

# Deterministické modely

Lenka Příbylová

15. února 2013

# Obsah

Model a jeho tvorba	5
Statické modely a komparativní statika	27
Statické modely interakcí a teorie her	40
Dynamické modely	52
Rovnovážná dynamika	57
Základní spojité modely růstu	66
Nerovnovážná dynamika	88
Strukturovaný spojitý dynamický model	93
Spojité a diskrétní dynamika v $\mathbb{R}^m$ .	105

<b>Lineární diskrétní model v rovině</b>	<b>114</b>
<b>Strukturovaný diskrétní dynamický lineární model populace</b>	<b>120</b>
<b>Nelineární dynamika a linearizace</b>	<b>126</b>
<b>Dynamické modely v rovině</b>	<b>132</b>
<b>Dynamika chemických reakcí</b>	<b>146</b>
<b>Dynamické modely interakcí</b>	<b>153</b>
<b>Evoluční hry</b>	<b>171</b>
<b>Teorie her a dynamika</b>	<b>181</b>
<b>Dynamický model difúze a šíření</b>	<b>187</b>
<b>Model difúze s advekcí</b>	<b>218</b>



# Model a jeho tvorba

**Definice:** Model je zjednodušená reprezentace reálného objektu nebo systému reálných objektů zapsaná rovnicemi nebo počítačovým programem.

**Definice:** Deterministickým modelem rozumíme model, který spontánně nemění svůj stav.

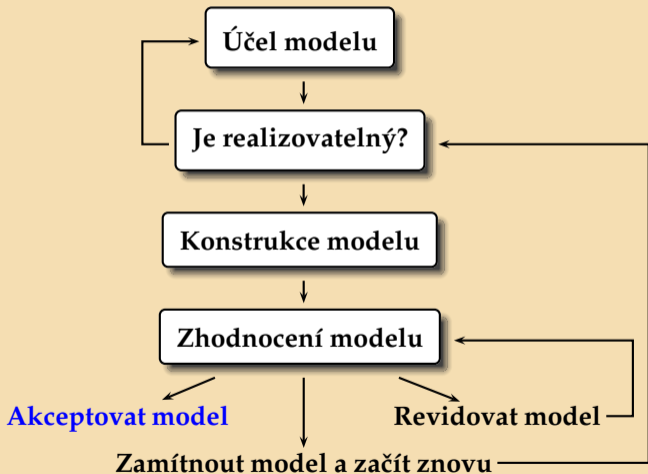
## Determinismus

je přesvědčení, že vývoj světa je předem dán jeho současným stavem (případně jeho stavem v kterémkoliv bodě v minulosti či na počátku) a absolutně platnými přírodními zákony. Dle tohoto přesvědčení neexistují skutečně náhodné (stochastické) jevy, pocit náhodnosti je dán pouze naší neznalostí příčin. Determinismus dle některých interpretací vylučuje existenci svobodné vůle (inkompatibilismus), jejich slučitelnost je ale možná v podobě dualismu (kompatibilismus). Deterministické přesvědčení bylo silné v 18. a 19. století po objevech mnohých přírodních, zvláště fyzikálních, zákonů. Po objevu kvantové fyziky vliv determinismu mezi vědci zeslábl, přestože ve vědě zesláblo i přesvědčení o svobodné vůli.

Tolik z Wikipedie... Většina vzdělaných lidí determinismus chápe právě tímto způsobem.

Mou snahou bude předložit poněkud komplexnější pohled. Determinismus v moderním pojetí není v rozporu se stochastickými jevy, může je dokonce vysvětlovat. Myšlenky tohoto pojetí světa vyslovil poprvé Ilya Prigogine v 70. letech minulého století a ovlivnil tak celou moderní vědu, zvláště oblasti chemické a biochemické, fyzikální, např. právě kvantovou mechaniku, ale ovlivnil i sociální vědy. V pozadí jeho úvah stojí nelineární dynamické jevy, bifurkace a nerovnovážná dynamika. Tento pohled na dynamické chování systémů je novou vědou 21. století. Jedním z úžasných důsledků takového pojetí světa je vysvětlení vzniku řádu z chaosu, vzniku složitých struktur v případě, že je systém vzdálen od své rovnováhy. Takový systém je možný pouze v případě, že si vyměňuje energii nebo informace s okolím, tedy není izolovaný. Izolované systémy spějí nenávratně k rovnováze, stavu s maximální entropií. Věci se rozpadají, káva chladne. Interakce s okolím a výměna energie způsobuje vznik složitých struktur, nerovnovážných avšak organizovaných dějů. Život.

## Tvorba modelu:





## Účel modelu

<b>Praktické modely:</b>	<b>Teoretické modely:</b>
Hlavní účel: management, tvorba plánu, predikce.	Hlavní účel: porozumění principům, rozvoj teorie.
Důležitá je numerická přesnost i na úkor jednoduchosti.	Numerická přesnost není podstatná, model popisuje princip a má být co nejjednodušší.
Některé procesy můžeme ignorovat, pokud nejsou numericky podstatné.	Některé procesy můžeme ignorovat, pokud nejsou principiálně podstatné.
Předpoklady jsou kvantitativní.	Předpoklady jsou kvalitativní.
Model je tvořen "na míru".	Model je aplikovatelný na širokou oblast.

## Je model realizovatelný?

Nejčastější omezující podmínky jsou

- čas - náročnost odhadujte spíše pesimisticky, je lépe začít s jednoduchým modelem a ten pak rozšiřovat
- data - zde naopak uvažujte spíše optimisticky, mnohdy nejsou některé parametry modelu třeba, lze je obejít nebo nejsou podstatné
- kapacita a výkon počítače - pokud nezpracováváte zrovna kvantitativní model počasí nebo množství hmoty ve Vesmíru můžete být klidní

## Konstrukce modelu:



## Koncepce modelu

- Které proměnné jsou pro model podstatné?
- Které z nich budou **stavové proměnné** a které **exogenní proměnné** a **parametry**. Stavovou proměnnou je proměnná, která určuje stav popisovaného systému, exogenní proměnnou je obecně funkce nezávislá na stavu systému, parametrem je konstanta nezávislá na stavu systému. Obecně je lépe začít s mnoha stavovými proměnnými, které během tvory modelu přesouváme mezi exogenní proměnné a parametry.
- Jak detailní bude model? Je třeba rozhodnout, které jednotky budeme považovat za identické. Při volbě velké agregace může dojít k chybám, pokud se jednotky chovají odlišným způsobem, pak je třeba jednotku rozdělit, tzv. strukturovat (druhově, věkově apod.), mluvíme pak o **strukturovaném modelu**. Mnohdy i přes velkou agregaci je nestrukturovaný model vzhledem jeho účelu vhodný.

Stejně tak přílišný detail vede k přílišné složitosti modelu a mnoha parametrům, které je třeba odhadovat z mnoha dat - a ta nemusí být k dispozici. Musíme vhodně volit mezi chybou danou modelem a chybou danou parametry.

## Diagram

- Zvolené (pro model podstatné) proměnné "uložíme do krabiček".
- Zakreslíme vzájemné vztahy, které nám pomohou rozhodnout, zda je daná proměnná stavová nebo exogenní, nebo ji můžeme považovat za parametr.
- Zakreslení vztahů je první kontrolou vhodné volby agregace.

## Rovnice

- V první řadě volíme mezi **statickým** a **dynamickým modelem**. Pokud je účelem modelu najít rovnováhu systému bez ohledu na to, jakým způsobem (a zda vůbec!) se tato rovnováha ustanoví, volíme model statický. V opačném případě je nutné použít dynamické rovnice.
- Je třeba rozhodnout o typu dynamických rovnic. Základním vodičkem je **diskrétní** resp. **spojitý** běh času. V diskrétním případě je vhodné použít diferenční rovnice, ve spojitém diferenciální rovnice. Můžeme pak použít ODE, PDE, rovnice se zpožděním apod.

- Je třeba rozhodnout o **linearitě** nebo **nelinearitě modelu**. V první řadě tedy, zda budou procesy mezi stavovými proměnnými záviset na jedné nebo více proměnných a zda můžeme míry těchto procesů považovat za parametry a exogenní proměnné (tedy konstanty nebo funkce nezávislé na stavových proměnných) nebo zda závisí na stavových proměnných. V druhém případě je třeba volit model nelineární. Nelinearita v modelu může být dána jednak samotnými principy nebo také nelineárními odhady naměřených dat.
- Rovnice v modelu musí "sedět" jednotkově. V okamžiku, kdy máme sestaveny rovnice, můžeme je zjednodušit co se týče počtu parametrů vhodnou transformací času a stavových proměnných (nondimensionalization - zbavení se jednotek).

## Počítačová realizace

- Maple - vhodný spíše pro teoretické modely
- Matlab - vhodný pro maticové zápisy
- R - freeware ;-)
- Matcont - kontinuační balík pod placený Matlab
- XppAut - freeware, vhodný pro parametrickou analýzu
- Tabulkové procesory - vhodné pro diskrétní modely



## Zhodnocení modelu:

Bylo by jednoduché říct, že zhodnotíme vhodnost modelu nakreslením reálných a simulovaných dat do jednoho grafu a porovnáme je. Není to tak, protože záleží na účelu modelu, krátkodobosti nebo dlouhodobosti predikce, možnostech dobrého odhadu parametrů apod. Žádný model nemůže být realitou, proto zhodnocení modelu nutně v některém okamžiku selže. Je na nás rozhodnout, zda je model už "dostatečně blízko". Daleko jednodušší je porovnávat více modelů mezi sebou.

## Proč tak složitě, když známe lineární regresní model?

- lineární regresní model prokládá naměřenými daty křivku a slouží k predikci, JENŽE
- je použitelný většinou jen pro krátkodobou predikci
- neřekne nic o principu chování systému a vztazích v popisovaném systému
- je použitelný jen na konkrétní situaci, výsledky nelze zobecnit
- popisuje pouze trend nebo naopak detail, ne obojí
- nemůže odhalit, které parametry jsou pro systém podstatné a použitelné např. pro jeho kontrolu

NAROZDÍL OD DETERMINISTICKÉHO MODELU!!!

## Tři základní rady

## Tři základní rady

NEBOJTE SE

## Tři základní rady

NEBOJTE SE

LHÁT

## Tři základní rady

NEBOJTE SE

LHÁT

PODVÁDĚT

## Tři základní rady

NEBOJTE SE

LHÁT

PODVÁDĚT

a

KRÁST

## Lhát

Dobry model obsahuje nekorektni predpoklady. Prakticke modely musi byt tak zjednodusene, aby mnozstvi jejich parametru nepresahlo dostupna data. Teoreticke modely musi byt tak jednoduché, aby bylo videt co delaji a proc. Reálny svet takovy, bohužel a bohudík, není. Proto musí modely ignorovat některá fakta nebo procesy a nahradit je jednoduššími, jistojistě nepravdivými . . .



## Podvádět

Přesněji, dělejte věci, které budou statistiky znervózňovat, jako například použijte data závislá na jedné proměnné k odhadu parametrů rovnice závislé na mnoha proměnných, používejte znalosti z jiných oborů a používejte intuici. Data jsou pouze jeden z faktorů, které ovlivňují tvorbu modelu, další jsou zkušenost a znalost modelované problematiky.

## Krást

Nápady si berte odkudkoliv, nezáleží na vědním oboru. Nové vědecké objevy jsou mnohdy výsledkem konvenčních modelů s použitím konvenčních funkčních tvarů v rovnicích - jen v jiném vědeckém oboru. Jestliže již někdo vytvořil rozumný model pro proces, který se objevuje ve vašem modelu, vyzkoušejte ho. Když už někdo věnoval čas a úsilí k odhadu parametrů, použijte ho. Buďte však kritičtí a neváhejte zahodit, co jste si ukradli, pokud to nebude fungovat. Zkuste to spravit a přizpůsobit, třeba to fungovat bude . . .

# Statické modely a komparativní statika

**Definice:** Statickým modelem rozumíme model nezávislý na běhu času. Popisuje strukturu reálného objektu v rovnovážném stavu.

**Definice:** Komparativní analýzou statického modelu rozumíme analýzu stavových proměnných statického modelu v závislosti na exogenních proměnných a parametrech modelu.

**Poznámka 1.** Rovnice statického modelu nezávisí na čase. Rovnovážný stav je jejich řešením, tedy nalezením stavových proměnných jako funkcí proměnných exogenních a parametrů. Komparativní statiku popisují parciální derivace stavových proměnných podle exogenních proměnných a parametrů.

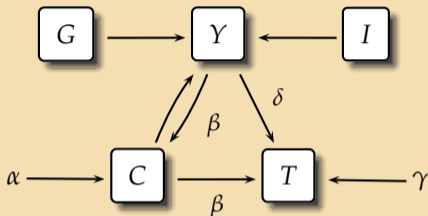
## Třísektorový model uzavřené ekonomiky.

Chceme zjistit zda a jak ovlivňují vládní výdaje hrubý národní produkt. Budeme tedy vytvářet teoretický model, jistě realizovatelný.

### Koncepce:

Proměnnými budou jistě vládní výdaje  $G$  a hrubý národní produkt (důchod)  $Y$ . Vládní výdaje jsou hrazeny z daní  $T$ , to bude další proměnná. Na celkovou národní produkci můžeme nahlížet také jako na celkovou sumu peněz za tento produkt, ty jsou rozděleny na tři základní části - investice  $I$ , spotřebu  $C$  a vládní výdaje  $G$ . Uvědomme si jak hrubou agregaci jsme provedli a také jaké předpoklady jsou v pozadí. Tím nejpodstatnějším je, že vše, co je vytvořeno danou ekonomikou, zde je také koupeno. Neexistuje import a export, jde o uzavřenou ekonomiku.

## Diagram:



Do diagramu doplníme další vztahy. Spotřeba  $C$  je závislá zčásti na disponibilním důchodu ( $Y - T$ ) a zčásti ne - tzv. autonomní výdaje  $\alpha$ . Daně  $T$  jsou podobně tvořeny daněmi z příjmu  $Y$  a jinými typy daní  $\gamma$ . Vzhledem k účelu modelu předpokládáme, že jsou vztahy mezi proměnnými lineární. Vidíme, že proměnné  $G$  a  $I$  můžeme přesunout mezi exogenní proměnné. Stavovými proměnnými budou  $Y$ ,  $C$  a  $T$ .

## Rovnice:

$$\begin{aligned}Y &= I + C + G, \\C &= \alpha + \beta(Y - T), \\T &= \gamma + \delta Y,\end{aligned}$$

kde  $\alpha > 0$ ,  $0 < \beta < 1$ ,  $\gamma > 0$  a  $0 < \delta < 1$  jsou parametry,  $G$  a  $I$  exogenní proměnné. Rovnice jsou v jednotkách peněz, parametry  $\beta$  a  $\delta$  jsou bezrozměrné (množství parametrů bychom mohli ještě snížit). Jde o statický model. Vyřešením rovnic dostáváme rovnováhu

$$\bar{Y} = \frac{\alpha - \beta\gamma + I + G}{1 - \beta(1 - \delta)}.$$

Jmenovatel  $1 - \beta(1 - \delta)$  je podle předpokladů kladný, čitatel může být záporný jen v případě vysokého  $\gamma$ , tedy v případě nepřiměřené výše nepřijmových daní dojde ke kolapsu ekonomiky. Účelem modelu bylo zjistit jak ovlivňují vládní výdaje hrubý národní produkt, odtud je zřejmé, že jej zvyšují. Tzv. vládní výdajový multiplikátor je definován

jako číslo, které udává o kolik se zvedne GNP, jestliže se zvednou vládní výdaje o jednotku

$$\frac{\partial \bar{Y}}{\partial G} = \frac{1}{1 - \beta(1 - \delta)} > 0.$$

Relevantními parametry jsou tedy  $\beta$  a  $\delta$ , které lze odhadnout z naměřených dat.

### Vyhodnocení:

Model je teoretický a těžko porovnatelný s reálnými daty, vzhledem k předpokladu uzavřené ekonomiky. Slouží k pochopení principů a tento účel splnil. Vhodnou revizí by bylo zavedení nových proměnných: exportu a importu.

**Věta:** Necht'  $x = (x_1, \dots, x_n)$  je vektor stavových proměnných,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_m)$  je vektor exogenních proměnných a parametrů a funkce  $F = (F^1, \dots, F^n) : \mathbb{R}^{n+m} \rightarrow \mathbb{R}^n$  je hladká.

Necht'  $\bar{x}(\alpha) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$  je řešení rovnic modelu  $F(x, \alpha) = 0$ , tedy  $F(\bar{x}(\alpha), \alpha) = 0$ . Je-li jakobián  $F$  v  $\bar{x}$  nenulový, tj.

$$|DF(\bar{x})| = \begin{vmatrix} F_{x_1}^1 & \cdots & F_{x_n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{x_1}^n & \cdots & F_{x_n}^n \end{vmatrix} \Big|_{x=\bar{x}} \neq 0,$$

pak je řešení úlohy závislosti rovnovážné stavové proměnné  $\bar{x}$  na některé exogenní proměnné  $\alpha_i$  řešením soustavy

$$DF(\bar{x}) \cdot \frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha_i} = -F_{\alpha_i}. \quad (1)$$



*Důkaz.* Vzhledem k předpokladu hladkosti funkce  $F$ , můžeme rovnice modelu

$$\begin{aligned} F^1(\bar{x}(\alpha), \alpha) &= 0, \\ &\vdots \\ F^n(\bar{x}(\alpha), \alpha) &= 0 \end{aligned}$$

derivovat podle proměnné  $\alpha_i$ , dostáváme tedy

$$\begin{aligned} F_{x_1}^1 \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \alpha_i} + \dots + F_{x_n}^1 \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \alpha_i} + F_{\alpha_i}^1 &= 0, \\ &\vdots \\ F_{x_1}^n \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \alpha_i} + \dots + F_{x_n}^n \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \alpha_i} + F_{\alpha_i}^n &= 0, \end{aligned}$$

což je maticově

$$\begin{pmatrix} F_{x_1}^1 & \dots & F_{x_n}^1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ F_{x_1}^n & \dots & F_{x_n}^n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \alpha_i} \\ \vdots \\ \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \alpha_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -F_{\alpha_i}^1 \\ \vdots \\ -F_{\alpha_i}^n \end{pmatrix}.$$



**Poznámka 2.** Parciální derivace vektoru stavových proměnných podle zvoleného parametru  $\frac{\partial \bar{x}}{\partial \alpha_i} = \left( \frac{\partial \bar{x}_1}{\partial \alpha_i}, \dots, \frac{\partial \bar{x}_n}{\partial \alpha_i} \right)^T$  často nemusíme hledat všechny. Vzhledem k tomu, že  $|DF(\bar{x})| \neq 0$ , je úloha (1) jednoznačně řešitelná a řešení můžeme hledat pomocí Cramerova pravidla:  $\frac{\partial \bar{x}_j}{\partial \alpha_i} = \frac{|D_{ji}|}{|DF(\bar{x})|}$ , kde  $D_{ji}$  je Jakobiho matice  $F$  v  $\bar{x}$  s  $j$ -tým sloupcem nahrazeným vektorem  $-F_{\alpha_i} = (-F_{\alpha_i}^1, \dots, -F_{\alpha_i}^n)^T$ .

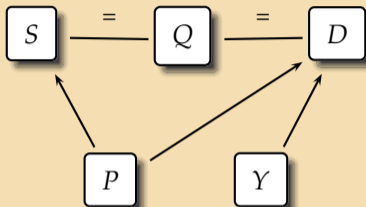
## Model trhu.

Chceme zjistit zda a jak ovlivňuje spotřebitelský důchod cenu výrobku a jeho množství.

Koncepce:

Proměnnými budou spotřebitelský důchod  $Y$ , cena  $P$  a množství  $Q$  výrobku. Rovnováha trhu se ustanoví, pokud se nabídka  $S$  vyrovná poptávce  $D$ .

