

Domácí úkol z 18. dubna 2013 (upraveno 25. dubna 2013)

1. Nechť \mathcal{A} je množina všech přirozených čísel, které v zápise ve dvojkové soustavě mají lichý počet cifer. Pro libovolné reálné x označme

$$A(x) = |\{n \in \mathcal{A}; n \leq x\}|.$$

Dokažte, že

$$\limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x} = \frac{2}{3} \quad \text{a} \quad \liminf_{x \rightarrow \infty} \frac{A(x)}{x} = \frac{1}{3}.$$

2. Pro libovolné $c \in \{1, 2, \dots, 9\}$ označme \mathcal{B}_c množinu všech přirozených čísel, jejichž zápis v dekadické soustavě začíná cifrou c (tj. cifra v nejvyšším řádu je rovna c).

- Dokažte, že množina \mathcal{B}_c jako podmnožina \mathbb{N} nemá asymptotickou hustotu.
- Určete analytickou hustotu množiny \mathcal{B}_c jako podmnožiny \mathbb{N} .