a_n \frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho} \text{ pro } \rho \neq 1 \\ a_n (m-n) \text{ pro } \rho = 1 \end{cases}.$$

Střední hodnota počtu přijatých zákazníků za jednotku času: $\lambda_P = \lambda(1 - P_Z)$.

Střední hodnota počtu odmítnutých zákazníků za jednotku času: $\lambda_Z = \lambda P_Z$.

Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě: $E(N_Q) = \sum_{j=n+1}^{m} (j-n) a_j$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = \beta(1 - P_Z)$.

Využití systému: $\kappa = \rho(1 - P_Z)$.

Ostatní charakteristiky dostaneme pomocí Littleova vzorce.

```
function[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda
,mi,n,m);
%
[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)
%
% Vypocita stacionarní rozlození, vyuziti a charakteristiky systemu
% hromadne obsluhy s omezenou kapacitou M|M|n|m|FIFO s odmitanim.
%
% Vstupní parametry:
% lambda .... parametr vstupniho proudu
% mi ........ parametr obsluhy
% n ......... pocet linek obsluhy
% m ......... kapacita systému
%
% Vystupní parametry:
% a ......... stacionarni rozlození
% PZ ........ pravdepodobnost, ze prichozi zakaznik bude odmitnut
% PQ ........ pravdepodobnost, ze prichozi zakaznik bude cekat ve fronte
% lambdaP ... stredni hodnota poctu prijatych zakazniku za jednotku casu
% lambdaZ ... stredni hodnota poctu odmitnutych zakazniku za jednotku casu
% ENS ....... stredni hodnota poctu obsluhovanych zakazniku
% ENQ ....... stredni hodnota poctu zakazniku ve fronte
% EN ........ stredni hodnota poctu zakazniku v systemu
% EWS ....... stredni hodnota doby, kterou zakaznik stravi obsluhou
% EWQ ....... stredni hodnota doby, kterou zakaznik stravi ve fronte
% EW ........ stredni hodnota doby, kterou zakaznik stravi v systemu

beta=lambda/mi;
ro=beta/n;
a(1)=inv(sum(beta.^(0:n-1)./factorial(0:n-1))+n^n/factorial(n)*sum(ro.^(n:m)));
a(2:n+1)=(beta.^(1:n)./factorial(1:n))*a(1);
a(n+2:m+1)=(n^n/factorial(n))*ro.^(n+1:m)*a(1);
PZ=a(m+1);
if ro==1
  PQ=a(n+1)*(m-n);
else
  PQ=a(n+1)*(1-ro^(m-n))/(1-ro);
end;
lambdaP=lambda*(1-PZ);
lambdaZ=lambda*PZ;
kappa=ro*(1-PZ);
ENS=beta*(1-PZ);
ENQ=sum(((n+1:m)-n).*a(n+2:m+1));
EN=ENQ+ENS;
EW=EN/lambda;
EWS=ENS/lambda;
EWQ=ENQ/lambda;
EWQ=ENQ/lambda;
```

Příklad 1.: Na jistém oddělení nemocnice jsou na dvou operačních sálech nepřetržitě prováděny neurgentní operace. Na každém sále se v průměru operují 4 pacienti za den a na oddělení přichází v průměru 7 pacientů za den. Přitom z organizačních důvodů bylo stanoveno, že na pořadníku smí být maximálně 10 pacientů, ostatní jsou odesíláni do okolních nemocnic. Určete základní charakteristiky tohoto systému hromadné obsluhy.

Řešení: Jde o systém M/M/n/m/FIFO, kde n = 2, m = 10+2 = 12.

$$\lambda = 7, \mu = 4, \beta = \frac{\lambda}{\mu} = \frac{7}{4}, \rho = \frac{\beta}{n} = \frac{7}{8}$$

Pravděpodobnost, že systém bude prázdný:

$$a_0 = \frac{1}{\sum_{j=0}^{n-1} \frac{\beta^j}{j!} + \frac{n^n}{n!} \sum_{j=n}^{m} \rho^j} = \frac{1}{\sum_{j=0}^{1} \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^j}{j!} + \frac{2^2}{2!} \sum_{j=2}^{12} \left(\frac{7}{8}\right)^j} = 0{,}0821$$

Pravděpodobnost, že pacient bude odeslán jinam:

$$P_Z = \frac{n^n}{n!} \rho^m a_0 = \frac{2^2}{2!} \left(\frac{7}{8}\right)^{12} 0{,}0821 = 0{,}0331$$