## Diagram:



Do diagramu doplníme další vztahy. Cena  $P$  ovlivňuje nabídku  $S$  i poptávku  $D$ , poptávku ovlivňuje také spotřebitelský důchod  $Y$ . Vidíme, že proměnná  $Y$  je exogenní. Stavovými proměnnými budou  $P$  a  $Q$ . Navíc předpokládejme, že platí

$$\frac{\partial S}{\partial P} > 0, \quad \frac{\partial D}{\partial P} < 0 \quad \text{a} \quad \frac{\partial D}{\partial Y} > 0.$$

## Rovnice:

$$F^1(P, Q, Y) = S(P) - Q = 0,$$

$$F^2(P, Q, Y) = D(P, Y) - Q = 0.$$

Předpokládejme, že  $(\bar{P}, \bar{Q})$  je tržní rovnováha. Derivací rovnic modelu podle  $Y$  dostaneme

$$\frac{\partial F^1(\bar{P}, \bar{Q}, Y)}{\partial Y} = \frac{\partial S(\bar{P})}{\partial \bar{P}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} - \frac{\partial \bar{Q}}{\partial Y} = 0,$$

$$\frac{\partial F^2(\bar{P}, \bar{Q}, Y)}{\partial Y} = \frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial \bar{P}} \frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} - \frac{\partial \bar{Q}}{\partial Y} + \frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial Y} = 0.$$

Maticově můžeme rovnice zapsat takto:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial S(\bar{P})}{\partial \bar{P}} & -1 \\ \frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial \bar{P}} & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} \\ \frac{\partial \bar{Q}}{\partial Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial Y} \end{pmatrix}.$$

Jakobiho matice  $DF(\bar{P}, \bar{Q}, Y)$  je regulární, protože

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial S(\bar{P})}{\partial \bar{P}} & -1 \\ \frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial \bar{P}} & -1 \end{vmatrix} = \frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial \bar{P}} - \frac{\partial S(\bar{P})}{\partial \bar{P}} < 0.$$

Parciální derivace můžeme tedy jednoznačně vyjádřit pomocí Cramerova pravidla jako

$$\frac{\partial \bar{P}}{\partial Y} = \frac{\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -\frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial Y} & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial S(\bar{P})}{\partial \bar{P}} & -1 \\ \frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial \bar{P}} & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial Y}}{\frac{\partial S(\bar{P})}{\partial \bar{P}} - \frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial \bar{P}}} > 0$$

$$\frac{\partial \bar{Q}}{\partial Y} = \frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial S(\bar{P})}{\partial \bar{P}} & 0 \\ \frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial \bar{P}} & -\frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial Y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial S(\bar{P})}{\partial \bar{P}} & -1 \\ \frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial \bar{P}} & -1 \end{vmatrix}} = \frac{\frac{\partial S(\bar{P})}{\partial \bar{P}} \frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial Y}}{\frac{\partial S(\bar{P})}{\partial \bar{P}} - \frac{\partial D(\bar{P}, Y)}{\partial \bar{P}}} > 0$$

Zvýšení příjmů tedy vede ke zvýšení ceny i množství. Relevantními parametry jsou tedy  $\frac{\partial S}{\partial \bar{P}}$ ,  $\frac{\partial D}{\partial \bar{P}}$  a  $\frac{\partial D}{\partial Y}$ , které lze odhadnout z naměřených dat.

Vyhodnocení:

Model je teoretický, odpovídá očekávanému výsledku, můžeme jej srovnat s reálnými daty.

**Simulovat**

# Statické modely interakcí a teorie her

Pokud model slouží k popisu interakcí subjektů, zvláště pokud jde o model rozhodovacího procesu v situaci, kdy dochází ke střetu zájmů, je modelem tzv. hra. Teorie her se zabývá analýzou širokého spektra konfliktních i kooperativních rozhodovacích procesů, od aukcí, přes tržní konkurenci, volby, rodinné konflikty až po evoluci a chování zvířat. Teorie her slouží především pro nalezení svým způsobem optimálního řešení konfliktu. Teorie her se zabývá jak statickými, tak dynamickými modely, modely s úplnou informací (deterministickými), tak s neúplnou informací (stochastickými). V této kapitole uvedeme některé statické modely s úplnou informací.



## Výběrové řízení.

Dvě firmy se zajímají o dva trhy zakázek brněnského magistrátu za 18 a 12 mil. korun. Každá z firem má finanční prostředky buď na velký úplatek jednoho úředníka, nebo na menší úplatky obou úředníků rozhodujících o přidělení zakázek. Předpokládejme, že účinnost úplatků obou firem je stejná a úředníci rozdělují podle těchto pravidel:

- Dá-li úplatek jen jedna firma, dostane všechny zakázky trhu.
- Dají-li úplatky téhož typu obě firmy, dělí se zakázky na polovinu.
- Dá-li jedna firma velký a druhá malý úplatek získá prvně jmenovaná  $2/3$  zakázek a druhá  $1/3$  zakázek.

Jaké jsou optimální strategie firem?

strategie	V1	V2	M
V1	(15, 15)	(18, 12)	(12, 18)
V2	(12, 18)	(15, 15)	(9, 21)
M	(18, 12)	(21, 9)	(15, 15)

Strategie obou firem jsou buď velký úplatek V1 prvnímu úředníkovi, velký úplatek V2 druhému úředníkovi nebo dva malé úplatky oběma M (neuplácení ponechme prozatím stranou zájmu). Představme si, že jsme v pozici modré firmy. Pokud by hrála strategii V2 (2. řádek), při jakékoliv volbě strategie červené firmy, získala by méně než při volbě strategie M. Takovouto strategii nazýváme striktně dominovanou jinou strategií,  $V2 \prec M$ . Stejně tak  $V1 \prec M$ . Striktně dominované strategie modrá firma nebude hrát, stejně se zachová i červená firma. Obě zvolí strategii dvou malých úplatků. Toto řešení má tu vlastnost, že při jednostranném odchýlení od této strategie si ani jedna firma nepolepší, říkáme mu rovnovážné řešení.

**Definice:** Hra v normálním tvaru pro  $n$  hráčů je tvořena prostory strategií jednotlivých hráčů  $S_1, \dots, S_n$  a jejich výplatními funkcemi  $u_1, \dots, u_n$ , kde každé  $u_i$  zobrazuje  $S_1 \times \dots \times S_n$  do  $\mathbb{R}$ . Označením  $u_i(s_i, s_{-i})$  budeme rozumět  $u_i(s_1, \dots, s_n)$ , kde  $s_j \in S_j$ .

**Definice:** Necht'  $s'_i, s''_i \in S_i$  jsou dvě možné strategie  $i$ -tého hráče. Řekneme, že strategie  $s'_i$  je striktně dominovaná strategií  $s''_i$ ,  $s'_i \prec s''_i$ , jestliže pro každou kombinaci strategií ostatních hráčů je výplata  $i$ -tého hráče při strategii  $s'_i$  menší než při strategii  $s''_i$ , tj.

$$u_i(s'_i, s_{-i}) < u_i(s''_i, s_{-i}), \text{ pro libovolné strategie protihráčů } s_{-i}.$$

**1. příklad:** Ukažte, že strategie nedávat úplatek nebo dát jen jeden malý úplatek je striktně dominovaná strategií uplatit oba.

**Definice:** Strategie  $s_1^*, \dots, s_n^*$  tvoří Nashovu rovnováhu, jestliže pro každého hráče je  $s_i^*$  nejlepší odpovědí na strategie  $s_{-i}^*$  ostatních, tedy

$$u_i(s_i^*, s_{-i}^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*) \text{ pro libovolné } s_i \in S_i.$$

Jinak řečeno,  $s_i^*$  je řešením extrémální úlohy  $\max_{s_i \in S_i} u_i(s_i, s_{-i}^*)$ .

Pokud při eliminaci striktně dominovaných strategií zůstane jediná kombinace strategií, je jedinou Nashovou rovnováhou. Eliminací striktně dominovaných strategií obecně zmenšíme hru a pokud existuje Nashova rovnováha, zůstává mezi zbylými strategiemi menší hry. Obecně Nashova rovnováha v ryzích strategiích nemusí existovat. Navíc pokud existuje nemusí být pareto-optimální, tj. může existovat strategie s lepší výplatou pro daného hráče přičemž ostatní si nepohorší. Tato strategie ale není rovnovážná, protože vychýlení z této strategie by bylo pro některého hráče výhodnější.

## Cournotův model trhu.

Chceme nalézt optimální množství výrobků, jež budou ochotny na trh dodávat firmy.

### Koncepce:

Exogenními proměnnými budou poptávané množství  $M$  a mezní náklady  $c$  na výrobu jednoho výrobku, endogenní proměnné jsou množství  $q_i$  výrobků od jednotlivých firem. Model bude statický - firmy se v daném okamžiku rozhodnou a nezávisle na sobě volí optimální strategii. Volme tyto zjednodušující předpoklady:

- poptávková funkce je lineární tvaru  $P(Q) = M - Q$ , kde  $Q$  je celkové množství dodávané na trh (pro  $Q \geq M$  je  $P(Q) = 0$ )
- postavení firem je rovnocenné a jejich produkt je homogenní, tj.  $Q = q_1 + \dots + q_n$ .

- mezní náklady  $c$  jsou konstantní,  
tj. nákladová funkce  $C_i(q_i) = cq_i$ ,  $c < M$
- výstup je libovolně dělitelný, prostor strategií tak můžeme označit  
 $S_i = [0, \infty)$

### Rovnice:

Výplatní funkcí je zisková funkce firem:

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i [P(Q) - c] = q_i [M - (q_1 + \dots + q_n) - c]$$

Abychom našli Nashovu rovnováhu tohoto problému, musí každá firma řešit optimalizační problém

$$\max_{0 \leq q_i < \infty} \pi_i(q_i, q_{-i}^*) = \max_{0 \leq q_i < \infty} q_i [M - (q_i + \sum q_{-i}^*) - c]$$

Úkolem je tedy najít maximum kvadratické funkce v proměnné  $q_i$ .

Podmínky prvního řádu tedy jsou:

$$\begin{aligned}2q_1 + q_2 + \cdots + q_n &= M - c \\q_1 + 2q_2 + \cdots + q_n &= M - c \\&\vdots \\q_1 + q_2 + \cdots + 2q_n &= M - c\end{aligned}$$

Řešením jsou hodnoty

$$q_1^* = q_2^* = \cdots = q_n^* = \frac{M - c}{n + 1},$$

které jsou vzhledem ke konkávnosti funkcí  $\pi_i(q_i, q_{-i}^*)$  maximem. Cena odpovídá poptávkové funkci

$$P^* = M - Q = M - n \frac{M - c}{n + 1} = \frac{1}{n + 1} M + \frac{n}{n + 1} c \text{ a zisk firmy je}$$

$$\pi^* = q^* [P^* - c] = \frac{M - c}{n + 1} \left[ \frac{1}{n + 1} M + \frac{n}{n + 1} c - c \right] = \left( \frac{M - c}{n + 1} \right)^2$$

	$Q^*$	$P^*$	$\pi^*$
monopol	$\frac{1}{2}(M - c)$	$\frac{1}{2}M + \frac{1}{2}c$	$\frac{1}{4}(M - c)^2$
duopol	$\frac{2}{3}(M - c)$	$\frac{1}{3}M + \frac{2}{3}c$	$\frac{1}{9}(M - c)^2$
oligopol	$\frac{n}{n+1}(M - c)$	$\frac{1}{n+1}M + \frac{n}{n+1}c$	$\left(\frac{M - c}{n+1}\right)^2$
dok. konkurence	$M - c$	$c$	0

V případě monopolu, je na trhu jediná firma nabízející množství  $q^* = \frac{M - c}{2}$  v případě duopolu nabízí dvě firmy  $q^* = \frac{M - c}{3}$ .

Limitním případem je pro  $n \rightarrow \infty$  dokonalá konkurence, jež na trh dodává celkové množství  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1}(M - c) = M - c$ , při němž firmy dosahují nulového zisku.



## Vyhodnocení:

Monopolista dodává na trh menší množství výrobků než duopolisté a prodává ho za vyšší cenu. Pokud porovnáme celkový zisk monopolisty a obou duopolistů, je vidět, že by pro duopolisty bylo výhodnější vyrábět polovinu produkce monopolisty. Tato strategie ale není rovnovážná, každá firma by v takové situaci musela odolávat pokušení nevyrábět více, z čehož by získala výhodu, pokud by druhá firma udržovala produkci na dané hladině. V takové situaci mohou firmy uzavřít dohodu, problém však spočívá v tom, že vzhledem k antimonopolním opatřením jsou takové dohody protizákonné a tajná dohoda je legálními prostředky nevyimadatelná.

Pro firmy je ale natolik výhodné vytvářet velké kartely a chovat se jako monopolista, že dokonalá soutěž zůstává jen v myšlenkách idealistů.

**2. příklad:** V Cournotově modelu duopolu nakreslete tzv. reakční křivky obou firem, tj. funkce  $q_i = R(q_{-i})$ , které udávají nejlepší odpovědi (best response functions). Ukažte zde Nashovu rovnováhu.

**3. příklad:** Ukažte, že v případě monopolu jsou všechny ostatní strategie striktně dominované strategií  $q^* = \frac{M - c}{2}$ . Nápoděda: ostatní strategie jsou  $q = q^* + x$ , kde  $x \neq 0$ .

**4. příklad:** Najděte Nashovu rovnováhu v Bertrandově modelu duopolu, kde dva výrobci vyrábějí množství

$$q_i(p_i, p_{-i}) = a - p_i + bp_{-i},$$

které závisí na ceně obou výrobků. Přitom  $b \in (0, 2)$  je tzv. elasticita substituce.

**Řešení v Maplu**

V ryzích strategiích ne vždy existuje Nashova rovnováha. Proto zavádíme pojem smíšené strategie, která udává pravděpodobnost volby ryzí strategie. Smíšená strategie je tedy pro každého hráče vektor, jehož  $k$ -tá složka udává pravděpodobnost, s níž hráč volí  $k$ -tou strategií ze svého prostoru strategií. Zde už existenci rovnováhy zaručuje Nashova věta.

**Definice:** Uvažujme konečnou hru  $n$  hráčů v normálním tvaru, kde počet prvků prostoru strategií  $S_i$  libovolného hráče  $i$  označíme symbolem  $m_i$ . Smíšenou strategií hráče  $i$  se rozumí vektor pravděpodobností  $x^i = (x_1^i, \dots, x_{m_i}^i)^T$ , kde  $x_j^i \geq 0$  a  $\sum_j x_j^i = 1$ .

**Věta (Nashova):** Konečná hra  $n$  hráčů má v prostoru smíšených strategií alespoň jednu Nashovu rovnováhu.

# Dynamické modely

**Definice:** Dynamickým modelem rozumíme model závislý na běhu času. Popisuje chování reálného objektu v průběhu času.

Dynamický model je popsán dynamickým systémem (rovnicí, soustavou rovnic, formulí).

**Definice:** Dynamickým systémem rozumíme trojici  $\{T, X, \varphi^t\}$ , kde  $T$  je číselná množina (čas),  $X$  je metrický prostor, který nazýváme **fázovým prostorem**, a  $\varphi^t$  je parametrický systém evolučních operátorů s parametrem  $t \in T$  definovaných jako zobrazení  $\varphi^t : X \rightarrow X$ , které zobrazuje počáteční stav  $x_0 \in X$  na nějaký stav  $x_t = \varphi^t x_0 \in X$ .

**Poznámka 3.** V případě, že  $T = \mathbb{Z}$  mluvíme o **diskrétním** dynamickém systému, je-li  $T = \mathbb{R}$  mluvíme o **spojitém** dynamickém systému.

**Definice:** Deterministickým dynamickým systémem rozumíme systém  $\{T, X, \varphi^t\}$  splňující podmínku

$$\varphi^0 = \text{id},$$

kde id je identita na  $X$ , tj.  $\forall x \in X : \text{id } x = x$ . Tato vlastnost říká, že systém spontánně nemění svůj stav.

**Definice:** Autonomním dynamickým systémem rozumíme deterministický systém  $\{T, X, \varphi^t\}$  splňující podmínku

$$\varphi^{t+s} = \varphi^t \circ \varphi^s,$$

tj.  $\forall x \in X : \varphi^{t+s}x = \varphi^t(\varphi^s x)$ , pokud jsou definovány obě strany rovnice. Tato vlastnost říká, že se „zákony evoluce“ nemění během času.

**Definice:** Trajektorie s počátečním bodem  $x_0 \in X$  je uspořádaná podmnožina fázového prostoru  $X$

$$\{x \in X : x = \varphi^t x_0, \forall t \in T, \text{ pro které je } \varphi^t x_0 \text{ definováno}\}$$

V případě spojitého systému jde o orientované křivky v  $X$ , v případě diskrétního systému jsou to posloupnosti bodů v  $X$ . **Fázovým portrétem** dynamického systému rozumíme rozmístění trajektorií ve fázovém prostoru  $X$ .

**Definice:** Bod  $x_0 \in X$  nazýváme **rovnovážným bodem** (nebo též singulárním, stacionárním, pevným bodem) dynamického systému, jestliže pro všechna  $t \in T$  platí

$$\varphi^t x_0 = x_0.$$

**Definice:** **Cyklem** rozumíme periodickou trajektorii  $L_0$ , která není rovnovážným bodem, splňující  $\forall x_0 \in L_0$

$$\varphi^{t+T_0}x_0 = \varphi^t x_0,$$

pro nějaké  $T_0 > 0, \forall t \in T$ . Nejmenší takové  $T_0$  nazýváme periodou cyklu  $L_0$ .

**Poznámka 4.** V systému s cyklem vznikají periodické oscilace. Cyklus spojitého systému je uzavřená křivka v  $X$ . Limitním cyklem rozumíme cyklus, v jehož okolí nejsou jiné cykly.

**Definice:** **Invariantní množinou**  $S$  rozumíme podmnožinu  $X$  splňující

$$x_0 \in S \Rightarrow \varphi^t x_0 \in S \quad \forall t \in T.$$

**Poznámka 5.** Rovnovážný bod i cyklus jsou invariantní množiny.

**Definice:** Invariantní množina  $S$  se nazývá **stabilní**, jestliže

- $\forall U \supset S$  libovolně malé okolí invariantní množiny existuje okolí  $V \supset S$  takové, že  $\forall x \in V$  a  $\forall t > 0$  platí  $\varphi^t x \in U$  (tento typ stability nazýváme **ljapunovskou stabilitou**),
- existuje okolí  $U_0 \supset S$  takové, že  $\varphi^t x \rightarrow S$  pro  $x \in U_0$  a  $t \rightarrow \infty$  (tento typ stability nazýváme **asymptotickou stabilitou**).

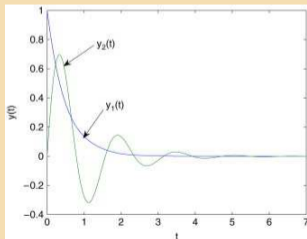
V opačném případě je  $S$  nestabilní.

**Poznámka 6.** Existují další typy stability, my se budeme většinou setkávat s rovnovážnými body a cykly, které jsou jak ljapunovsky, tak asymptoticky stabilní.



# Rovnovážná dynamika

Dynamické modely oproti statickým modelům zachycují vývoj stavových veličin v čase. Až do druhé poloviny minulého století se v aplikovaných vědách objevovaly většinou dynamické modely, které směřovaly k rovnovážnému stavu. Implicitně se tedy předpokládalo, že dynamický systém z libovolné relevantní počáteční hodnoty směřuje k rovnováze, což je přesně pojem stability, dokonce asymptotické.



Uvedme jako příklad **neviditelnou ruku trhu**, která má za každých okolností přivést ekonomický systém k **makroekonomické rovnováze**.

V biochemii uvedme například **Michaelisův-Mentenův model** enzymatické reakce, který si později podrobně rozebereme.

Celá klasická termodynamika předpokládá postupné směřování systému k rovnováze (**vyrovnání teplot** a postupné dosažení maximální entropie).

Tato stabilní dynamická rovnováha je ve skutečnosti právě tou statickou rovnováhou, kterou jsme studovali v předchozích modelech.

Základním principem takovýchto modelů je následující úvaha.

**Čím více se systém odchýlí od své rovnováhy,  
tím větší má tendenci k ní směřovat.**

Tato úvaha je v mnohých případech velmi racionální a aplikovatelná na velké množství situací. Tato úvaha v sobě ale implicitně zahrnuje existenci dynamické rovnováhy a její asymptotickou (dokonce exponenciální) stabilitu. Takovýto předpoklad nutně vede k rovnovážné dynamice.

- Uvedme jako základní příklad Newtonův zákon ochlazování, kdy teplota tělesa se mění tím rychleji, čím větší je rozdíl teplot tělesa a jeho okolí.
- Stejně tak bychom ale mohli použít lineární makroekonomický model nabídky a poptávky, kdy růst nabídky je tím větší, čím větší je převis poptávky nad nabídkou atd.
- Stáda antilop migrují společně a pokud se některá dostane mimo stádo, má tím větší tendenci se k němu připojit, čím dál od něj je.
- Dokonce i chování lidí je možné tímto způsobem modelovat. Většina lidí má tendenci nevybočovat z davu a své chování měnit tím více, čím větší je jeho odlišnost od běžné normy. Můžeme tím vysvětlit např. to, že i ateisté zmlknou v kostele nebo že si i přísný abstinent dá na Silvestra skleničku sektu, byť ji nevypije.

## Newtonův model ochlazování.

### Koncepce:

Představme si kelímek kávy právě vytažené z automatu (o teplotě  $T_0$ ) a postavené do místnosti s teplotou  $T^*$ . Stavová proměnná bude teplota kávy  $T$ , parametrem bude  $k \in \mathbb{R}$ , které bude záviset ostatních fyzikálních veličinách (měrná tepelná kapacita kávy, tvar a plast kelímku apod.).

Diagram:



Rovnice:

$$\frac{dT(t)}{dt} = k(T^* - T(t)). \quad (2)$$

**5. příklad:** Vyřešte rovnici s počáteční podmínkou  $T(0) = T_0$ .  
Odhadněte  $k$  pro konkrétní hrnek kafe.

**6. příklad:** Najděte rovnovážný bod rovnice a určete jeho stabilitu.  
Odhadněte, za jak dlouho káva "vystydne".

Vyhodnocení:

Teoretické výsledky srovnejte s měřením. Pokud neodpovídají, vysvětlete a navrhněte revizi.

**Věta:** Uvažujme dostatečně hladké zobrazení  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  a rovnici

$$x' = f(x). \quad (3)$$

**Rovnovážný bod**  $x^*$  spojitého systému (3) splňuje

$$f(x^*) = 0.$$

Uvažujme nejprve případ  $m = 1$  a Taylorův rozvoj  $f$  v rovnovážném bodě  $x^*$ . Pro  $x \approx x^*$  platí

$$f(x) \approx f(x^*) + Df(x^*)(x - x^*) + \dots = Df(x^*)(x - x^*) + \dots$$

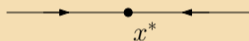
V dostatečně blízkém okolí  $x^*$  tedy platí

$$x' \approx Df(x^*)(x - x^*).$$

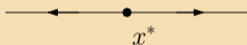


**Věta:** Mějme rovnici (3) pro  $m = 1$  a  $f$  hladkou v okolí rovnovážného bodu  $x^*$ . Jestliže  $Df(x^*) < 0$ , pak je rovnovážný bod  $x^*$  **stabilní** (atraktor). V opačném případě, když  $Df(x^*) > 0$ , je  $x^*$  nestabilní (repeler).

$$Df(x^*) < 0$$



$$Df(x^*) > 0$$



# Základní spojité modely růstu

## Spojité exponenciální růst.

Uvažujme populaci, kterou můžeme modelovat spojitě - např. množství sinic na přehradě budeme měřit v  $g/m^3$ , nebudeme je počítat. Stejně tak budeme spojitý přístup používat u populace, která nemá daná období rozmnožování (jako má mnoho druhů zvířat - narozdíl od člověka). Zajímá nás, jak se bude populace vyvíjet v čase. Označíme-li  $x(t)$  velikost populace v čase  $t$ ,  $b$  okamžitou míru reprodukce a  $d$  míru vymírání (zde předpokládáme, že jsou míry  $b$  a  $d$  konstantní), pak můžeme populaci popsat diferenciální rovnicí

$$x' = bx - dx = rx,$$

kde  $r$  je konstantní míra růstu populace a  $x'$  představuje okamžitou

změnu velikosti populace. Připomeňme zde definici derivace:

$$\frac{x(t + \Delta t) - x(t)}{\Delta t} = rx(t), \text{ pro } \Delta t \rightarrow 0.$$

Řešením je exponenciální funkce  $x(t) = x_0 e^{rt}$ . Pokud je  $r < 0$ , tj.  $d > b$ , populace vymře (rovnovážný stav  $x(t) \equiv 0$  je stabilní), pokud je  $r > 0$ , tj.  $d < b$ , populace bude růst nade všechny meze (rovnovážný stav  $x(t) \equiv 0$  je nestabilní).

**7. příklad:** Kdy je třeba vyhlásit zákaz koupání v přehradě, jestliže jsme minulý 4 dny v 8:00 ráno naměřili v odběrné nádobě hodnoty 2, 3, 5 a 7 mikrogramů. Hranice toxicity je 30  $\mu\text{g}$ .

**Simulovat v Maplu**

## Vyhodnocení:

Model lze použít v případech, kdy nám stačí krátkodobá předpověď, nebo je-li dynamika populace vzhledem k jiné modelované proměnné daleko pomalejší. Takovým příkladem může být například dynamika trhu práce a kapitálu v ekonomii, kdy dynamiku trhu práce můžeme popsat rovnicí s konstantní mírou růstu práce (odpovídající míře růstu populace).

## Spojité logistický růst.

Uvažujme nyní tuto modifikaci předchozího modelu:

$$x' = r(t, x)x,$$

kde míra růstu populace  $r(t, x)$  je funkcí času a velikosti populace. Volbou  $r(t, x)$  dostáváme následující rovnice populačního růstu:

$r(t, x) = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right)$	logistická Verhulstova rovnice,
$r(t, x) = r_0 \left(1 - \left(\frac{x}{K}\right)^\beta\right), \beta > 0$	Richardsova rovnice,
$r(t, x) = r_0 \frac{1 - \frac{x}{K}}{1 + c \frac{x}{K}}, c > 0$	Smithova rovnice,
$r(t, x) = r_0 \ln \left(\frac{K}{x}\right)$	Gompertzova rovnice atd.

Všechny uvedené rovnice jsou autonomní,  $r$  nezávisí na čase

explicitně, pouze v závislosti na velikosti populace.  $K > 0$  je tzv. kapacita prostředí.

**8. příklad:** S pomocí Maplu pro uvedené rovnice nakreslete řešení počáteční úlohy  $x_0 = 3$ , pro  $r_0 = 2$ ,  $K = 100$  a vhodně volené případné další parametry, nakreslete také funkce  $r(t, x)$ . Najděte obecná řešení rovnic a zkoumejte jejich tvar. Najděte inflexní body řešení a vysvětlete, co znamenají.

### Řešení v Maplu

**7. příklad:** S pomocí vhodného programu (nebo bez něj) najděte rovnovážné body výše uvedených rovnic a vyšetřete jejich stabilitu.

**7. příklad:** S pomocí vhodného programu (nebo bez něj) najděte rovnovážné body výše uvedených rovnic a vyšetřete jejich stabilitu.

$$x' = f(x) := r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) x, \quad \text{logistická Verhulstova rovnice}$$

Předpokládejme, že  $r_0 > 0$  (typický případ).



**7. příklad:** S pomocí vhodného programu (nebo bez něj) najděte rovnovážné body výše uvedených rovnic a vyšetřete jejich stabilitu.

$$x' = f(x) := r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) x, \quad \text{logistická Verhulstova rovnice}$$

Předpokládejme, že  $r_0 > 0$  (typický případ).

$$\text{s.b.: } x = 0, x = K,$$

Pro rovnovážný bod  $x^*$  platí  $x' = f(x) = 0$ .

**7. příklad:** S pomocí vhodného programu (nebo bez něj) najděte rovnovážné body výše uvedených rovnic a vyšetřete jejich stabilitu.

$$x' = f(x) := r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) x, \quad \text{logistická Verhulstova rovnice}$$

Předpokládejme, že  $r_0 > 0$  (typický případ).

$$\text{s.b.: } x = 0, x = K, \quad Df(x) = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{r_0}{K}x$$

**7. příklad:** S pomocí vhodného programu (nebo bez něj) najděte rovnovážné body výše uvedených rovnic a vyšetřete jejich stabilitu.

$$x' = f(x) := r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) x, \quad \text{logistická Verhulstova rovnice}$$

Předpokládejme, že  $r_0 > 0$  (typický případ).

$$\text{s.b.: } x = 0, x = K, \quad Df(x) = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{r_0}{K}x$$

$Df(0) = r_0 > 0$ ,  $x = 0$  je nestabilní s.b.

**7. příklad:** S pomocí vhodného programu (nebo bez něj) najděte rovnovážné body výše uvedených rovnic a vyšetřete jejich stabilitu.

$$x' = f(x) := r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) x, \quad \text{logistická Verhulstova rovnice}$$

Předpokládejme, že  $r_0 > 0$  (typický případ).

$$\text{s.b.: } x = 0, x = K, \quad Df(x) = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{r_0}{K}x$$

$Df(0) = r_0 > 0$ ,  $x = 0$  je nestabilní s.b.

$Df(K) = -r_0 < 0$ ,  $x = K$  je stabilní s.b.

**7. příklad:** S pomocí vhodného programu (nebo bez něj) najděte rovnovážné body výše uvedených rovnic a vyšetřete jejich stabilitu.

$$x' = f(x) := r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) x, \quad \text{logistická Verhulstova rovnice}$$

Předpokládejme, že  $r_0 > 0$  (typický případ).

$$\text{s.b.: } x = 0, x = K, \quad Df(x) = r_0 \left(1 - \frac{x}{K}\right) - \frac{r_0}{K}x$$

$$Df(0) = r_0 > 0, \quad x = 0 \text{ je nestabilní s.b.}$$

$$Df(K) = -r_0 < 0, \quad x = K \text{ je stabilní s.b.}$$

**Řešení v Maplu**

Podobně pro další rovnice.

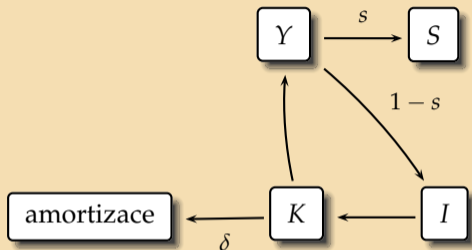
## Harrodův-Domarův model ekonomického růstu

Modelujeme růst hrubého domácího produktu.

Koncepce:

Uvažujme uzavřenou ekonomiku a předpokládejme, že jsou splněny následující podmínky. Kapitál  $K$  vzniká investicemi  $I$ , přitom dochází k jeho amortizaci. Spotřeba a úspory  $S$  jsou pevným podílem produktu  $Y$ , zbytek produktu investujeme do tvorby kapitálu. Relativní přírůstek kapitálu se projevuje relativním přírůstkem produkce.

## Diagram:



Je zřejmé, že amortizaci, spotřebu a úspory lze odvodit z produktu, máme tedy pouze tři stavové proměnné: produkt  $Y(t) > 0$ , kapitál  $K(t) > 0$  a investice  $I(t) > 0$ . Míra úspor a spotřeby je označena  $s$  (mezní sklon k úsporám a spotřebě), míra amortizace  $\delta$ . Zřejmě  $s \in (0, 1)$  a  $\delta \in (0, 1)$ .

## Rovnice:

$$\begin{aligned}K' &= I - \delta K, \\I &= (1 - s)Y, \\ \frac{K'}{K} &= \frac{Y'}{Y}.\end{aligned}$$

Všimněme si nyní, že platí

$$0 = \frac{K'}{K} - \frac{Y'}{Y} = \frac{K'Y - Y'K}{Y^2} \frac{Y}{K} = \left(\frac{K}{Y}\right)' \frac{Y}{K}.$$

Odtud  $\left(\frac{K}{Y}\right)' = 0$ . Existuje tedy konstanta  $r \in \mathbb{R}$ , taková že  $\frac{K}{Y} = r$ . Toto číslo můžeme interpretovat jako kapitálovou náročnost jednotky produkce.

**8. příklad:** Odvoďte diferenciální rovnici pro růst produktu a vyřešte ji.



## Vyhodnocení:

Závěr analýzy modelu nyní můžeme přeformulovat:

je-li  $r < \frac{1-s}{\delta}$  pak produkce roste,

je-li  $r = \frac{1-s}{\delta}$  pak produkce stagnuje,

je-li  $r > \frac{1-s}{\delta}$  pak produkce klesá.

To odpovídá zkušenosti: je-li kapitálová náročnost jednotky produkce příliš velká, pak produkce nemůže růst.

## Diskrétní exponenciální růst - Malthusův model.

Uvažujme populaci, která se rozmnožuje a vymírá v pevně daných intervalech. Může jít o jakoukoliv populaci - ryb, rostlin nebo peněz. Může jít také o populaci, která je v pevných časových intervalech kontrolována a jiné informace o ní nemáme. Zajímá nás, jak se bude populace vyvíjet v čase. Označíme-li  $x_n$  velikost populace v čase  $n$ ,  $b$  míru reprodukce a  $d$  míru vymírání (zde předpokládáme, že jsou míry  $b$  a  $d$  konstantní), pak můžeme populaci v následujícím čase  $n + 1$  popsat diferenční rovnicí  $x_{n+1} - x_n = bx_n - dx_n = rx_n$ , kde  $r$  je konstantní míra růstu populace, neboli

$$x_{n+1} = \mu x_n, \text{ kde } \mu = 1 + r = 1 + b - d.$$

### [Simulovat v Matlabu exponencialnirust.m](#)

Řešením je exponenciální funkce  $x_n = x_0 \mu^n$ . Pokud je  $\mu < 1$ , tj.  $d > b$ , populace vymře (rovnovážný stav  $x_n \equiv 0$  je stabilní), pokud je  $\mu > 1$ ,

tj.  $d < b$ , populace bude růst nade všechny meze (rovnovážný stav  $x_n \equiv 0$  je nestabilní).

**Věta:** Uvažujme dostatečně hladké zobrazení  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$  a rovnici

$$x_{n+1} = f(x_n). \quad (4)$$

**Pevný bod**  $x^*$  diskrétního systému (4) splňuje

$$f(x^*) = x^*.$$

Uvažujme nejprve případ  $m = 1$  a Taylorův rozvoj  $f$  v pevném bodě  $x^*$ . Pro  $x \approx x^*$  platí

$$f(x) \approx f(x^*) + Df(x^*)(x - x^*) + \dots = x^* + Df(x^*)(x - x^*) + \dots$$

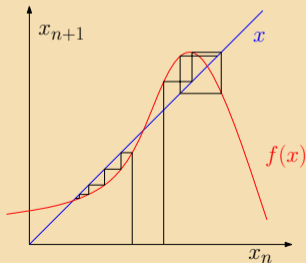
V dostatečně blízkém okolí  $x^*$  tedy platí

$$x_{n+1} - x^* \approx Df(x^*)(x_n - x^*).$$

**Věta:** Mějme zobrazení (4) pro  $m = 1$ , hladké v okolí pevného bodu  $x^*$ . Jestliže  $|Df(x^*)| < 1$ , pak  $|x_{n+1} - x^*| < |x_n - x^*|$ , a pevný bod  $x^*$  je **stabilní** (atraktor). V opačném případě, když  $|Df(x^*)| > 1$ , je  $x^*$  nestabilní (repeler).

Pavučinový diagram:

Vhodným zobrazením dynamiky zobrazení (4) pro  $m = 1$  je následující graf:



## Diskrétní logistický růst - Verhulstův model.

Uvažujme nyní takovou modifikaci předchozího modelu, že míra růstu  $r$  bude lineárně klesat v závislosti na velikosti populace  $y_n$ . Pokud dosáhne populace určité velikosti  $K$ , kterou nazýváme kapacita prostředí, bude míra růstu nulová, pokud tuto kapacitu překročí, bude velikost populace klesat, tj.

$$y_{n+1} - y_n = r \left( 1 - \frac{y_n}{K} \right) y_n.$$

Pokud je  $r \neq 0$  (triviální případ), můžeme provést transformaci  $y_n = \frac{1+r}{r} K x_n$ , kterou zmenšíme počet parametrů:

$$x_{n+1} = \mu x_n (1 - x_n), \text{ kde } \mu = 1 + r. \quad (5)$$

**9. příklad:** Tato rovnice má dva pevné body. Najděte je, určete pro ně podmínky stability za předpokladu, že  $r \in (0, 2)$ .

Co se děje, pokud  $r > 2$ ? Vzniká stabilní cyklus periody 2.

Připomeňme, že cyklus periody 2 je uspořádaná dvojice  $[x_1, x_2]$  taková, že

$$x_1 = f(x_2) = f(f(x_1)) = f^{(2)}(x_1),$$

$x_1$  je tedy pevným bodem zobrazení

$$f^{(2)}(x) = \mu^2 x(1-x)(1-\mu x(1-x)).$$

**10. příklad:** Najděte všechna řešení rovnice  $f^{(2)}(x) = x$  pro  $r = 2.1$  a ukažte, že cyklus periody 2 je stabilní. Rada: vyřadíte ta řešení, která jsou zároveň pevným bodem  $f(x)$  (proč?), spočtete v nich  $Df^{(2)}$ .

[Výpočet v Maplu](#)

[Spustíte cobweb.ode](#)

[Simulovat v Matlabu logistickyrust.m](#)

Pokud zakreslíme závislost pevných bodů na parametru  $\mu$ , dostaneme tzv. bifurkační diagram. Postupné zdvojování periody přechází v deterministický chaos.

## Spustte logbif.ode

Co je to chaos? Slovo chaos se odvozuje z řeckého  $\chi\alpha\omicron\varsigma$  a znamená nepředvídatelnost. Deterministický chaos je neperiodické deterministické chování, které je

- velice citlivé na počáteční podmínky,
- topologicky transitivní - což znamená, že libovolný interval transformuje na libovolný další interval
- má husté trajektorie

**DETERMINISTICKÝ NEZNAMENÁ PŘEDVÍDATELNÝ!!!**

# Nerovnovážná dynamika

Jak je vidět, předpoklad samovolného asymptotického směřování systému k jeho rovnováze lze docela jednoduše narušit. Vznik chaotického nepředvídatelného chování trajektorie diskrétní logistické rovnice je toho důkazem.

Od 70. let 20. století začíná získávat nerovnovážná dynamika ve většině aplikovaných věd své místo a nelineární dynamika začíná měnit pohled na svět a otrásá zavedenými dogmaty klasických teorií.

**21. století je století nové vědy - nelineární nerovnovážné dynamiky.**



## Kontrola chaosu metodou OGY

V roce 1990 Ott, Grebogi a Yorke uvedli praktickou metodu (úspěšnou i v aplikacích) stabilizace nestabilních chaotických cyklů. Metoda je založena na faktu, že chaotický atraktor obsahuje nekonečné husté množství nestabilních cyklů. Ty jsou stabilizovány malými perturbacemi kontrolního parametru  $a$ . Uvažujme zobrazení

$$x_{n+1} = f(x_n, a), \quad (6)$$

kde  $a$  je dostupný parametr, který můžeme změnit v nějakém okolí své "nominální" hodnoty  $a_0$ . Označme  $x^*(a)$  nestabilní pevný bod zobrazení (6). V malém okolí  $a_0$  můžeme aproximovat

$$x_{n+1} - x^*(a_0) = Df(x^*(a_0), a_0)(x_n - x^*(a_0)) + c(a - a_0), \quad (7)$$

kde  $c = \frac{\partial f}{\partial a}(x^*(a_0), a_0)$ . Vzhledem k transitivnosti a hustotě chaotické trajektorie musí v nějakém malém okolí  $x^*(a_0)$  pro nějaké  $x_n$  platit

$$a - a_0 = -k(x_n - x^*(a_0)). \quad (8)$$

Substitucí (8) do (7) dostaneme

$$x_{n+1} - x^*(a_0) = (Df(x^*(a_0), a_0) - ck)(x_n - x^*(a_0)).$$

Volbou  $k$  můžeme dosáhnout stability regulovaného pevného bodu, tj. najdeme  $k$  tak, aby

$$|Df(x^*(a_0), a_0) - ck| < 1.$$

## Kontrola chaosu v logistickém zobrazení

Uvažujme logistickou rovnici (5), ve které kontrolujeme chaos neustálými pulzy  $x_i = kx_i$  po  $p$  iteracích. Definujme zobrazení  $F(x) = kf^{(p)}(x)$ . Pevný bod  $x^*$  regulovaného zobrazení  $F(x)$  tedy bude splňovat  $kf^{(p)}(x^*) = x^*$  a bude stabilní, pokud

$$|kDf^{(p)}(x^*)| < 1.$$

Označíme-li  $C^p(x) = \frac{x}{f^{(p)}(x)} Df^{(p)}(x)$ , dostáváme podmínku pro oblast kontrolovatelných hodnot:  $|C^p(x)| < 1$ .

**Výpočet  $C_p$  v Maplu**

**Simulace v Matlabu [chaoscontrol.m](#)**

# CESTA DO VÍCE STAVOVÝCH PROMĚNNÝCH...

# Strukturovaný spojitý dynamický model

Strukturované modely se používají v případě, že je potřeba rozlišovat stavovou proměnnou podle nějakého kritéria, které ovlivňuje dynamiku.