Pravděpodobnost, že pacient bude na operaci čekat:

$$P_Q = a_n \frac{1-\rho^{m-n}}{1-\rho} = a_2 \frac{1-\rho^{10}}{1-\rho} = \frac{\beta^2}{2!} a_0 \frac{1-\rho^{10}}{1-\rho} = \frac{\left(\frac{7}{4}\right)^2}{2!} 0{,}0821 \frac{1-\left(\frac{7}{8}\right)^{10}}{1-\frac{7}{8}} = 0{,}7411$$

Střední hodnota počtu pacientů čekajících na operaci:

$$E(N_Q) = \sum_{j=n+1}^{m} (j-n) a_j = \sum_{j=3}^{12} (j-2) a_j = \sum_{j=3}^{12} (j-2) \frac{2^2}{2!} \left(\frac{7}{8}\right)^j a_0 = 2{,}8729 .$$

Střední hodnota počtu operovaných pacientů:

$$E(N_S) = \beta(1-P_Z) = \frac{7}{4}(1-0{,}0331) = 1{,}6921$$

Střední hodnota počtu pacientů v systému:

$$E(N) = E(N_Q) + E(N_S) = 4{,}5651$$

Střední hodnota doby, kterou pacient stráví čekáním:

$$E(W_Q) = \frac{E(N_Q)}{\lambda} = \frac{2{,}8729}{7} = 0{,}4104 \text{ dne} = 9 \text{ h } 51 \text{ min}$$

Střední hodnota doby, kterou pacient stráví na operačním sále:

$$E(W_S) = \frac{E(N_S)}{\lambda} = \frac{1{,}6921}{7} = 0{,}2417 \text{ dne} = 5 \text{ h } 48 \text{ min}$$

Střední hodnota celkové doby:

$$E(W) = E(W_Q) + E(W_S) = 0{,}6522 \text{ dne} = 15 \text{ h } 39 \text{ min}$$

Využití systému:

$$\kappa = \rho(1-P_Z) = \frac{7}{8}(1-0{,}0331) = 0{,}8461$$

Návod na řešení pomocí MATLABu:
Použijeme funkci odmitani.m
lambda=7;mi=4;n=2;m=12;
[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)

Příklad 2.: V autoservisu jsou 3 mycí rampy a jeden pracovník, jemuž mytí auta trvá v průměru 12 min. Za 1 h přijedou průměrně 3 auta. Jsou-li však v okamžiku příjezdu auta všechny rampy obsazeny, auto nečeká a vrací se později.
a) Jaká je pravděpodobnost, že v autoservisu budou 0, 1, 2, 3 auta?
b) Vypočtěte střední hodnotu počtu zákazníků v autoservisu a ve frontě.
c) Vypočtěte střední hodnotu doby čekání ve frontě.
d) Jaká je pravděpodobnost, že bude volná aspoň jedna rampa?
e) Vypočtěte využití systému.
Řešení: Jde o systém M/M/n/m/FIFO, kde n = 1, m = 3.
$\lambda = 3, \mu = 5, \beta = \frac{3}{5}, \rho = \frac{3}{5}$
ad a) $a_0 = \frac{125}{272}, a_1 = \frac{75}{272}, a_2 = \frac{45}{272}, a_3 = \frac{27}{272}$
ad b) $E(N) = \frac{246}{272}, E(N_Q) = \frac{99}{272}$
ad c) $E(W_Q) = \frac{33}{272} = 7\,\mathrm{min}\,18\mathrm{s}$
ad d) $1 - a_3 = \frac{245}{272}$
ad e) $\kappa = \frac{147}{272} = 0{,}54$
Návod na řešení pomocí MATLABu:
Použijeme funkci odmitani.m
lambda=3;mi=5;n=1;m=3;
[a,PZ,PQ,lambdaP,lambdaZ,kappa,ENS,ENQ,EN,EWS,EWQ,EW]=odmitani(lambda,mi,n,m)

2. Uzavřený systém M/M/n/m/FIFO

V systému je m zákazníků, přičemž mohou čekat v omezené frontě délky $m - n \geq 0$. Zákazníci po ukončení obsluhy opouštějí systém, ale později se do něj vracejí s novým požadavkem.

Doba pobytu každého zákazníka mimo systém se řídí rozložením $Ex(\lambda)$, doba obsluhy každé linky se řídí rozložením $Ex(\mu)$.

Označme $\beta = \frac{\lambda}{\mu}, \rho = \frac{\beta}{n}$.

Stacionární rozložení: $a_j = \begin{cases} \binom{m}{j}\beta^j a_0 \text{ pro } j = 1,2,\ldots,n \\ \frac{n^n m!}{n!(m-j)!}\rho^j a_0 \text{ pro } j = n+1, n+2, \ldots, m \end{cases}$, kde $a_0 = 1 - \sum_{j=1}^{m} a_j$

Pravděpodobnost, že přicházející zákazník bude čekat ve frontě: $P_Q = a_0 \frac{\beta^n}{n!(1-\rho)}$

Charakteristiky stabilizovaného systému:

Střední hodnota počtu zákazníků v systému: $E(N) = \sum_{j=0}^{m} j a_j$.

Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků: $E(N_S) = \sum_{j=0}^{n-1} j a_j + n\sum_{j=n}^{m} a_j$.

Střední hodnota počtu zákazníků mimo systém: $E(N_R) = m - E(N)$.

Střední hodnota počtu zákazníků přicházejících za jednotku času (intenzita vstupního proudu): $\lambda_R = \lambda E(N_R)$.

Využití systému: $\kappa = \rho E(N_R)$.

Ostatní charakteristiky dostaneme pomocí Littleova vzorce.

```
function[a,ENS,ENR,EN,lambdaR,kappa]=uzavreny(lambda,mi,n,m);
% [a,ENS,ENR,EN,lambdaR,kappa]=uzavreny(lambda,mi,n,m)
%
% Vypocita stacionarni rozlozeni, vyuziti a charakteristiky uzavreneho systemu
% hromadne obsluhy s omezenou kapacitou M|M|n|m|FIFO.
%
% Vstupni parametry:
% lambda .... parametr vstupniho proudu
% mi ........ parametr obsluhy
% n ......... pocet linek obsluhy
% m ......... kapacita systemu
%
% Vystupni parametry:
% a ......... stacionarni rozlozeni
% ENS ....... stredni hodnota poctu obsluhovanych zakazniku
% ENR ....... stredni hodnota poctu zakazniku mimo system
% EN ........ stredni hodnota poctu zakazniku v systemu
% lambdaR ... stredni hodnota poctu zakazniku prichazejicich za jednotku casu
% kappa ..... vyuziti systemu

beta=lambda/mi;
ro=beta/n;
for k=2:m+1
  if k<=n+1
    x(k)=nchoosek(m,k-1)*beta^(k-1);
  else
    x(k)=n^n/factorial(n)*factorial(m)/factorial(m-k+1)*ro^(k-1);
  end;
end;
a(1)=1/(1+sum(x));
for k=2:m+1
  a(k)=x(k)*a(1);
end;
ENS=sum((0:n-1).*a(1:n))+n*sum(a(n+1:m+1));
EN=sum((0:m).*a);
ENR=m-EN;
lambdaR=lambda*ENR;
kappa=ro*ENR;
```

Příklad 3.: V uzavřeném systému M/M/n/m/FIFO, kde n = 1, m = 2, $\lambda = 3, \mu = 2$ vypočtěte stacionární rozložení a základní charakteristiky systému.
Úlohy řešte pomocí funkce uzavreny.m.
Výsledek:
Stacionární rozložení: $\mathbf{a} = \left(\frac{2}{17}, \frac{6}{17}, \frac{9}{17}\right) = (0{,}1176; 0{,}3529; 0{,}5294)$
Střední hodnota počtu zákazníků v systému je 1,41.
Střední hodnota počtu obsluhovaných zákazníků je 0,88.
Střední hodnota počtu zákazníků ve frontě je 0,53.
Střední hodnota počtu zákazníků mimo systém je 0,59.
Intenzita vstupního proudu zákazníků je 1,76.
Systém je využit na 88 %.

Příklad 4.: Skupinu pěti stejných strojů má na starosti jeden údržbář. Doba bezporuchového provozu stroje má exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/2 směny a doba opravy má rovněž exponenciální rozložení se střední hodnotou 1/20 směny.
a) Jaká je pravděpodobnost, že všechny stroje pracují?
b) Jaká je pravděpodobnost, že budou současně vyřazeny aspoň dva stroje?
Řešení: Jde o uzavřený systém M/M/n/m/FIFO, kde n = 1, m = 5.
$\lambda = 2, \mu = 20, \beta = \frac{1}{10}, \rho = \frac{1}{10}$
$a_1 = 0{,}5a_0$, $a_2 = 0{,}2a_0$, $a_3 = 0{,}06a_0$, $a_4 = 0{,}012a_0$, $a_5 = 0{,}0012a_0$,
$a_0(1 + 0{,}5 + 0{,}2 + 0{,}06 + 0{,}012 + 0{,}0012) = 1$, tedy $a_0 = 0{,}564$
ad a) $P(N = 0) = a_0 = 0{,}564$
ad b) $P(N \geq 2) = a_2 + a_3 + a_4 + a_5 = 0{,}154$
Úlohy řešte pomocí funkce uzavreny.m.

Návod na řešení pomocí MATLABu:
```
lambda=2;mi=20;n=1;m=5;
function[a,ENS,ENR,EN,lambdaR,kappa]=uzavreny(lambda,mi,n,m)
```