Typickým příkladem jsou epidemiologické modely, kdy v populaci rozlišujeme jedince v různých stádiích nemoci. Účelem modelu je porozumět průběhu epidemie a předpovědět, kdy epidemie odezní. Modely použitelné např. na reálné chřipkové epidemie jsou samozřejmě komplikovanější, než v této přednášce uvedené základní epidemiologické modely, princip je však stejný.

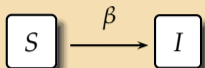
## Model SI.

Chceme modelovat epidemii infekční nemoci, kterou neumíme léčit, která však není smrtelná, např. herpes labialis, opar rtu.

### Koncepce:

Stavovou proměnnou budou infikovaní jedinci  $I$  a náchylní jedinci  $S$ . Předpokládáme nulovou úmrtnost způsobenou nemocí a také rovnováhu mezi počtem nově narozených a přirozeně zemřelých jedinců. Toto hrubé zjednodušení můžeme použít, pokud rychlost šíření infekční nemoci je podstatně větší než růst populace. Parametrem bude samozřejmě rychlost šíření infekce  $\beta > 0$ .

## Diagram:



V čase  $t = 0$  existuje  $S_0 > 0$  náchylných jedinců a  $I_0 > 0$  nakažlivých. Je zcela přirozené předpokládat, že počet nově infikovaných je přímo úměrný počtu náchylných a nakažlivých jedinců. Koeficient  $\beta$  bude závislý na četnosti kontaktů v populaci a pravděpodobnosti nákazy při kontaktu náchylného a nakažlivého jedince.

## Rovnice:

Model je popsán následujícím systémem diferenciálních rovnic:

$$\begin{aligned}S' &= -\beta SI, \\I' &= \beta SI.\end{aligned}$$

Řešením počáteční úlohy

$$S(0) = S_0, \quad I(0) = I_0, \quad S(t) + I(t) \equiv N.$$

je funkce

$$I(t) = \frac{N}{1 + \left(\frac{N}{I_0} - 1\right) e^{-\beta N t}}$$

Grafem je logistická křivka, která má inflexní bod  $\left(\frac{\ln\left(\frac{N}{I_0} - 1\right)}{\beta N}, \frac{N}{2}\right)$ .

Z hlediska dynamiky je zajímavý graf funkce

$$I'(t) = \frac{\beta N^2 \left(\frac{N}{I_0} - 1\right) e^{\beta N t}}{\left(\frac{N}{I_0} - 1 + e^{\beta N t}\right)^2}$$

který ukazuje přírůstky infikovaných.

**Výpočet a simulace v Maplu**



## Vyhodnocení:

Je vidět, že celá populace se nakonec nakazí, což jsme očekávali. U oparu např. je v dospělosti nakaženo asi 90% populace.

**10. příklad:** Najděte rovnovážné body rovnice infikovaných jedinců a vyšetřete jejich stabilitu.

## Vyhodnocení:

Je vidět, že celá populace se nakonec nakazí, což jsme očekávali. U oparu např. je v dospělosti nakaženo asi 90% populace.

**10. příklad:** Najděte rovnovážné body rovnice infikovaných jedinců a vyšetřete jejich stabilitu.

$$I' = f(I) := \beta(N - I)I,$$

V každém okamžiku platí  $S(t) = N - I(t)$ .

## Vyhodnocení:

Je vidět, že celá populace se nakonec nakazí, což jsme očekávali. U oparu např. je v dospělosti nakaženo asi 90% populace.

**10. příklad:** Najděte rovnovážné body rovnice infikovaných jedinců a vyšetřete jejich stabilitu.

$$I' = f(I) := \beta(N - I)I,$$

rovnovážné body:  $I = 0, I = N,$

Pro rovnovážný bod platí  $I' = f(I) = 0$ .

## Vyhodnocení:

Je vidět, že celá populace se nakonec nakazí, což jsme očekávali. U oparu např. je v dospělosti nakaženo asi 90% populace.

**10. příklad:** Najděte rovnovážné body rovnice infikovaných jedinců a vyšetřete jejich stabilitu.

$$I' = f(I) := \beta(N - I)I,$$

rovnovážné body:  $I = 0, I = N,$

$$Df(I) = \beta(N - 2I),$$

Jacobiho "matice", v jednorozměrném případě derivace pravé strany

## Vyhodnocení:

Je vidět, že celá populace se nakonec nakazí, což jsme očekávali. U oparu např. je v dospělosti nakaženo asi 90% populace.

**10. příklad:** Najděte rovnovážné body rovnice infikovaných jedinců a vyšetřete jejich stabilitu.

$$I' = f(I) := \beta(N - I)I,$$

rovnovážné body:  $I = 0, I = N,$

$$Df(I) = \beta(N - 2I),$$

$Df(0) = \beta N > 0, I = 0$  je nestabilní s.b.

## Vyhodnocení:

Je vidět, že celá populace se nakonec nakazí, což jsme očekávali. U oparu např. je v dospělosti nakaženo asi 90% populace.

**10. příklad:** Najděte rovnovážné body rovnice infikovaných jedinců a vyšetřete jejich stabilitu.

$$I' = f(I) := \beta(N - I)I,$$

rovnovážné body:  $I = 0, I = N,$

$$Df(I) = \beta(N - 2I),$$

$Df(0) = \beta N > 0, I = 0$  je nestabilní s.b.

$Df(N) = -\beta N < 0, I = N$  je stabilní s.b.

**Poznámka 7.** Je evidentní, že pro použití modelu bude nejpodstatnější odhad parametru  $\beta$ . Zkusme najít průměrný počet nakažených za jednotku času. Aby se někdo nakazil, musí se setkat infikovaný jedinec s náchylným a musí dojít k nákaze. Jaká je pravděpodobnost, že vybereme z  $N$  lidí jednoho infikovaného a jednoho náchylného?

$$p = \left(\frac{I}{N}\right) \left(\frac{S}{N-1}\right) + \left(\frac{S}{N}\right) \left(\frac{I}{N-1}\right) \approx \frac{2}{N^2}SI.$$

Tuto aproximaci můžeme provést ve velké skupině lidí, kde  $N^2 \gg N$ , jinak je třeba použít prvně uvedený vztah. Pokud  $\gamma > 0$  označíme průměrný počet interakcí za jednotku času a  $c$  průměrný počet nakažení při SI interakci, tj.  $0 < c \leq 1$ , je počet nově nakažených za jednotku času

$$\frac{I(t + \Delta t) - I(t)}{\Delta t} = \frac{2c\gamma}{N^2}SI.$$

Provedením limitního přechodu  $t \rightarrow 0$  dostáváme

$$\beta = \frac{2c\gamma}{N^2}.$$

Později se podíváme na složitější epidemiologické modely, např. model SIR a SIRS. K tomu ale budeme potřebovat něco málo další teorie, protože vstupujeme do fázového prostoru o více než jednom rozměru.



# Spojité a diskrétní dynamika v $\mathbb{R}^m$ .

## Lineární algebra - opakování

Pro vlastní číslo (vlastní hodnotu) matice  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  příslušné vlastnímu vektoru  $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$  platí

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v},$$

tj. vlastní čísla hledáme jako kořeny charakteristického polynomu

$$\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{I}) = 0.$$

Matice  $\mathbf{A}$  má v komplexním oboru  $n$  vlastních hodnot  $\{\lambda_1, \dots, \lambda_n\}$  a příslušné vlastní vektory  $\{\mathbf{v}_{\lambda_1}, \dots, \mathbf{v}_{\lambda_n}\}$  tvoří bázi  $\mathbb{C}^n$ . Matice  $\mathbf{T}$  tvořená vlastními vektory (po sloupcích) pak splňuje

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \begin{pmatrix} \lambda_1 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

V případě násobných vlastních hodnot může obsahovat bloky tvaru  $\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}$ , přičemž sloupce matice  $\mathbf{T}$  v tomto případě tvoří tzv. zobecněné vlastní vektory. Jde o vektor splňující  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  a další vektor  $\mathbf{w}$ , který splňuje  $\mathbf{A}\mathbf{w} = \lambda\mathbf{w} + \mathbf{v}$ . Pokud je násobnost vlastní hodnoty vyšší než dva, bude se takto vytvářet kaskáda zobecněných vlastních vektorů  $\mathbf{w}_{i+1}$  splňující  $\mathbf{A}\mathbf{w}_{i+1} = \lambda\mathbf{w}_{i+1} + \mathbf{w}_i$ , která bude spolu s vektorem  $\mathbf{v}$  tvořit bázi prostoru zobecněných vlastních vektorů. Lineární regulární transformace  $\mathbf{A} \mapsto \mathbf{T}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{T}$  převádí na komplexní Jordanův kanonický tvar. Reálný tvar s reálným blokem  $\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ -\beta & \alpha \end{pmatrix}$  dostaneme, pokud použijeme místo komplexně sdružených vektorů  $\mathbf{v}$  a  $\bar{\mathbf{v}}$  reálnou a imaginární část  $\mathbf{u}$  a  $\mathbf{w}$  vektoru  $\mathbf{v} = \mathbf{u} + i\mathbf{w}$ .

## Lineární diferenciální systém - opakování

Uvažujme lineární diferenciální autonomní systém

$$\mathbf{x}' = \mathbf{A}\mathbf{x}, \quad (9)$$

kde  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  a  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$  s počáteční podmínkou  $\mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0$ . Necht'  $\lambda \in \mathbb{C}$  je vlastní číslo matice  $\mathbf{A}$  a  $\mathbf{v}$  příslušný vlastní vektor.

- V případě  $\lambda \in \mathbb{R}$  je  $t \mapsto e^{\lambda t} \mathbf{v}$  reálným řešením rovnice (9).
- V případě  $\lambda \in \mathbb{R}$ , které je  $k$ -násobným kořenem charakteristického polynomu jsou  $t \mapsto e^{\lambda t} \sum_{j=1}^i \frac{t^{i-j} \mathbf{v}_j}{(i-j)!}$ ,  $i = 1, \dots, k$  reálnými řešeními rovnice (9), kde  $\mathbf{v}_i$  je systém  $k$  zobecněných vlastních vektorů ( $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda\mathbf{v}_1$  a  $\mathbf{A}\mathbf{v}_i = \lambda\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_{i-1}$  pro  $i > 1$ ).
- V případě  $\lambda = \alpha \pm i\beta$  je vlastní vektor  $\mathbf{v} = \mathbf{u} \pm i\mathbf{w}$  a reálnými řešeními rovnice (9) jsou pak

$$t \mapsto e^{\alpha t} (\cos \beta t \cdot \mathbf{u} - \sin \beta t \cdot \mathbf{w}), t \mapsto e^{\alpha t} (\sin \beta t \cdot \mathbf{u} + \cos \beta t \cdot \mathbf{w}).$$

Protože  $\mathbf{x}_0$  můžeme zapsat jako lineární kombinaci vlastních vektorů:

$$\mathbf{x}_0 = k_1 \mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2 \mathbf{v}_{\lambda_2} + \cdots + k_m \mathbf{v}_{\lambda_m},$$

můžeme řešení  $\mathbf{x}(t)$  (v případě jednonásobných vlastních čísel, obecně komplexních) zapsat jako

$$\mathbf{x}(t) = k_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_{\lambda_1} + k_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_{\lambda_2} + \cdots + k_m e^{\lambda_m t} \mathbf{v}_{\lambda_m}.$$

V případě násobných vlastních čísel přibývají k exponenciálním funkcím polynomy. Uvedená řešení jsou lineárně nezávislá a tvoří bázi prostoru řešení. Jejich lineární kombinace je také řešením (9). Maticové zobrazení  $t \mapsto \Phi(t)$  těchto řešení se nazývá fundamentální matice řešení příslušného homogenního lineárního systému (9).

Je zřejmé, že rovnovážným bodem systému (9) je počátek, který je stabilní, pokud  $\operatorname{Re} \lambda_i < 0$  pro všechna  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Oscilace způsobují komplexní vlastní hodnoty.

## Lineární diferenční systém - opakování

Uvažujme lineární diferenční autonomní systém

$$x_{n+1} = Ax_n, \quad (10)$$

kde  $x_n \in \mathbb{R}^m$ ,  $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$  s počáteční podmínkou  $x_n = x_0$ .  
Odtud

$$x_n = A^n x_0.$$

Podobně jako ve spojitém případě má matice  $A$  obecně  $m$  vlastních hodnot  $\lambda_i$ , která jsou řešením charakteristické rovnice

$$\det(A - \lambda I) = 0.$$

Označme je sestupně  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_m|$ . Protože  $x_0$  můžeme zapsat jako lineární kombinaci vlastních vektorů:

$$x_0 = k_1 x_{\lambda_1} + k_2 x_{\lambda_2} + \dots + k_m x_{\lambda_m},$$

můžeme řešení  $x_n$  zapsat jako

$$\begin{aligned}x_n &= A^n(k_1x_{\lambda_1} + k_2x_{\lambda_2} + \cdots + k_mx_{\lambda_m}) \\ &= k_1\lambda_1^n x_{\lambda_1} + k_2\lambda_2^n x_{\lambda_2} + \cdots + k_m\lambda_m^n x_{\lambda_m} \\ &= \lambda_1^n(k_1x_{\lambda_1} + k_2\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^n x_{\lambda_2} + \cdots + k_m\left(\frac{\lambda_m}{\lambda_1}\right)^n x_{\lambda_m})\end{aligned}$$

Pevným bodem systému (10) je počátek, který je stabilní, pokud  $|\lambda_1| < 1$ .

Lineární diferenciální a diferenční rovnice bývají často zapsány ve tvaru

$$0 = a_m x^{(m)}(t) + a_{m-1} x^{(m-1)}(t) + \dots + a_0 x(t),$$

resp.

$$0 = a_m x_{n+m} + a_{m-1} x_{n+m-1} + \dots + a_0 x_n.$$

V takovém případě hledáme vlastní čísla jako kořeny charakteristického polynomu

$$p(\lambda) = a_m \lambda^m + a_{m-1} \lambda^{m-1} + \dots + a_0.$$

**Poznámka 8.** Pokud je levá strana rovnice nenulová, tj. ve tvaru  $f(t) = \dots$  (nehomogenní rovnice), pak obecné řešení nehomogenní rovnice je součtem libovolného partikulárního řešení nehomogenní rovnice a obecného řešení příslušné lineární homogenní rovnice (s nulovou levou stranou).

Polynom  $p(\lambda)$  je ve skutečnosti charakteristickým polynomem  $\det(A - \lambda I) = 0$  lineárního systému

$$\begin{aligned}y_1'(t) &= y_2(t), \\ &\vdots \\ y_{m-1}'(t) &= y_m(t), \\ y_m'(t) &= -\frac{1}{a_m}(a_{m-1}y_m(t) + \cdots + a_0y_1(t)),\end{aligned}$$

kde  $y_1(t) = x(t)$  ve spojitém případě. Podobně pro diskrétní případ

$$\begin{aligned}y_{n+1}^1 &= y_n^2, \\ &\vdots \\ y_{n+1}^{m-1} &= y_n^m, \\ y_{n+1}^m &= -\frac{1}{a_m}(a_{m-1}y_n^m + \cdots + a_0y_n^1),\end{aligned}$$

kde  $y_n^1 = x_n$ .



**11. příklad:** Dokažte uvedené tvrzení pro  $0 = ax'' + bx' + cx$ , resp.  $0 = ax_{n+2} + bx_{n+1} + cx_n$ , tj. ukažte, že kořeny  $p(\lambda)$  jsou vlastní čísla Jacobiho matice jistého dvourozměrného lineárního systému.

# Lineární diskrétní model v rovině

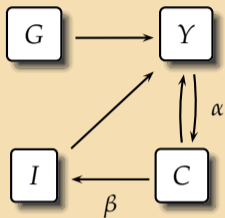
## Samuelsonův model interakce multiplikátoru a akcelérátoru

Chceme zjistit jak ovlivňuje GNP multiplikační a akcelerační princip. Multiplikačním efektem rozumíme to, že růst vládních výdajů vede k růstu GNP. Akcelerační efekt je růst investic díky růstu GNP.

### Koncepce:

Proměnnými budou jistě vládní výdaje  $G$  a hrubý národní produkt  $Y$ , který je součtem investic  $I$ , spotřeby  $C$  a vládních výdajů  $G$ . Uvažujeme uzavřenou ekonomiku.

Diagram:



## Rovnice:

$$Y_t = I_t + C_t + G,$$

$$C_t = \alpha Y_{t-1},$$

$$I_t = \beta(C_t - C_{t-1}),$$

kde  $\alpha \in (0, 1)$  je sklon ke spotřebě,  $\beta > 0$  je míra růstu investic. GNP  $Y_t$ , spotřeba  $C_t$  a investice  $I_t$  jsou stavové proměnné,  $G$  je exogenní proměnná,  $\alpha$  a  $\beta$  jsou parametry. Jde o dynamický diskrétní model. Sloučením rovnic dostáváme lineární nehomogenní diferenční rovnici 2. řádu pro  $Y$ :

$$Y_{t+2} - \alpha(\beta + 1)Y_{t+1} + \alpha\beta Y_t = G \quad (11)$$

Pevný bod  $Y^*$  (rovnováha) splňuje

$$Y^* - \alpha(\beta + 1)Y^* + \alpha\beta Y^* = G,$$

tj.  $Y^*(1 - \alpha) = G \Rightarrow Y^* = \frac{G}{1 - \alpha}$ . Dostáváme multiplikační efekt, růst vládních výdajů vede k růstu rovnováhy  $Y^*$ , multiplikátor je  $\frac{1}{1 - \alpha}$ . To je jednoduchá komparativní statika. Nás ale bude tentokrát zajímat

dynamika systému.

Dynamika je dána lineární nehomogenní diferenční rovnicí 2. řádu (11). Příslušná homogenní rovnice má charakteristický polynom

$$\lambda^2 - \alpha(\beta + 1)\lambda + \alpha\beta = 0$$

s vlastními hodnotami

$$\lambda_{1,2} = \frac{\alpha(\beta + 1) \pm \sqrt{\alpha^2(\beta + 1)^2 - 4\alpha\beta}}{2}.$$

Podle věty o stabilitě diskrétního systému je rovnováha  $Y^*$  stabilní, pokud platí  $|\lambda_{1,2}| < 1$ , tj.

$$\left| \frac{\alpha(\beta + 1) \pm \sqrt{\alpha^2(\beta + 1)^2 - 4\alpha\beta}}{2} \right| < 1.$$

**12. příklad:** Ukažte, že postačující podmínkou stability  $Y^*$  je  $\alpha\beta < 1$ .

**13. příklad:** Napište obecné řešení rovnice (11). Ukažte, že osciluje pro

$$\alpha < \frac{4\beta}{(\beta + 1)^2}.$$

**14. příklad:** Vyšetřete průběh funkce  $\alpha = \frac{4\beta}{(\beta + 1)^2}$ .

Následující graf ukazuje oblasti stability a nestability, resp. oscilací rovnováhy  $Y^*$ .

### Vyhodnocení:

Samuelsonův model multiplikátoru-akcelérátoru je prvním modelem, který vysvětluje princip vzniku oscilací GNP. Taky za něj (nejen za něj :-)) dostal Paul Samuelson v roce 1970 Nobelovu cenu za ekonomii.

# Strukturovaný diskretní dynamický lineární model populace

Leslieho model.

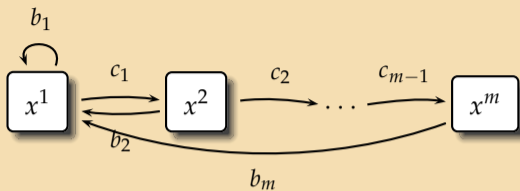
Model věkově strukturované populace. Můžeme jej použít např. pro modelování populace víceleté rostliny, populace ryb nebo i lidí. Obecně je tedy účelem modelu znát (diskretní) vývoj struktury populace.

## Koncepce:

Proměnnými budou jistě jednotlivé věkové třídy populace:  $x^1, \dots, x^m$ . Populace se kontroluje po určitých pevných intervalech. Některé skupiny produkují nové jedince, a to s různou mírou reprodukce  $b_i > 0$  (dospělí jedinci), jiné mají míru reprodukce nulovou,  $b_i = 0$  (nedospělí jedinci). Po nějakém čase přechází určitá část dané třídy  $x^i$  do následující třídy  $x^{i+1}$  (tyto míry přežití označíme pro každou třídu  $c_i$ .)



Diagram:



Rovnice:

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \\ \vdots \\ x_{n+1}^m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 & b_2 & b_3 & \cdots & b_{m-1} & b_m \\ c_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & c_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & c_{m-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \\ \vdots \\ x_n^m \end{pmatrix}$$

Dostáváme lineární systém diferenčních rovnic s Leslieho maticí  $L$  a vektorem iterací struktury populace  $X_n = (x_n^1, x_n^2, \dots, x_n^m)$ , tj.

$$X_{n+1} = LX_n.$$

**Věta:** Předpokládejme, že pro matici  $L$  a  $1 \leq i \leq m$  platí:  $b_i \geq 0$ , existuje nějaké  $i$  tak, že  $b_i > 0$  a  $b_{i+1} > 0$ , a  $0 \leq c_i \leq 1$ . Pak má matice  $L$  jedinou kladnou, tzv. striktně dominantní, reálnou vlastní hodnotu  $\lambda_1 > 0$  a  $X_{\lambda_1}$  má všechny složky kladné.

**Poznámka 9.** Protože je  $\lambda_1$  striktně dominantní, bude pro velká  $n$

$$X_n \approx k_1 \lambda_1^n X_{\lambda_1}.$$

Věková struktura populace se tedy stabilizuje proporcionálně vlastnímu vektoru  $X_{\lambda_1}$ . Procentní vyjádření je tedy dáno normalizovaným vektorem

$$P = \frac{X_{\lambda_1}}{|X_{\lambda_1}|}.$$

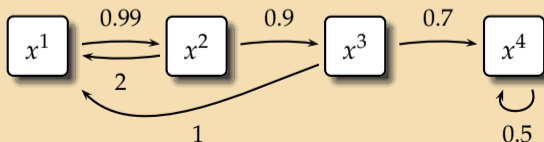
## Vyhodnocení:

Model lze prakticky ověřit a je používán nejen pro predikci budoucí struktury populace, ale také například pro kontrolu dynamického systému (odhad trvale udržitelného rybolovu, kácení lesního porostu, pěstování víceletých rostlin apod.).

**15. příklad:** Uvažujte populaci žen ve věkovém rozmezí 0-14, 15-29, 30-44 a více let. Vysvětlete následující diagram, zvolte stavové proměnné, predikujte situaci za 30 let s počátečními podmínkami danými tabulkou a odhadněte dlouhodobou strukturu populace.

0-14	15-29	30-44	45 a více
1200	1500	1000	1300

**Výpočet v Maplu**



## Kontrola systému, model těžby:

Modifikujme nyní předchozí model a uvažujme nyní kontrolovaný systém, kdy populaci částečně vytěžíme. Může jít o pěstování rostlin, lov ryb, těžbu dřeva nebo o kontrolu populace škůdců apod. Bud'

$$D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_m \end{pmatrix}$$

matice vytěžování,  $0 \leq d_i \leq 1$ . Rovnice modelu má tedy nyní tvar

$$X_{n+1} = (I - D)LX_n.$$

Naší snahou je udržitelná těžba a stabilizace populace na úrovni  $X$ , tj.

$$X = (I - D)LX,$$

kde  $X$  odpovídá vlastnímu vektoru matice  $(I - D)L$  příslušnému vlastní hodnotě  $\lambda_1 = 1$ .

**16. příklad:** Najděte podmínku pro udržitelnou těžbu  $d$  v případě, že  $d_i = d$  pro všechna  $i$ , tj. těžba je věkově nezávislá - rovnoměrná, a je-li  $\lambda_1$  striktně dominantní vlastní hodnota Leslieho matice  $L$ .

**17. příklad:** Uvažujme populaci ryb s Leslieho maticí

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 \end{pmatrix}.$$

Můžeme zvolit rovnoměrný výlov nebo výlov některé věkové skupiny. Je některá z variant výlovu dlouhodobě udržitelná?

**Výpočet v Maplu**

# Nelineární dynamika a linearizace

Uvažujme nyní znovu rovnici (3) resp. (4)

$$x' = f(x) \quad \text{resp.} \quad x_{n+1} = f(x_n)$$

a hyperbolický rovnovážný bod  $x^* \in \mathbb{R}^m$ . Podobně jako v jednorozměrném případě můžeme v okolí  $x^*$  funkci  $f$  aproximovat Taylorovým rozvojem

$$f(x) \approx f(x^*) + Df(x^*)(x - x^*) + \dots$$

V dostatečně blízkém okolí  $x^*$  tedy platí

$$x' \approx Df(x^*)(x - x^*) \quad \text{resp.} \quad x_{n+1} - x^* \approx Df(x^*)(x_n - x^*)$$

a nelineární systém (3) resp. (4) se chová v okolí  $x^*$  "stejně", jako jeho linearizace. Slovem stejně rozumíme topologickou ekvivalenci, v prvé řadě tedy lokální stabilitu nebo nestabilitu rovnováhy.

**Věta (Věta o linearizaci):** Mějme systém (3) resp. (4) s  $f$  hladkou v okolí hyperbolického rovnovážného bodu  $x^*$  a jeho linearizaci. Pak v okolí  $x^*$  jsou tyto systémy topologicky ekvivalentní, tedy zejména platí:

- Jestliže mají ve spojitém případě všechny vlastní hodnoty matice  $Df(x^*)$  záporné reálné části, v diskrétním případě jsou-li všechny vlastní hodnoty v absolutní hodnotě menší než 1, pak je  $x^*$  asymptoticky stabilní.
- Jestliže ve spojitém případě má alespoň jedna vlastní hodnota matice  $Df(x^*)$  kladnou reálnou část, v diskrétním je-li alespoň jedna vlastní hodnota v absolutní hodnotě větší než 1, pak je  $x^*$  nestabilní.

### Poznámka 10. Charakteristický polynom v rovině.

Uvažujme dvourozměrný systém (3) resp. (4), tj.  $x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2$ . Označme  $J = Df(x^*)$  Jacobiho matici. Matice  $J$  má pak dvě vlastní hodnoty  $\lambda_1, \lambda_2$ , které jsou kořeny charakteristické rovnice

$$\det(J - \lambda I) = \lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

kde  $\sigma = \operatorname{tr} J = \lambda_1 + \lambda_2$  je stopa Jacobiho matice a  $\Delta = \det J = \lambda_1\lambda_2$  je její determinant.

**Věta:** Postačujícími podmínkami asymptotické stability spojitého systému (3) v rovině jsou podmínky

$$\Delta = \det J > 0 \quad \text{a} \quad \sigma = \operatorname{tr} J < 0.$$

**18. příklad:** Dokažte!



# Topologická klasifikace hyperbolického rovnovážného bodu v rovině:

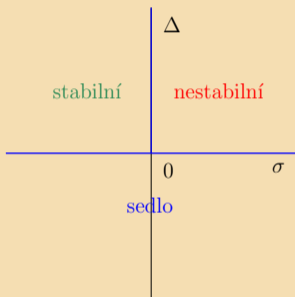
$(n_+, n_-)$	Vlastní hodnoty	Fázový portrét	Stabilita
$(0, 2)$			stabilní
$(1, 1)$			nestabilní
$(2, 0)$			nestabilní

**Věta:** Postačujícími podmínkami asymptotické stability diskrétního systému (4) v rovině jsou podmínky

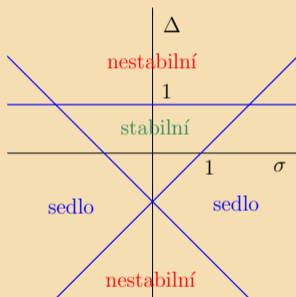
$$\begin{aligned}|\Delta| &= |\det J| < 1, \\1 - \sigma + \Delta &= 1 - \operatorname{tr} J + \det J > 0 \\1 + \sigma + \Delta &= 1 + \operatorname{tr} J + \det J > 0.\end{aligned}$$

19. příklad: Dokažte!

## Stabilita hyperbolického rovnovážného bodu v rovině:



spojitý systém



diskrétní systém

# Dynamické modely v rovině

V této části použijeme poznatky z kapitoly o systémech diferenciálních a diferenčních rovnic v rovině a aplikujeme je na některé jednoduché modely. Navážeme na statický herní model Cournotova duopolu přidáním dynamiky (spojité i diskrétní), lineární model modifikujeme na nelineární. Uvedeme slavný Samuelsonův model multiplikátoru-akcelérátoru a strukturovaný epidemiologický model SI rozšíříme o další vztahy a přechody mezi skupinami.

## Dynamika Cournotova modelu duopolu - spojitý přístup

Modelujme nyní dynamiku dříve uvedeného statického herního modelu duopolu. Jde o revizi modelu, kdy si uvědomujeme, že změnit množství výroby směrem k optimu zabere určitý čas a výroba bude klesat nebo růst postupně.

### Koncepce:

Připomeňme Cournotův model. Exogenními proměnnými jsou poptávané množství  $M$  a mezní náklady  $c$  na výrobu jednoho výrobku, endogenní proměnné jsou množství  $q_i$  výrobků od jednotlivých firem. Model je dynamický, a proto  $q_i = q_i(t)$  jsou funkcí času  $t$ . Poptávková funkce je tvaru  $P(Q) = M - Q$ , kde  $Q = Q(t) = q_1(t) + q_2(t)$  je celkové množství dodávané na trh. Produkt je homogenní, mezní náklady  $c$  jsou konstantní, tj. nákladová funkce  $C_i(q_i) = cq_i(t)$ ,  $c < M$ .

Výplatní funkcí je zisková funkce firem:

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i [P(Q) - c] = q_i [M - (q_1 + q_2) - c].$$

Nashova rovnováha řeší optimalizační problém

$$\max_{0 \leq q_i < \infty} \pi_i(q_i, q_{-i}) = \max_{0 \leq q_i < \infty} q_i [M - (q_1 + q_2) - c],$$

tj. platí

$$\frac{\partial \pi_i}{\partial q_i} = M - q_{-i} - c - 2q_i = 0.$$

Optimem je tedy  $\bar{q}_i = \frac{M - c - q_{-i}}{2}$ .

## Rovnice:

Změnit množství výroby směrem k optimu  $\bar{q}_i$  zabere určitý čas. Budeme předpokládat, že rychlost změny bude přímo úměrná rozdílu mezi optimem a skutečnou výrobou, tj.

$$q'_i = \beta_i(\bar{q}_i - q_i),$$

kde  $\beta_i > 0$  je koeficient změny.

$$\begin{aligned} q'_1 &= \beta_1 \left( \frac{M - c - q_2}{2} - q_1 \right), \\ q'_2 &= \beta_2 \left( \frac{M - c - q_1}{2} - q_2 \right). \end{aligned} \tag{12}$$

**20. příklad:** Najděte stacionární bod systému (12) (a ukažte, že skutečně existuje), spočtěte pro něj Jacobiho matici a určete jeho typ.

**21. příklad:** Nakreslete fázový portrét systému (12) a ukažte, že rovnováha statického Cournotova modelu duopolu je globálně asymptoticky stabilní.

Vyhodnocení:

Dynamický model oproti statickému modelu ukazuje navíc jakým způsobem se rovnováha ustanovuje a že k tomu skutečně dochází při jakémkoliv počátečním stavu. Může sloužit také k odhadu doby, za kterou se tato rovnováha ustanoví (přesněji, kdy dojde k dosažení dostatečně blízkého okolí této rovnováhy).

**22. příklad:** V některém z dříve používaných programů vytvořte simulaci a zkoumejte vliv exogenních proměnných a parametrů na dynamiku modelu.

**Spustte cournot.ode**



To, že jsme získali dynamickou stabilní rovnováhu, není nic překvapujícího. Vzpomeneme-li si na chladnou kávu, musíme připustit, že jsme použili model přesně kopírující tuto klasicou ukázkou implicitně předpokládané stabilní rovnováhy.

**23. příklad:** Uvažujte revizi tohoto dynamického Cournotova modelu. Předpokládejte racionální chování firem tak, že budou měnit výrobu v závislosti na změně zisku. Čím větší je z navýšení výroby profit, tím ochotněji budou výrobu navyšovat a naopak.

[Spustteournotspojity.mw](http://cournotspojity.mw)

## Dynamika Cournotova modelu duopolu - diskrétní přístup

Modelujme nyní znovu dynamiku statického herního modelu duopolu, tentokrát diskrétně.

Rovnice:

Změnit množství výroby směrem k optimu  $\bar{q}_i$  zabere určitý čas. Budeme předpokládat, že firma bude měnit množství výroby směrem k optimu, tj.

$$q_i(t+1) = (1 - \alpha_i)q_i(t) + \alpha_i\bar{q}_i(t),$$

kde  $\alpha_i \in (0, 1)$  je rychlost adaptace.

$$\begin{aligned} q_1(t+1) &= (1 - \alpha_1)q_1(t) - \frac{\alpha_1}{2}q_2(t) + \frac{\alpha_1(M-c)}{2}, \\ q_2(t+1) &= -\frac{\alpha_2}{2}q_1(t) + (1 - \alpha_2)q_2(t) + \frac{\alpha_2(M-c)}{2}. \end{aligned} \quad (13)$$

**24. příklad:** Najděte pevný bod systému (13) a diskutujte jeho stabilitu.

**25. příklad:** Porovnejte rovnice spojité a diskrétní případ a pokuste se z diskrétního přejít ke spojitému limitním přechodem. Vysvětlete, co v obou případech znamenají parametry  $\alpha_i$  a  $\beta_i$ .

**26. příklad:** Předpokládejme, že se firma řídí mezním ziskem s rychlostí adaptace  $\beta_i$ :

$$q_i(t+1) = q_i(t) + \beta_i q_i(t) \frac{\pi_i(q_i(t), q_j(t))}{q_i(t)}.$$

Najděte pevné body a diskutujte jejich stabilitu.

## Další epidemiologické modely

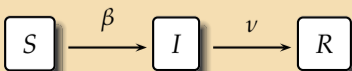
Modelujme dynamiku SIR a SIRS modelu.

### Model SIR.

Koncepce:

Chceme modelovat epidemii infekční nemoci, kdy jedinci infikovaní přecházejí do skupiny již uzdravených (recovered) a imunních (případně umírají). Jde o nejjednodušší model SIR, Kermack-McKendrickův model s následujícím diagramem:

Diagram:



## Rovnice:

$$\begin{aligned}S' &= -\beta SI \\I' &= \beta SI - \nu I \\R' &= \nu I,\end{aligned}\tag{14}$$

kde  $\beta, \nu > 0$  jsou parametry a  $S(t), I(t), R(t)$  stavové proměnné reprezentující okamžitý počet náchylných, infekčních a odolných jedinců v čase. Předpokládáme, že populace se v čase nemění

$$S(t) + I(t) + R(t) = N > 0.\tag{15}$$

a

$$S(0) = S_0 > 0, \quad I(0) = I_0 > 0, \quad R(0) = 0, \quad S_0 + I_0 = N.$$

**27. příklad:** Z (15) vyjádřete  $R(t)$  a zjednodušte model (14) na dvourozměrný se stavovými proměnnými  $S$  a  $I$ .

**28. příklad:** Ukažte, že pokud  $\beta S(0) < \nu$ , infekce se vytratí. Zavádíme proto prahovou hodnotu  $\frac{\nu}{\beta}$ , kterou musí počáteční populace náchylných překročit, aby se epidemie začala šířit.

**29. příklad:** Najděte stacionární body dvojrozměrného systému. Pokuste se nakreslit fázový portrét s pomocí  $\frac{dI}{dS}$ .

**30. příklad:** Spočteme druhou derivaci  $\frac{d^2I}{dS^2}$  a ukažte, že trajektorie jsou konkávní a  $I$  nabývá své maximální hodnoty

$$I_{max} = \frac{\nu}{\beta} (\ln \frac{\nu}{\beta S_0} - 1) + N, \text{ pro } S = \frac{\nu}{\beta}.$$

**31. příklad:** Ukažte, že platí  $S(t) = S(0)e^{-\frac{\beta R(t)}{\nu}}$  a proveďte limitní přechod  $t \rightarrow \infty$ , abyste našli rozsah infekce daný mírou

$$\frac{R(\infty)}{N} = 1 - \frac{S(\infty)}{N} = 1 - \rho.$$

**32. příklad:** Ve vhodném programu simulujte model SIR.

Vyhodnocení:

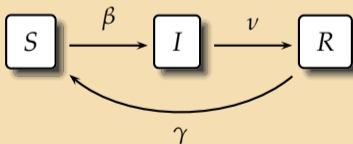
Výstupy z modelu jsou v souladu s realitou. Chceme-li omezit rozsah epidemie, je třeba zvětšit  $\rho$ , je tedy potřeba zvýšit rychlost izolace infikovaných jedinců (snížit koeficient  $\beta$ ) a zvýšit odolnost jedinců vůči nakažení infekcí při kontaktu s infikovaným jedincem. Navíc získáváme další důležité epidemiologické informace: prahovou hodnotu, maximum infikovaných jedinců apod.

## Model SIRS.

### Koncepce:

Chceme modelovat epidemii infekční nemoci, kdy infikovaní jedinci přecházejí do skupiny uzdravených (recovered), oproti předchozímu modelu však nezůstávají imunní a mohou znovu onemocnět.

### Diagram:



### Rovnice:



**33. příklad:** Sestavte rovnice modelu SIRS pro konstatní populaci (tj. při splnění podmínek (15)).

**34. příklad:** Podobně jako v modelu SIR přejděte na dvourozměrný se stavovými proměnnými  $S$  a  $I$ .

**35. příklad:** Najděte stacionární body dvojrozměrného systému, spočtěte zde Jacobiho matici a určete jejich stabilitu. Pokuste se nakreslit fázový portrét.

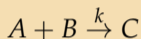
Vyhodnocení:

Model můžeme samozřejmě dále rozšiřovat:

**36. příklad:** Nalezněte na internetu nějaké informace o modelu SIRS. Pokuste se najít nějaký vědecký článek, který je jeho rozšířením. Vytvořte ve vhodném programu simulaci.

# Dynamika chemických reakcí

Chemické a biochemické reakce je vhodné popisovat pomocí diferenciálních rovnic. Elementární reakce podléhají kinetické rovnici, která popisuje rychlost, se kterou interagují dvě látky a vytvářejí třetí:

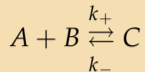


Koncentrace látek se značí v hranatých závorkách a uvedenou reakci můžeme popsat rovnicí

$$\frac{d[C]}{dt} = k[A][B],$$

kde derivace koncentrace  $[C]$  je okamžitá změna koncentrace  $[C]$ , tedy rychlost, s jakou je tvořen produkt reakce. Konstanta  $k$  je rychlostní konstanta, která vlastně konstantou není – závisí např. na teplotě nebo homogenitě směsi. Budeme ale předpokládat, že se teplota nemění a látky jsou dobře promíchané.

Většina biochemických reakcí probíhá oběma směry:



Změna koncentrace  $[A]$  pak splňuje

$$\frac{d[A]}{dt} = -k_+[A][B] + k_-[C].$$

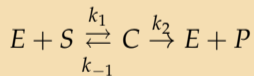
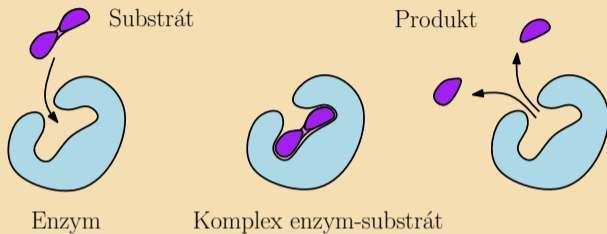
Ve skutečnosti je většina reakcí složitější a bude tedy popsána systémem diferenciálních rovnic.

## Model Michaelis-Mentenové

### Koncepce:

Enzymy  $E$  jsou katalyzátory chemických reakcí, při kterých pomáhají ze substrátu  $S$  vytvořit produkt  $P$ , přičemž z reakce vycházejí samy v nezměněné formě.

## Diagram:



## Rovnice:

Kinetické rovnice reakcí tedy můžeme popsat následujícími diferenciálními rovnicemi:

$$\begin{aligned}\frac{d[S]}{dt} &= k_{-1}[C] - k_1[S][E], \\ \frac{d[E]}{dt} &= (k_{-1} + k_2)[C] - k_1[S][E], \\ \frac{d[C]}{dt} &= k_1[S][E] - (k_2 + k_{-1})[C], \\ \frac{d[P]}{dt} &= k_2[C].\end{aligned}$$

Navíc předpokládáme, že produkt  $P$  okamžitě odebíráme, aby nešel do zpětné reakce. Je evidentní, že platí

$$\frac{d[E]}{dt} + \frac{d[C]}{dt} = 0,$$

tj.  $[E] + [C] = e_0$  je počáteční koncentrace enzymu,  $[E]$  tedy můžeme eliminovat. Rovnici produktu můžeme oddělit a integrovat zvlášť.

Označme  $[S] = s$  a  $[C] = c$ . Úpravou tedy dostáváme dvě diferenciální rovnice:

$$\begin{aligned}\dot{s} &= k_{-1}c - k_1s(e_0 - c), \\ \dot{c} &= k_1s(e_0 - c) - (k_2 + k_{-1})c\end{aligned}$$

s počátečními podmínkami  $c(0) = 0$  a  $s(0) = s_0 \gg e_0$ .

**37. příklad:** Dokažte, že počátek je asymptoticky stabilní rovnovážný bod.

**38. příklad:** Nakreslete fázový portrét a graficky analyzujte systém a nakreslete přibližně tvar řešení s uvedenou počáteční podmínkou.

**39. příklad:** Simulujte řešení ve vhodném programu.

## Vyhodnocení:

Jde o jeden ze základních biochemických dynamických modelů. Tento model vznikl na počátku minulého století a je dodnes hojně využíván. Model vysvětluje, že reakce se ustaluje na maximální rychlosti při libovolně vysoké koncentraci substrátu. Michaelisova konstanta je rovna takové koncentraci substrátu při které reakce katalyzovaná enzymem probíhá rychlostí, která je rovna polovině této maximální rychlosti. Ve složitějších modelech biochemických reakcí v buňkách jsou právě Michaelisovy konstanty různých dílčích katalytických reakcí vstupujících do dynamiky systému parametry.

**40. příklad:** Odvodíte vzorec pro Michaelisovu konstantu.



# Dynamické modely interakcí

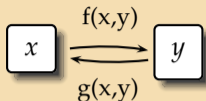
Snad nejznámějším deterministickým dynamickým modelem je model interakce dravec-kořist. Tím nejjednodušším je Lotkúv-Volterrův model, který stojí u základů vědní disciplíny zvané matematická ekologie.

Model dravec-kořist.

Koncepce:

Modelujme dvě vzájemně provázané populace - populaci kořisti  $x$  a dravce  $y$ . Je zřejmé, že velikost a dynamika populace kořisti bude ovlivňovat dynamiku a velikost populace dravce a naopak.

Diagram:



Rovnice:

$$\begin{aligned}x' &= xf(x, y) \\ y' &= yg(x, y),\end{aligned}\tag{16}$$

kde stavové proměnné  $x$  a  $y$  reprezentují populace kořisti a dravce a  $f(x, y) = b - py$  a  $g(x, y) = rx - d$  pro parametry  $b, p, r, d > 0$ .

**41. příklad:** Interpretujte parametry modelu (16).

**42. příklad:** Najděte stacionární body systému (16), spočtěte zde Jacobiho matici a určete jejich stabilitu. Pokuste se nakreslit fázový portrét.

**43. příklad:** Najděte předpis netriviální trajektorie (16) ve fázovém prostoru s počáteční podmínkou  $y(x_0) = y_0$ , použijte znalost toho, že  $\frac{y'}{x'} = \frac{dy}{dx}$ . Řešte samozřejmě v 1. kvadrantu, který je pro model smysluplný. Může trajektorie tento kvadrant opustit? Jak trajektorie vypadá?

**44. příklad:** Srovnejte Lotkúv-Volterrúv model s Kermack-McKendrickovým modelem SIR.

**45. příklad:** Podívejte se na

Scholarpedii

## Vyhodnocení:

Model můžeme samozřejmě dále rozšiřovat:

**46. příklad:** Nalezněte na internetu nějaké informace o modelu dravec-kořist. Pokuste se najít nějaký vědecký článek, který je jeho rozšířením. Vytvořte ve vhodném programu simulaci.

## Goodwinův model hospodářského cyklu

Představíme si nyní ekonomický model interakcí, který vede na model dravec-kořist.

### Koncepce:

Budeme vycházet z Harrodova-Domarova modelu, přičemž budeme předpokládat, že veškerá čistá produkce, tj. produkce bez vyplacených mezd, je investována.

Označme  $L$  množství zaměstnaného obyvatelstva, které za svou práci dostává mzdu  $W$  (jde vlastně o střední hodnotu mzdy).  $N$  bude množství práceschopného (nebo práceochotného) obyvatelstva.

Pro zjednodušení zavedeme následující veličiny:

- *produktivita práce = střední množství produktu vytvořeného jedním pracujícím člověkem*  $a = \frac{Y}{L}$ ,
- *relativní zaměstnanost*  $v = \frac{L}{N}$ ,
- *podíl mzdy na produkci*  $u = \frac{W}{a} = \frac{WL}{Y}$ .

Dále předpokládejme, že míra růstu obyvatel  $\beta$  je konstantní, projevuje se stálý technický pokrok, tj. konstantní relativní růst produktivity práce  $\alpha$  a relativní změna mzdové sazby závisí na relativní zaměstnanosti.

## Phillipsova křivka:

Závislost relativní změny mzdové sazby na relativní zaměstnanosti (nebo nezaměstnanosti) popisuje Phillipsova křivka, jejíž vlastnosti byly zjištěny empiricky. Funkce  $\varphi : [0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  je diferencovatelná funkce, která je rostoucí a konvexní a splňuje nerovnosti

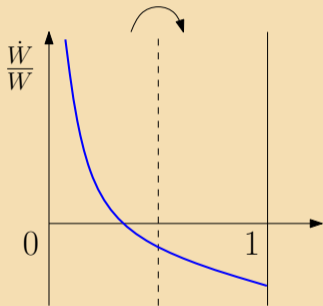
$$\varphi(0) < 0, \quad (17)$$

tj. při malé zaměstnanosti (velké nezaměstnanosti) mzdy klesají (je-li práce vzácná, lidé jsou ochotni pracovat za nízkou mzdou),

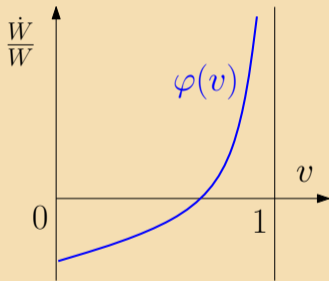
$$\lim_{v \rightarrow 1^-} \varphi(v) > 0, \quad (18)$$

tj. při velké zaměstnanosti mzdy rostou (chceme-li při téměř plné zaměstnanosti získat nového pracovníka, musíme ho přeplatit).

Phillipsova křivka jako závislost  $\frac{\dot{W}}{W}$  na relativní nezaměstnanosti, tedy jako funkce  $1 - v$ , je klesající konvexní funkce (otočení okolo osy  $v = \frac{1}{2}$ ). Někdy se místo relativní změny mzdové sazby analogicky vyjadřuje inflace.



míra nezaměstnanosti



míra zaměstnanosti



## Rovnice:

Oproti Harrodovu-Domarovu modelu nyní platí  $I = Y - LW$ , tedy při původním označení kapitálové náročnosti jednotky produkce  $r = \frac{K}{Y}$  můžeme změnu kapitálu psát jako

$$K' = rY' = Y - LW - \delta rY.$$

Odtud

$$\frac{Y'}{Y} = \frac{1}{r}(1 - u) - \delta.$$

**47. příklad:** Ukažte, že za daných předpokladů platí

$$\frac{v'}{v} = \frac{1}{r}(1 - u) - \delta - \alpha - \beta.$$

**48. příklad:** Za předpokladu  $\frac{W'}{W} = \varphi(v)$  ukažte, že platí

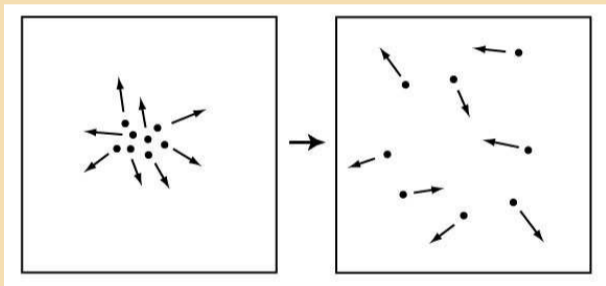
$$\frac{u'}{u} = \varphi(v) - \alpha.$$

## Vyhodnocení:

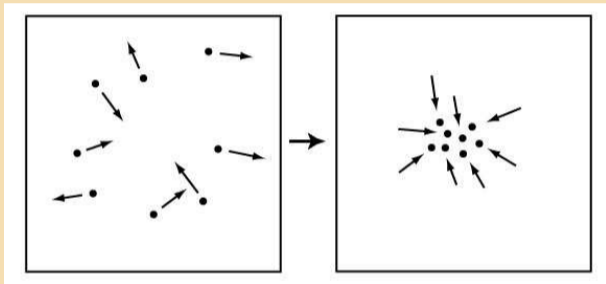
Model dravec-kořist je významný model, jehož hlavním výsledkem je popis endogenních fluktuací a pochopení, že nejde o patologický jev, ať už jde o interakce v biosystémech, ekosystémech, chemických reakcích či v ekonomii.

Pochopení vzniku oscilací a jiných nerovnovážných stavů v dynamických systémech dává tušit mnoho nového. Například moderní pojetí termodynamiky jako obecně nerovnovážné dynamiky otevřených systémů vysvětluje na základě modelů s limitními cykly (nebo jinými i chaotickými atraktory) vznik složitých struktur a jejich uspořádání.

Klasická termodynamika popisuje především **izolované systémy**, které po určitém čase dosáhnou rovnováhy (teplota nerovnoměrně zahřátého tělesa se časem vyrovná, sůl ve skleničce vody se časem rozpustí a koncentrace solného roztoku se vyrovná). Mluvíme o dosažení maximální entropie.



Pro **otevřené systémy** je situace odlišná. Otevřené systémy, kterými jsou i živé organismy, využívají okolní energii na udržení a zvýšení své vlastní uspořádanosti a snižují takto entropii systému.

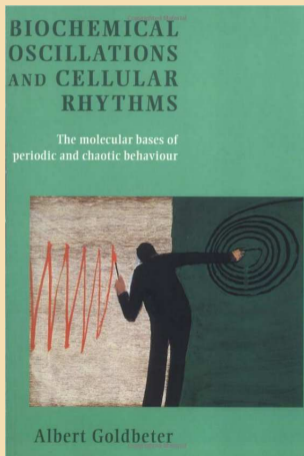


U vzniku teorie nerovnovážné termodynamiky, která vysvětluje tento jev **samoorganizace**, stojí především dva laureáti Nobelovy ceny za chemii

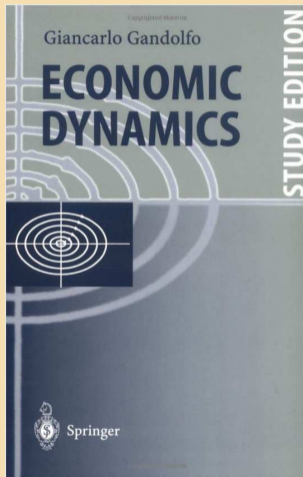
Lars Onsager (1968) a Ilya Prigogine (1977).

Výsledkem je vznik nových vědních oblastí čerpajících z nerovnovážné teorie. Často je najdeme jako aplikace matematické disciplíny nazývané nelineární dynamika nebo teorie bifurkací a teorie chaosu.

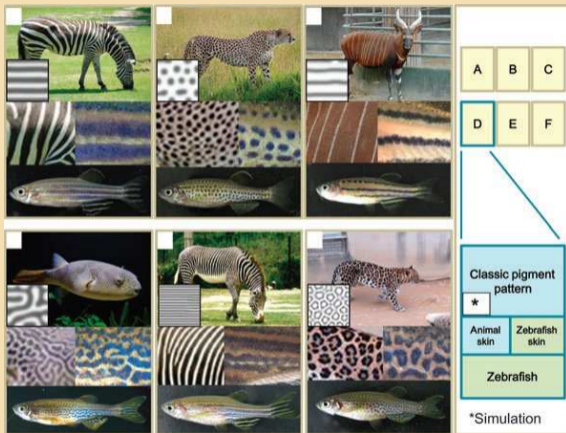
Vyberme námátkou biochemii (pochopení např. biochemických přepínačů u enzymatických reakcí v buňkách),



ekonomii (neviditelná ruka trhu vedoucí k rovnovážnému stavu již není dogmatem),



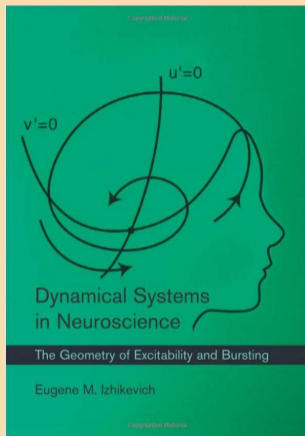
biologii (vznik vzorů u zvířat),



Watanabe M, Kondo S.: Changing clothes easily: connexin41.8 regulates skin pattern variation, *Pigment Cell Melanoma Res.* 2012 Feb 7



neurovědu (např. popis chování neuronů),



meteorologii (dynamika počasí),  
fyziku (např. jevy hydrodynamického proudění),  
psychologii,  
sociologii,  
dopravu  
až po kosmologii a další.

Těm, kteří mají zájem o tuto oblast matematiky doporučuji předmět  
M6201 Nelineární dynamika a její aplikace vyučovaný příští rok.

# Evoluční hry

Teorie evolučních her je spojením teorie her a dynamických systémů v biologických aplikacích. Strategie v teorii her byly strategiemi rozumných hráčů, ti jednali na základě optimalizace (Nashova rovnováha). Jistě se nedá očekávat, že se podobně racionálně budou chovat zvířata nebo rostliny (ani lidé to často nedělají). Přesto jisté strategie v přírodě "vyhrávají" ve smyslu přežití, říkáme jim evolučně stabilní strategie. Teorie evolučních her je vcelku nová disciplína rozvíjející se každým dnem, proto si ukážeme jen některé její hlavní principy na nejznámějším modelu "hawk and dove" a na tomto jednoduchém modelu si odvodíme některé obecnější věty.

## Co je v evoluci hrou a co je evolučně stabilní strategie?

V evoluční hře budou **hráči geny**, které řídí chování organismu. **Strategií** je **fenotyp chování** (fenotypem se rozumí soubor pozorovatelných vlastností a znaků), tedy geny předprogramované chování. **Výplatní funkcí** je **fitness** (biologická, reprodukční zdatnost), schopnost zachovat gen a rozšířit ho v genotypu populace (genotypem rozumíme soubor všech genů, které má organismus k dispozici).

Klasická darwinistická a neodarwinistická teorie evoluce předpokládá, že kritériem evolučního úspěchu jedince je jeho fitness. Podle klasických představ by se v důsledku přirozeného výběru měli v populaci zachovat ty geny, které svému nositeli poskytují největší fitness.

S nástupem evoluční teorie her se však ukázalo, že z dlouhodobého hlediska není důležité, jak příslušný gen mění fitness nositele, ale to, jestli podmiňuje **evolučně stabilní strategii**, tj. takovou strategii, která pokud jednou v populaci převládne, **nemůže být potlačena** žádnou jinou minoritní strategií. Od statického modelu tedy musíme nutně přejít k dynamickému.

V evoluci nevyhrává zdatnější, jak si představoval Charles Darwin, ale **stabilnější...**

## Model jestřáb a hrdlička

### Koncepce:

Uvažujme dvě populace jednoho druhu  $H$  a  $D$  bojující mezi sebou o zdroj potravy.  $H$  představuje fenotyp chování **hawk** - jestřáb, který bojuje tvrdě, chladnokrevně a vzdává se jen tehdy, když je vážně zraněný, **dove**  $D$  - hrdlička se uchyluje jen k symbolické hrozbě a při přímém útoku utíká nezraněná. Cílem evoluční teorie her je určit zastoupení těchto dvou strategií v populaci a která z nich převládne.

### Diagram:

strategie	$H$	$D$
$H$	$\frac{1}{2}(G - C)$	$G$
$D$	$0$	$\frac{1}{2}G$

Uvažujme nejprve populaci fenotypu  $D$ . Vstoupí-li do ní jedinec fenotypu  $H$ , bude se v ní s jistotou šířit, protože fitness - výplatní funkce  $u(H, D) = G > \frac{1}{2}G = u(D, D)$ .  $D$  tedy není evolučně stabilní strategie, protože není odolná vůči vstupu mutantního fenotypu.

Uvažujme naopak populaci fenotypu  $H$ . Vstoupí-li do ní jedinec fenotypu  $D$ , bude pro fitness platit

$$u(D, H) = 0 \quad \text{a} \quad u(H, H) = \frac{1}{2}(G - C)$$

a logicky bude záviset na tom, zda zisk z boje  $G$  bude větší nebo menší než náklady na boj  $C$ . V případě, že  $G > C$ , pak  $u(D, H) < u(H, H)$  a mutantní fenotyp se v populaci nebude moci šířit. V této situaci bude fenotyp jestřába  $H$  evolučně stabilní strategií. V opačném případě, kdy náklady  $C$  převýší zisk  $G$ , bude se fenotyp hrdličky  $D$  moci šířit v populaci jestřábů.

Uvažujeme-li smíšenou strategii, kdy se jedinec chová jako jestřáb s pravděpodobností  $x$  a jako hrdlička s pravděpodobností  $1 - x$ , pak fitness jednotlivých fenotypů je daná vztahy

$$\begin{aligned}u(H, xH + (1 - x)D) &= xu(H, H) + (1 - x)u(H, D) \\ &= x\frac{1}{2}(G - C) + (1 - x)G \\ u(D, xH + (1 - x)D) &= xu(D, H) + (1 - x)u(D, D) \\ &= x \cdot 0 + (1 - x)\frac{1}{2}G\end{aligned}$$

**49. příklad:** Ukažte, že pokud  $x < \frac{G}{C}$ , dochází k šíření fenotypu  $H$  a pokud  $x > \frac{G}{C}$ , dochází k šíření fenotypu  $D$ .



## Rovnice:

Uvažujme populaci o  $H$  jedincích fenotypu jestřába a  $D$  hrdličky, velikost celé populace je  $N = H + D$ . Předpokládáme, že každý fenotyp se rozmnožuje úměrně svému fitness  $u_H = r_H(H, D)$  a  $u_D = r_D(H, D)$ , který závisí samozřejmě na zastoupení jedinců fenotypu  $H$  a  $D$  v populaci:

$$H' = r_H(H, D)H$$

$$D' = r_D(H, D)D$$

Dynamika růstu celé populace je pak dána rovnicí

$$\begin{aligned} N' &= r_H(H, D)H + r_D(H, D)D \\ &= r_H(H, D)\frac{H}{N}N + r_D(H, D)\frac{D}{N}N = \bar{r}N, \end{aligned}$$

kde  $\bar{r} = r_H x + r_D(1 - x)$ , přičemž  $x$  představuje podíl jestřába v celé populaci.

**50. příklad:** Ukažte, že platí tzv. replikátorová rovnice

$$x' = x(r_H - \bar{r}).$$

Pro výplatní matici  $A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(G - C) & G \\ 0 & \frac{1}{2}G \end{pmatrix}$  pak fitness fenotypu jestřába bude

$$r_H = xu(H, H) + (1 - x)u(H, D) = \frac{1}{2}(G - C)x + G(1 - x),$$

fitness fenotypu hrdličky bude

$$r_D = xu(D, H) + (1 - x)u(D, D) = \frac{1}{2}G(1 - x)$$

a

$$\bar{r} = r_H x + r_D(1 - x) = x\left(\frac{1}{2}(G - C)x + (1 - x)G\right) + (1 - x)\frac{1}{2}G(1 - x).$$

Replikátorová rovnice pro fenotyp jestřába je proto

$$x' = \frac{C}{2}x(x - 1)\left(x - \frac{G}{C}\right).$$

**51. příklad:** Odvodte :-)

**52. příklad:** Najděte stacionární body a určete jejich stabilitu.

**53. příklad:** Určete zastoupení strategií jestřába a hrdličky v populaci v dlouhodobém horizontu.

**54. příklad:** Ve vhodném programu simulujte populaci jestřábů a hrdliček. Předpokládejte náklady na boj ve výši  $C = 4$ , zisk  $G = 1$  a počáteční populaci jestřábů a hrdliček v poměru 1:100.

**55. příklad:** Porovnejte výsledek dynamického modelu s herním modelem se smíšenými strategiemi. Smíšenou strategii  $(x, 1 - x)^T$  můžeme v populaci jestřábů a hrdliček vnímat jako pravděpodobnost chování náhodného jedince (samozřejmě předpokládáme, že každého jedince potkáme se stejnou pravděpodobností, tj. např. hrdličky se

neshlukují). Tato smíšená strategie náhodného jedince je tedy dána právě poměrem fenotypů v populaci.

### Vyhodnocení:

Model je samozřejmě velmi jednoduchý, právě pro svou přehlednost je jedním ze základních modelů biologie, vysvětluje sice dynamiku evoluce pouze dvou fenotypů, ale jeho princip lze použít obecně.

# Teorie her a dynamika

V této části použijeme předchozí model hawk-dove pro odvození obecnějšího principu. Půjde nám o vyjádření replikátorových rovnic pro populaci složenou z  $n$  fenotypů.

**Definice:** Maticovou symetrickou hrou dvou hráčů rozumíme hru se stejnými konečnými  $n$ -rozměrnými prostory strategií  $S_1 = S_2 = S$  a symetrickými výplatními funkcemi  $u_1(i, j) = u_2(j, i) = (a_{ij})$ ,  $i, j \in S$ . Výplatní funkci pro smíšené strategie  $x, y \in (S)$  pak zapisujeme pomocí výplatní matice  $A$ , tj.  $u_1(x, y) = x^T A y = u_2(y, x)$  pro  $x, y \in (S)$ .

**Poznámka 11.** Smíšená strategie  $\bar{x}$  je rovnovážnou strategií maticové symetrické hry s maticí  $A$  právě tehdy, když pro všechny smíšené strategie  $x \in (S)$  platí

$$\bar{x}^T A \bar{x} \geq x^T A \bar{x}, \text{ tj. } \bar{x}^T A \bar{x} = \max_{x \in (S)} x^T A \bar{x}.$$

Označme ryzí strategie  $e_i = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0)^T$  (vektor s  $i$ -tou nenulovou složkou) a pro smíšenou strategií  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$  definujme množinu indexů nenulových pravděpodobností  $C(x) = \{k : x_k > 0\}$ . Pak platí následující věta:

**Věta:** Smíšená strategie  $\bar{x}$  symetrické maticové hry s maticí  $A$  je rovnovážná právě tehdy, když

$$\bar{x}^T A \bar{x} \geq e_i^T A \bar{x} \quad \text{pro všechna } i \notin C(\bar{x})$$

$a$

$$\bar{x}^T A \bar{x} = e_i^T A \bar{x} \quad \text{pro všechna } i \in C(\bar{x}).$$

**Poznámka 12.** Ryzí strategie  $e_i$  je tedy rovnovážnou strategií právě tehdy, když pro všechna  $j$  platí

$$a_{ii} \geq a_{ji}$$

## Replikátorové rovnice:

Uvažujme nyní populaci  $n$  fenotypů o velikosti  $N_i, i = 1 \dots n$ , rozložení populace je tedy  $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ , kde  $x_i = \frac{N_i}{N}$ . Výplatní matice  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  určuje fitness (a tedy růst populace)  $i$ -tého fenotypu takto:

$$N'_i = r_i N_i, \quad \text{kde} \quad r_i = e_i^T A x.$$

Růst celé populace je určen průměrnou mírou růstu

$$N' = \bar{r} N, \quad \text{kde} \quad \bar{r} = x r_i = x^T A x.$$

Pro jednotlivé fenotypy tedy platí

$$x'_i = x_i (r_i - \bar{r}) = x_i (e_i^T A x - x^T A x).$$



**56. příklad:** Napište repikátorové rovnice pro symetrickou maticovou hru s maticí

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

**57. příklad:** Ukažte, že simplex  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  je invariantní množinou dynamického systému daného replikátorovými rovnicemi. (Návod: uvažujte dynamiku nové proměnné  $s = x_1 + x_2 + x_3$  pro  $s = 1$ .)

**58. příklad:** Ve vhodném programu nakreslete fázový portrét (2D i 3D), v dvojrozměrném nakreslete nulkliny, spočtete stacionární bod a na základě Jacobiho matice určete jeho stabilitu.

**59. příklad:** Uvažujte interakci dvou populací - prodejců a kupujících. Prodejce se může řídit dvěma strategiemi - buď být čestný, nebo podvádět. Kupující může buď prověřit nebo neprovéřit, co kupuje. Jde o tzv. bimaticovou hru (prodávající a kupující mají obecně nesymetrické výplatní matice)

$$P = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Předpokládáme, že prodávající a kupující budou používat danou strategii tím více, čím úspěšnější bude (máme tu jakousi fitness daného fenotypu). Odvoďte replikátorové rovnice a nakreslete jejich fázový portrét.

**Návod v článku.**

# Dynamický model difúze a šíření

Difúze je transportní děj, kdy termodynamický systém směřuje k rovnovážnému stavu, v němž jsou v jeho objemu vyrovnány koncentrace všech jeho složek. Je výsledkem pohybu mnoha malých částic v náhodných směrech (Brownův pohyb). Jedním ze způsobů modelování je proto agregační přístup pomocí náhodné procházky.

Uvažujme nejjednodušší případ, pohyb jedné částičky po přímce. Za čas  $\Delta t$  se posune vpravo nebo vlevo o  $\Delta x$ . Toto  $\Delta x$  bude jakási střední vzdálenost mezi kroky náhodné procházky. Platí pro ni, že její čtverec s časem lineárně roste. Ukázal to v roce 1905 Einstein při modelování Brownova pohybu.

Intuitivní představa je tato:

V počátečním okamžiku umístíme částičku do počátku a budeme sledovat její vzdálenost  $x_t$  od počátku po  $t$  krocích (v čase  $t$ ). Po  $t - 1$  krocích se nacházíme ve vzdálenosti  $x_{t-1}$  a po dalším kroku bude naše vzdálenost rovna jedné z následujících možností

$$x_t = x_{t-1} - \xi \quad \text{nebo} \quad x_t = x_{t-1} + \xi,$$

tedy

$$x_t^2 = x_{t-1}^2 - 2x_{t-1}\xi + \xi^2 \quad \text{nebo} \quad x_t^2 = x_{t-1}^2 + 2x_{t-1}\xi + \xi^2.$$

Po dostatečně velkém počtu malých kroků průměrně

$$x_t^2 = x_{t-1}^2 + \xi^2 \approx t\xi^2.$$

Střední kvadratická vzdálenost tedy bude růst úměrně času:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \text{const.}$$

Pravděpodobnost, že se částice bude vyskytovat v čase  $t$  na místě  $x$  bude

$$p(x, t) = \frac{1}{2}p(x + \Delta x, t - \Delta t) + \frac{1}{2}p(x - \Delta x, t - \Delta t),$$

odečtením  $p(x, t - \Delta t)$  a podělením  $\Delta t$  dostaneme

$$\frac{p(x, t) - p(x, t - \Delta t)}{\Delta t} = \frac{(\Delta x)^2}{2\Delta t} \frac{p(x + \Delta x, t - \Delta t) - 2p(x, t - \Delta t) + p(x - \Delta x, t - \Delta t)}{(\Delta x)^2}.$$

Z definice derivace limitním přechodem  $\Delta t \rightarrow 0$  a  $\Delta x \rightarrow 0$  dostaneme rovnici difúze:

$$\frac{\partial p}{\partial t} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2},$$

kde  $2D = \frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = \text{const.}$  je tzv. difúzní koeficient. Z matematického hlediska je rovnice totožná s rovnicí vedení tepla. Zvláště pro více prostorových dimenzí se používá pro operátor na pravé straně rovnice difúze (nebo vedení tepla) označení

$$\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \dots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} = \nabla^2 = \Delta$$

a nazývá se Laplaceův operátor.

**Poznámka 13.** Operátor *nabla* je často používán v zápisech vícerozměrných dynamických systémů. Jde vlastně o zkrácený zápis vektoru parciálních derivací, tj.

$$\nabla f = \left( \frac{\partial f}{\partial x_1}, \frac{\partial f}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right).$$

Zápis s tečkou pak značí použití součtu v analogii se skalárním součinem, tj.

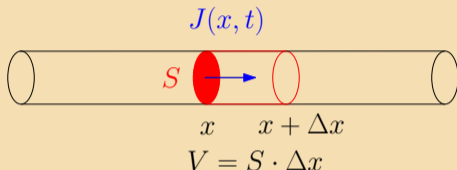
$$\nabla \cdot f = \frac{\partial f}{\partial x_1} + \frac{\partial f}{\partial x_2} + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n},$$

Laplaceův operátor  $\Delta$  je tedy formálně skalární součin operátorů

$$\nabla \cdot \nabla = \Delta.$$

## Spojité přístup:

Uvažujme proudění tenkou trubicí:



$J(x, t)$  je vektor ve směru toku o velikosti hustoty částic (počet částic v čase  $t$  na jednotku plochy),  $S$  je plocha řezu. Je-li  $u(x, t)$  koncentrace částic v  $(x, t)$ , pak bude v objemu  $V$  změna množství částic za  $\Delta t$ :

$$\frac{S \Delta x u(x, t + \Delta t) - S \Delta x u(x, t)}{\Delta t} = S(J(x, t) - J(x + \Delta x, t)).$$

Dělením  $S \Delta x$  a limitním přechodem  $\Delta t \rightarrow 0$  dostaneme zákon zachování hmoty:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x}$$

Obecněji, pokud by částice v trubici navíc vznikaly nebo zanikaly s hustotou  $f(x, t)$  (počet vzniklých nebo zaniklých částic na jednotku času a objemu), byla by rovnice zákona zachování ve tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} + f.$$

Hustota proudění částic  $J(x, t)$  je nejčastěji ovlivňována dvěma jevy - advekcí, tj. přenosem částic v médiu proudícím rychlostí  $v$ , pak

$$J_{adv} = vu$$

a difúzí. Difúzní proudění podléhá empirickému Fickovu zákonu

$$J_{diff} = -D\frac{\partial u}{\partial x},$$

tedy tok částic závisí přímo úměrně na změně koncentrace částic a směřuje k vyrovnání koncentrace. V případě čisté difúze tedy platí

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = D\nabla^2 u. \quad (19)$$



Prozatím se spokojíme s jednou prostorovou dimenzí a podíváme se blíže na řešení rovnice difúze (19). To závisí jistě na počátečních podmínkách. Nejčastěji jsou to podmínky okrajové, tj. koncentrace částic je určena na okraji trubice  $x \in [0, l]$ :

- $u(l, t) = \phi(t)$  Dirichletovy,
- $\frac{\partial u}{\partial x}(l, t) = \psi(t)$  Neumannovy,
- $\frac{\partial u}{\partial x} = -cu(l, t)$  Robinovy

Rovnice difúze je separovatelná (i ve více dimenzích, Laplaceův operátor je jediný operátor druhého řádu invariantní vzhledem k ortogonální grupě, jednoduše řečeno, lze s ním hezky pracovat, protože se nemění při změně souřadnic).

Hledáme tedy řešení (19) ve tvaru

$$u(x, t) = F(x)G(t).$$

Dosazením do (19) dostáváme

$$F(x)G'(t) = D\nabla^2 F(x)G(t),$$
$$\frac{G'(t)}{DG(t)} = \frac{\nabla^2 F(x)}{F(x)} = -\lambda = \text{const.}$$

tj.

$$-\nabla^2 F(x) = \lambda F(x), \quad \text{a} \quad G'(t) = -\lambda DG(t).$$

**60. příklad:** Stacionární difuze membránou při  $D = \text{konst.}$ . Uvažujme membránu o tloušťce  $l$ , jejíž povrchy jsou udržovány na konstantních koncentracích. Určete stacionární stav difuze na membráně.

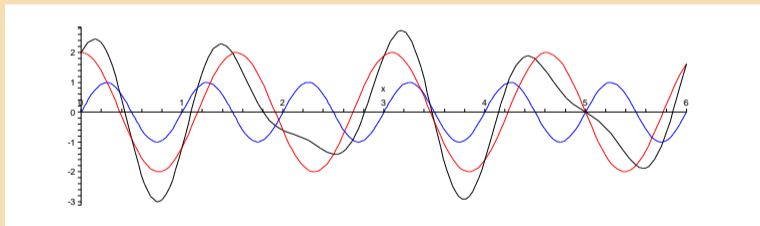
Řešení rovnice difúze pomocí Fourierovy transformace.

## Řešení rovnice difúze pomocí Fourierovy transformace.

Fourierova transformace převádí funkci  $F(x)$  na funkci  $\mathcal{F}(\alpha)$ .  
Zjednodušeně řečeno můžeme každou funkci zapsat jako  
"součet" funkcí sin a cos s nějakými frekvencemi a amplitudami.

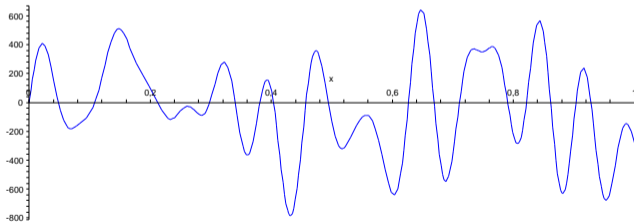
## Řešení rovnice difúze pomocí Fourierovy transformace.

Fourierova transformace převádí funkci  $F(x)$  na funkci  $\mathcal{F}(\alpha)$ . Zjednodušeně řečeno můžeme každou funkci zapsat jako "součet" funkcí sin a cos s nějakými frekvencemi a amplitudami.



## Řešení rovnice difúze pomocí Fourierovy transformace.

Fourierova transformace převádí funkci  $F(x)$  na funkci  $\mathcal{F}(\alpha)$ .  
Zjednodušeně řečeno můžeme každou funkci zapsat jako  
"součet" funkcí sin a cos s nějakými frekvencemi a amplitudami.



## Řešení rovnice difúze pomocí Fourierovy transformace.

Fourierova transformace převádí funkci  $F(x)$  na funkci  $\mathcal{F}(\alpha)$ . Zjednodušeně řečeno můžeme každou funkci zapsat jako "součet" funkcí  $\sin$  a  $\cos$  s nějakými frekvencemi a amplitudami.

Periodické funkce můžeme takto rozložit do tzv. Fourierovy řady (lineární kombinace funkcí  $\sin(\alpha x)$  a  $\cos(\alpha x)$  s různými frekvencemi  $\alpha$  a dostaneme, tzv. spektrum funkce, které určuje kterým frekvencím přísluší která amplituda. Pro neperiodické funkce můžeme přejít od součtu k integrálu. Podstatnou vlastností této transformace je to, že můžeme zpětně z tohoto spektra dostat funkci původní, tj. existuje inverzní transformace.

$$\mathcal{F}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)e^{-i\alpha x} dx$$

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{F}(\alpha)e^{i\alpha x} d\alpha$$

Komplexní zápis  $e^{i\alpha x}$  skrývá ony periodické funkce podle Eulerova vztahu

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x.$$

Fourierova transformace se používá např. při analýze signálů (zjištění vad strojů), mp3, jpeg, MPEG kompresi obrazu a zvuku nebo při lokalizaci systémem GPS.



Hledejme nyní řešení rovnice difúze (19) s okrajovými podmínkami  $u(\pm\infty, t) = 0$ ,  $\frac{\partial u}{\partial x}(\pm\infty, t) = 0$  a počáteční podmínkou

$$u(x, 0) = \frac{M}{S}\delta(x),$$

kde  $M$  je množství látky vstříknuté do trubice o ploše řezu  $S$  v počátku  $x = 0$  a v čase  $t = 0$ . "Funkce"  $\delta$  je Diracova delta funkce, jde ve skutečnosti o tzv. distribuci, což je rozšíření pojmu funkce pomocí limity.

### Animace

Z tohoto limitního pohledu můžeme napsat "definici" Diracovy delta funkce takto:

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & : x = 0 \\ 0 & : x \neq 0 \end{cases}$$

přičemž  $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$ .

Formálně korektně bychom museli použít Lebesgueovy míry a definovat  $\delta$  jako míru množiny  $A \subset \mathbb{R}$ , přitom

$$\delta(A) = \begin{cases} 1 & : 0 \in A \\ 0 & : 0 \notin A. \end{cases}$$

Odtud také vyplývá její základní vlastnost

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(d\delta(x)) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x)dx = f(0).$$

Model tedy předpokládá tenkou a nekonečně dlouhou trubici, difúze probíhá pouze ve směru osy  $x$ , přitom v čase  $t = 0$  abstrahujeme od skutečnosti, že vstřík látky trvá nějakou dobu a probíhá do objemu, nikoliv plochy. Fakticky je ale tato abstrakce možná, protože předpokládáme velmi dlouhý časový interval pozorování difúze a dostatečně tenkou trubici oproti její délce.

Budeme tedy nyní hledat řešení  $u(x, t)$  rovnice difúze (19)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = D \nabla^2 u$$

Fourierovou transformací řešení  $u(x, t)$  je

$$\mathcal{U}(\alpha, t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx$$

**61. příklad:** Ukažte, že pro Fourierovu transformaci  $\mathcal{U}(\alpha, t)$  koncentrace  $u(x, t)$  platí diferenciální rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + D\alpha^2 \mathcal{U} = 0.$$

Ukažte, že pro Fourierovu transformaci  $\mathcal{U}(\alpha, t)$  koncentrace  $u(x, t)$  platí diferenciální rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + D\alpha^2 \mathcal{U} = 0.$$

Ukažte, že pro Fourierovu transformaci  $\mathcal{U}(\alpha, t)$  koncentrace  $u(x, t)$  platí diferenciální rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + D\alpha^2 \mathcal{U} = 0.$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx$$

Ukažte, že pro Fourierovu transformaci  $\mathcal{U}(\alpha, t)$  koncentrace  $u(x, t)$  platí diferenciální rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + D\alpha^2 \mathcal{U} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\alpha x} dx \end{aligned}$$

Integrál je lineární operátor,  $t$  nezávisí na  $x$ , můžeme zaměnit pořadí integrace.

Ukažte, že pro Fourierovu transformaci  $\mathcal{U}(\alpha, t)$  koncentrace  $u(x, t)$  platí diferenciální rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + D\alpha^2 \mathcal{U} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-i\alpha x} dx \end{aligned}$$

Dosadíme z rovnice difúze.

Ukažte, že pro Fourierovu transformaci  $\mathcal{U}(\alpha, t)$  koncentrace  $u(x, t)$  platí diferenciální rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + D\alpha^2 \mathcal{U} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-i\alpha x} dx = \\ &= D \left( \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} e^{-i\alpha x} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha) e^{-i\alpha x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \right) \end{aligned}$$

Použijeme per partes



Ukažte, že pro Fourierovu transformaci  $\mathcal{U}(\alpha, t)$  koncentrace  $u(x, t)$  platí diferenciální rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + D\alpha^2 \mathcal{U} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-i\alpha x} dx = \\ &= D \left( \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} e^{-i\alpha x} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha) e^{-i\alpha x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \right) = \\ &= D \left( \left[ u(x, t) (-i\alpha e^{-i\alpha x}) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 e^{-i\alpha x} u(x, t) dx \right), \end{aligned}$$

a znovu per partes spolu s okrajovými podmínkami.

Ukažte, že pro Fourierovu transformaci  $\mathcal{U}(\alpha, t)$  koncentrace  $u(x, t)$  platí diferenciální rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + D\alpha^2 \mathcal{U} = 0.$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u(x, t) e^{-i\alpha x} dx = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} e^{-i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} D \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} e^{-i\alpha x} dx = \\ &= D \left( \left[ \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} e^{-i\alpha x} \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} (-i\alpha) e^{-i\alpha x} \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} dx \right) = \\ &= D \left( \left[ u(x, t) (-i\alpha e^{-i\alpha x}) \right]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} \alpha^2 e^{-i\alpha x} u(x, t) dx \right), \text{ tj.} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + D\alpha^2 \mathcal{U} = 0$$

Obecným řešením rovnice

$$\frac{\partial \mathcal{U}}{\partial t} + D\alpha^2 \mathcal{U} = 0$$

je zřejmě funkce

$$\mathcal{U}(\alpha, t) = e^{-D\alpha^2 t} \cdot \textit{konst.}$$

Přitom konstanta je určena počáteční podmínkou  $u(x, 0) = \frac{M}{S}\delta(x)$  a obecně může záviset na  $\alpha$ . V našem případě však platí

$$\mathcal{U}(\alpha, 0) = \int_{-\infty}^{\infty} u(x, 0) e^{-i\alpha x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{M}{S} \delta(x) e^{-i\alpha x} dx = \frac{M}{S}.$$

Partikulárním řešením transformované rovnice je tedy

$$\mathcal{U}(\alpha, t) = \frac{M}{S} e^{-D\alpha^2 t}.$$

Zpětnou transformací dostáváme

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{U}(\alpha, t) e^{i\alpha x} d\alpha = \frac{M}{2\pi S} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-D\alpha^2 t} e^{i\alpha x} d\alpha.$$

Protože  $e^{i\alpha x} = \cos \alpha x + i \sin \alpha x$  a funkce  $\sin$  je lichá, platí

$$u(x, t) = \frac{M}{\pi S} \int_0^{\infty} e^{-D\alpha^2 t} \cos(\alpha x) d\alpha.$$

**Poznámka 14.** Substituce  $\alpha = \frac{\xi}{\sqrt{Dt}}$ ,  $x = \eta\sqrt{Dt}$  převádí výše uvedený integrál na tvar

$$\frac{M}{\pi S \sqrt{Dt}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \cos(\eta\xi) d\xi.$$

Označíme a vypočteme následující integrál:

$$I(\eta) = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \cos(\eta\xi) d\xi.$$

Nejprve si všimněme, že platí

$$\frac{dI}{d\eta} = - \int_0^{\infty} \xi \sin(\eta\xi) e^{-\xi^2} d\xi.$$

Dále pak  $\frac{de^{-\xi^2}}{d\xi} = -2\xi e^{-\xi^2}$ , tj.

$$\frac{dI}{d\eta} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \sin(\eta\xi) \frac{d(e^{-\xi^2})}{d\xi} d\xi.$$

Metodou per partes nyní můžeme přepsat tento integrál do tvaru

$$\frac{dI}{d\eta} = \frac{1}{2} \left( \left[ \sin(\eta\xi) e^{-\xi^2} \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{d \sin(\eta\xi)}{d\xi} e^{-\xi^2} d\xi \right).$$

Funkce  $\sin(\eta\xi) e^{-\xi^2}$  je pro  $\xi = 0$  nulová, pro  $\xi \rightarrow \infty$  také, protože  $\sin$  je ohraničený a  $e^{-\xi^2} \rightarrow 0$ .

Dostali jsme tedy pro  $I(\eta)$  diferenciální rovnici

$$\frac{dI(\eta)}{d\eta} = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \eta \cos(\eta\xi) e^{-\xi^2} d\xi = -\frac{\eta}{2} I(\eta).$$

$$\frac{dI(\eta)}{d\eta} = -\frac{\eta}{2}I(\eta)$$

Protože  $I(\eta) = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} \cos(\eta\xi) d\xi$ , je počáteční podmínkou zřejmě  
 $I(0) = \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi$ .

**62. příklad:** Ukažte, že platí  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Ukažte, že platí  $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ .

Místo integrálu  $I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$  budeme hledat jeho druhou mocninu

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \cdot \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

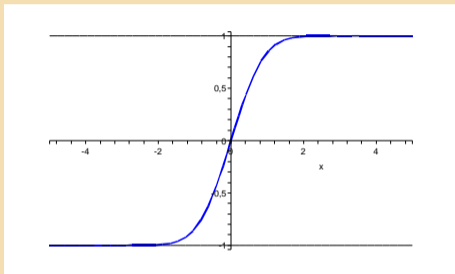
Označme  $\Omega$  1. kvadrant dvojrozměrného prostoru s kartézskými souřadnicemi  $x, y$ . V přepisu do polárních souřadnic platí:

$$\iint_{\Omega} e^{-(x^2+y^2)} dx dy = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr \right) d\varphi$$

Substitucí  $r^2 = t$  dostáváme

$$I^2 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_0^{\infty} \frac{1}{2} e^{-t} dt \right) d\varphi = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \left[ -\frac{1}{2} e^{-t} \right]_0^{\infty} = \frac{\pi}{4}.$$

**Poznámka 15.** Funkce  $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$  se nazývá Gaussova chybová funkce a má tvar



**63. příklad:** Ukažte, že řešením úlohy (19) s dříve uvedenými okrajovými a počátečními podmínkami je koncentrace

$$u(x, t) = \frac{M}{S\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$



Analogicky lze odvodit řešení v trojrozměrném případě jako

$$u(x, t) = \frac{M}{4\pi t \sqrt{4\pi D_x D_y D_z t}} e^{-\frac{x^2}{4D_x t} - \frac{y^2}{4D_y t} - \frac{z^2}{4D_z t}}.$$

**Poznámka 16.** V jednorozměrném případě tedy maximální koncentrace  $u_{max}$  látky v čase klesá s  $\frac{1}{\sqrt{t}}$ . V dvojrozměrném případě klesá s  $\frac{1}{t}$  a v trojrozměrném s  $\frac{1}{t\sqrt{t}}$ .

**64. příklad:** Vytvořte animaci koncentrace  $u(x, t)$  v čase (program Maple, funkce *animate*).

# Model difúze s advekcí

V této a následující kapitole model difúze rozšíříme. Uvažujme znovu rovnici zákona zachování hmoty

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} + f = -\frac{\partial(J_{diff} + J_{adv})}{\partial x} + f.$$

V předchozí kapitole studovaný model difúze předpokládal, že

- $J_{adv} = vu = 0$ , tj.  $v = 0$ , nedochází k advekci, tj. přenosu látky rychlostí  $v$
- $f = 0$ , tj. v systému nevznikají nebo nezanikají žádné částice, nedochází k reakci

V této kapitole porušíme první podmínku, v následující kapitole pak druhou. Ještě si povšimněme součtu  $J_{diff} + J_{adv}$ . Tuto superpozici můžeme provést pouze za předpokladu, že difúze a přenos média jsou navzájem nezávislé procesy.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial(J_{diff} + J_{adv})}{\partial x} = -\frac{\partial(-D\frac{\partial u}{\partial x} + vu)}{\partial x},$$

tj. v případě, že rychlost média nezávisí na čase a místě (např. nestlačitelná kapalina proudící konstantní rychlostí)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v\frac{\partial u}{\partial x}. \quad (20)$$

Ve vícerozměrném případě pak

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2} - \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial u}{\partial x_i},$$

což můžeme zkráceně zapsat takto:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\nabla^2 u - v \cdot \nabla u.$$

Pokusme se odhadnout řešení rovnice (20). V případě, že rychlost  $v$  byla nulová, vyřešili jsme rovnici difúze a našli řešení úlohy s bodovým zdrojem jako Gaussovu křivku

$$u(x, t) = \frac{M}{S\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{x^2}{4Dt}}.$$

Pokud bude difundující látka unášena prostředím konstantní rychlostí  $v \neq 0$ , bude místo  $x$  za čas  $t$  v místě  $vt$ . Substitucí  $\xi = x - vt$  pak posuneme toto pohybující se místo do počátku. Řešením by měla být tedy koncentrace

$$u(x, t) = \frac{M}{S\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-vt)^2}{4Dt}}.$$

**65. příklad:** Dokažte, že substituce  $\xi = x - vt$  převádí rovnici difúze s advekcí na rovnici difúze bez advekce.

**Poznámka 17.** V dynamice tekutin se zavádí *Pécletovo číslo*

$$Pe = \frac{D}{v^2 t}.$$

Uvažujme vzdálenost, kterou částice urazí díky advekci:  $L_a = vt$  a díky difúzi  $L_d = \sqrt{Dt}$ . Poměr

$$L_d : L_a \quad \text{resp.} \quad Pe = \left(\frac{L_d}{L_a}\right)^2$$

pak udává dominanci difúze či advekce při transportu částic tekutinou. Pro  $Pe \gg 1$  je dominantní difúzní složka a pro  $Pe \ll 1$  je dominantní advektivní složka.

**66. příklad:** Řeka má v daném místě průtok  $Q = 1\text{m}^3/\text{s}$  a průřez  $S = 20\text{m}^2$ . Difúzní (turbulentní) koeficient je  $D = 1\text{m}^2/\text{s}$ . Do jaké vzdálenosti je dominantní difúze?

## Model intravenózní injekce

Lékař zavede injekci antihistaminika pacientovi s alergickou reakcí. Jaká bude koncentrace chemikálie v krvi za minutu?

### Koncepce:

Stavovou proměnnou bude koncentrace antihistaminika  $u(x, t)$ , parametry budou rychlost krve  $v$ , difúzní koeficient  $D$ , počáteční koncentrace antihistaminika  $u_0$  a celkový čas zavádění injekce  $T$ .

### Diagram:

Předpokládejme, že lékař vstříkuje injekci rychlostí krve, tj. počáteční koncentrace  $u_0$  je v žíle v celé délce  $L = vT$ . Bez újmy na obecnosti můžeme "sledovat" trasu krve od místa vpichu  $x = 0$ , tedy proměnná  $x$  bude svázána s rovnoměrně se pohybujícím tokem krve.

Intoxikovanou část žíly délky  $L$  můžeme považovat za infinitesimální součet jejích elementů, kde množství antihistaminika v elementu oblemu žíly je  $dM = u_0 S d\xi$ . Zřejmě platí

$$du(x, t) = \frac{dM}{S\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}},$$

tj.

$$du(x, t) = \frac{u_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi.$$

Superpozicí na kontaminované délce  $L$  pak dostáváme následující vztah:

Rovnice:

$$u(x, t) = \int_0^L \frac{u_0}{\sqrt{4\pi Dt}} e^{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt}} d\xi.$$

**67. příklad:** Substitucí  $\eta = \frac{x-\xi}{\sqrt{4Dt}}$  převed'te integrál do tvaru

$$u(x, t) = \frac{u_0}{2} \left( \operatorname{erf} \left( \frac{x}{\sqrt{4Dt}} \right) - \operatorname{erf} \left( \frac{x-L}{\sqrt{4Dt}} \right) \right).$$

**68. příklad:** Nakreslete funkci koncentrace  $u(x, t)$  pro  $v = 0.1 \text{ m/s}$ ,  $D = 2 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ ,  $T = 5 \text{ s}$  a  $u_0 = 0.1$ .

**69. příklad:** Spoč'tete Pécletovo číslo v čase  $t = 10^{-3} \text{ s}$ ,  $t = 10 \text{ s}$  a  $t = 60 \text{ s}$ .



# Reakčně-difúzní model

Jak už bylo řečeno, v této kapitole model difúze rozšíříme o reakční složku. Uvažujme rovnici zákona zachování hmoty bez advekce

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\frac{\partial J}{\partial x} + f = -\frac{\partial J_{diff}}{\partial x} + f.$$

Funkce  $f \neq 0$  značí, že v systému vznikají nebo zanikají částice. Typickým příkladem takového systému jsou chemické reakce v tekutinách, kde se reakcí vznikající látka difúzí šíří tekutinou. Tyto modely bývají většinou vícerozměrné a jejich řešení značně komplexní. Pro jednoduchost si ukážeme model jednorozměrný, ve kterém vzniká typický jev - postupující vlna. Už tento jednoduchý model má samozřejmě v závislosti na tvaru funkce  $f$ , okrajových a počátečních podmínkách velice komplexní chování.

## Postupující vlna

Uvažujme reakčně difúzní rovnici tvaru

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(u), \quad (21)$$

kde se změna koncentrace  $u \in \langle 0, 1 \rangle$  v čase závisí na difúzi a na reakci, která není funkcí času, pouze koncentrace, přitom  $f(0) = 0$  a  $f(1) = 0$ .

Předpokládejme nyní, že má rovnice řešení v konkrétním tvaru

$$u(x, t) = U(x - vt) = U(\xi),$$

kde  $\xi = x - vt$  je podobně jako u rovnice s advekcí transformace, která bude  $x$  posouvat rychlostí  $v$  ve směru osy  $x$ . Oproti rovnici s advekcí, ale nyní  $v$  není rychlostí média (ta je nulová), ale libovolně zvolenou hodnotou.

Pokud bychom tedy našli nějaké stacionární řešení  $U(\xi)$ , ve skutečnosti by šlo o řešení posouvající se rychlostí  $v$  po ose  $x$ . Takové řešení se nazývá postupující vlnou (travelling wave).

**70. příklad:** Ukažte, že transformace  $\xi = x - vt$  převádí rovnici (21) do tvaru

$$DU'' + vU' + f(U) = 0.$$

Zavedením  $U' = V$  dostáváme dvojrozměrný systém

$$\begin{aligned}U' &= V \\V' &= -\frac{v}{D}V - \frac{f(U)}{D}\end{aligned}$$

Stacionárními body pak budou zřejmě nulové body funkce  $f$ , které jsou minimálně dva -  $U = 0$  a  $U = 1$ . Předpokládáme-li, že je  $f$  hladká, můžeme použít větu o linearizaci a analyzovat stabilitu v okolí těchto rovnovážných bodů.

Typickým příkladem takovéto monostabilní rovnice je Fisher-Kolmogorovova rovnice, kde reakční funkce je tvaru

$$f(u) = ru(1 - u).$$

**71. příklad:** Tuhle funkci už jsme někde měli, že? Co by asi mohla modelovat Fisherova rovnice? Co by představovala proměnná  $u$ ?

Jiným příkladem reakčně-difúzní rovnice je FitzHugh-Nagumova rovnice, kde reakční funkce je tvaru

$$f(u) = ku(u - a)(1 - u),$$

která popisuje model šíření vzruchu v neuronu. Proměnná  $u$  představuje normalizované membránové napětí neuronu (membránové napětí představuje rozdíl potenciálů uvnitř a vně neuronu, je určeno koncentrací iontů).

**72. příklad:** Ukažte, že FitzHugh-Nagumova rovnice je bistabilní, tj. že vznikají dva stabilní stavy  $u = 0$  a  $u = 1$ .

V případě  $u = 0$  mluvíme o nervu v depolarizovaném stavu, v případě  $u = 1$  mluvíme o nervu v polarizovaném stavu.

## Model šíření genu v populaci

### Koncepce:

Uvažujme populaci, ve které se šíří mutace genu — alela  $a$  namísto původní alely  $A$ . Frekvence alely  $a$  je  $p$ , frekvence alely  $A$  je  $q = 1 - p$ . Genová mutace se navíc šíří do prostředí náhodně migrací (náhodná procházka, difúze). Budeme uvažovat pro jednoduchost pouze jednu prostorovou proměnnou a aditivní selekční koeficient genu, tedy půjde o případ, kdy gen  $A$  ani  $a$  není dominantní, ale míra selekce genotypů  $AA$ ,  $Aa$  a  $aa$  aditivně roste, tj. relativní fitness je  $1$ ,  $1 + s$  a  $1 + 2s$ .

## Fitness genu v populační genetice

Fitness  $w$  vyjadřuje podíl potomků produkovaných jedním genotypem v porovnání s genotypem jiným, reprodukční způsobilost genotypu. Pravděpodobnost, že nějaký fenotyp přežije a zanechá potomky je mírou jeho fitness. Budeme předpokládat, že fitness genotypů je konstantní a je rovna pravděpodobnosti jeho přežití. Mluvíme o tzv. absolutním fitness, protože jeho hodnota je závislá na fitness ostatních genotypů. Obvykle však známe hodnotu životaschopnosti každého genotypu vztaženého relativně k ostatním vybraným genotypům jako standard k porovnání. Pak mluvíme relativní fitness.

## Diagram:

♂ ♀	(A)	(a)
(A)	(AA)	(Aa)
(a)	(aA)	(aa)

## Rovnice:

genotyp	<i>aa</i>	<i>aA</i>	<i>AA</i>
původní frekvence	$p^2$	$2pq$	$q^2$
podíl po selekci	$p^2(1+2s)$	$2pq(1+s)$	$q^2$
frekvence genotypu po selekci	$\frac{p^2(1+2s)}{\bar{w}}$	$\frac{2pq(1+s)}{\bar{w}}$	$\frac{q^2}{\bar{w}}$

kde  $\bar{w} = p^2(1+2s) + 2pq(1+s) + q^2 = 1 + 2sp$ .



V následující generaci bude tedy frekvence mutace genu  $a$  rovna

$$\frac{p^2(1 + 2s) + pq(1 + s)}{\bar{w}}.$$

Změna (derivace) bude tedy odpovídat rozdílu frekvencí alely genu  $a$

$$\begin{aligned}\dot{p} &= \frac{p^2(1 + 2s) + pq(1 + s)}{\bar{w}} - p \\ &= \frac{p^2(1 + 2s) + pq(1 + s) - p(1 + 2sp)}{1 + 2sp} \\ &= \frac{sp(1 - p)}{1 + 2sp}.\end{aligned}$$

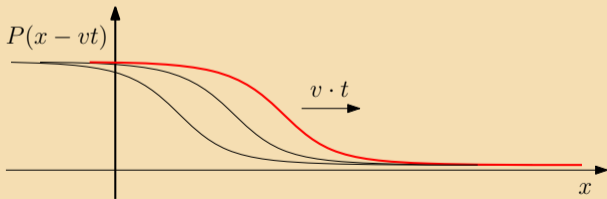
Bude-li  $p(x, t)$  představovat frekvenci alely  $a$  na daném místě v daném čase a mutace genu se bude difúzně šířit do okolí (náhodná procházka), pak musí platit rovnice

$$\dot{p} = D \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{sp(1 - p)}{1 + 2sp}, \quad (22)$$

**73. příklad:** Hledejte řešení jako postupující vlnu a převed'te rovnici na systém ODR. Najděte rovnovážné body rovnice a určete jejich stabilitu. Nakreslete nulkliny a fázový diagram systému.

Vyhodnocení:

Z fázového diagramu je zřejmé, že frekvence alely  $P(\xi) = P(x - vt) = p(x, t)$  klesá k nulové stabilní rovnováze pro  $\xi \rightarrow \infty$ . Vzhledem k času jde ale o postupující vlnu šíření genu,



což je zcela v souladu s očekáváním.

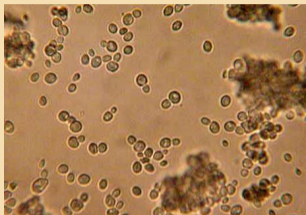
## Šíření kolonií mikroorganismů

### Koncepce:

Kvasinky jsou jednobuněčné houbové mikroorganismy, množí se zejména nepohlavně a je pro ně charakteristický způsob dělení buněk, takzvané pučení. Buňky kvasinek potřebují ke svému dělení energii, kterou získávají z cukru - glukózy. Pokusíme se vytvořit model šíření kolonie kvasinek.

Pro jednoduchost budeme uvažovat jen jednu prostorovou proměnnou  $x$ . Počet buněk v jednotce objemu (hustotu buněk) označíme  $n(x, t)$ , koncentraci glukózy  $g(x, t)$ . Glukóza se ve vodě šíří difúzí.

Diagram:



Rovnice:

$$\dot{n} = kn(g - g^*)$$

$$\dot{g} = D \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - ckn(g - g^*).$$

**74. příklad:** Zdůvodněte uvedený tvar rovnic.

Zavedením nových proměnných

$$z = x - vt, \quad N(z) = n(x, t), \quad G(z) = g(x, t) - g^*$$

dostáváme

$$\begin{aligned} -v \frac{dN}{dz} &= kNG \\ -v \frac{dG}{dz} &= D \frac{d^2G}{dz^2} - ckNG. \end{aligned}$$

Přičtením  $c$ -násobku 1. rovnice k druhé pak dostáváme

$$-vc \frac{dN}{dz} - v \frac{dG}{dz} = D \frac{d^2G}{dz^2}.$$

Integrací pak dostáváme

$$\text{konst} - vcN - vG = D \frac{dG}{dz}.$$

Konstantu můžeme dopočítat např. touto úvahou: v případě, že  $G \equiv 0$ , je také  $\frac{dG}{dz} \equiv 0$ , proto  $konst = vcN_0$  pro  $G(z) \equiv 0$ .  $N_0$  tedy představuje jakési hraniční maximální množství (hustota) kvasinek, když je glukóza již vypotřebována.

Dostáváme tedy systém rovnic

$$\begin{aligned}\frac{dN}{dz} &= -\frac{k}{v}NG \\ \frac{dG}{dz} &= \frac{vcN_0}{D} - \frac{vc}{D}N - \frac{v}{D}G.\end{aligned}$$

**75. příklad:** Najděte rovnovážné body rovnice a určete jejich stabilitu. Nakreslete nulkliny a fázový diagram systému. Nakreslete graf řešení  $N$  versus  $z$  a  $G$  versus  $z$

## Vyhodnocení:

Z fázového diagramu je zřejmé, stabilní rovnováhou je bod  $[0, cN_0]$ , přitom hustota buněk řešení klesá se  $z \rightarrow \infty$  k nule a koncentrace glukózy roste k  $cN_0$ . Vzhledem k času jde o postupující vlnu šířící se kolonie kvasinek, která vypotřebovává glukózu, což je zcela v souladu s očekáváním.

76. příklad: Podívejte se na článek

## Gray-Scottův model

a jeho

## simulaci

Postupující vlny a vznik vzorů k nakouknutí:

## Nerovnovážná termodynamika a její aplikace, ZČU v Plzni



KONEC